Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 501, 2021 г.

**Н. А. Крюков**

# ОДНОСТОРОННЯЯ ЭГОИСТИЧНАЯ ПАРКОВКА

## 1. Введение

Задача случайного заполнения отрезка была впервые сформулирована в работе Реньи [1]. В ней рассматривалась следующая задача. На отрезке $[0, x]$ для некоторого фиксированного $x > 1$ случайным образом размещается интервал $(t, t+1)$. Он разбивает изначальный отрезок на два: $[0, t]$ и $[t+1, x]$. Если какой-либо из них имеет длину меньше единицы, он исключается из дальнейшего рассмотрения. Остальные продолжают заполняться по вышеописанному правилу. Выражение "случайным образом" означает, что $t$ является случайной величиной, равномерно распределённой на отрезке $[0, x-1]$ и не зависящей от других аналогичных случайных величин. Процесс заполнения заканчивается в тот момент, когда не остаётся отрезков длины хотя бы 1. В этот момент подсчитывается суммарное количество размещённых на изначальном отрезке интервалов. Оно обозначается за $N_x$. Для $0 \leqslant x < 1$ значение $N_x$ принимается равным нулю.

В статье [1] было показано, что при любом $n \geqslant 1$

$$E\{N_x\} = \lambda x + \lambda - 1 + O(x^{-n}), \quad (x \to +\infty), \tag{1}$$

где константа $\lambda$ определена следующим образом

$$\lambda = \int_0^\infty e^{-2\int_0^t \frac{1-e^{-u}}{u} du} \, dt. \tag{2}$$

Изучение этой задачи было продолжено в работе Дворецкого и Роббинса [2], где было дано уточнение соотношения (1):

$$E\{N_x\} = \lambda x + \lambda - 1 + O\left(\left(\frac{2e}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right), \quad (x \to +\infty). \tag{3}$$

*Ключевые слова*: случайное заполнение, дискретная задача о "парковке," задача об эгоистичной парковке.

Также в этой статье было показано, что существует положительная константа $\lambda_2$, такая что верно соотношение

$$D\{N_x\} = \lambda_2 x + \lambda_2 + O\left(\left(\frac{4e}{x}\right)^{x-4}\right), \quad (x \to +\infty). \tag{4}$$

Дискретный аналог задачи случайного заполнения отрезка был рассмотрен в работе [3]. В нём длина отрезка $x$, а так же случайная величина $t$ принимают только целые значения. Однако в данном случае длина интервала становится важной, поэтому вместо интервала $(t, t+1)$ на отрезок размещается интервал $(t, t+l)$ для некоторой заранее заданной натуральной константы $l$. Случайная величина $t$ в таком случае является равномерно распределённой на наборе целых чисел $\{1, \ldots, x-l\}$, а из рассмотрения исключались все отрезки, длина которых меньше чем $l$. При помощи вычисления производящих функций в этой статье было получено следующее асимптотическое соотношение для математических ожиданий $E\{N_x\}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{E\{N_x\}}{lx} = e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1} \frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1} \frac{x^i}{i}} dx. \tag{5}$$

Изучение данной задачи было продолжено в работах [4] и [5]. В работе [4] было дано уточнение соотношения (5) и показано аналогичное соотношение для дисперсий $\mathbb{D}\{N_x\}$, а в работе [5] была показана асимптотическая нормальность последовательности случайных величин $N_x$.

В работах [6] и [7] рассматривался другой дискретный аналог задачи случайного заполнения отрезка. В нём длина отрезка $x$ и случайная величина $t$ также принимают только целые значения. Однако, если при разбиении остаются отрезки длины 1, они также исключаются из рассмотрения. В статье [6] были явно вычислены три первых момента случайных величин $N_x$, а в работе [7] было получено асимптотическое поведение моментов больших порядков, а также асимптотическая нормальность данной последовательности случайных величин.

В последнее время задачи о случайном заполнении отрезка вновь привлекают внимание математиков. Они были недавно рассмотрены в ряде статей, в том числе [8–12]. В работах [8, 9] рассматривались дискретные варианты задачи, в то время как [10–12] обращали внимание на непрерывные аналоги.

Данная работа представляет собой неравномерный аналог задачи об эгоистичной парковке, рассмотренной в работе [6], в котором отрезок не может занять первое самое левое место.

## 2. Основные результаты

Рассмотрим следующий процесс. Пусть у нас есть отрезок $[0, n]$. Если его длина равна единице, процесс прекращается. Иначе расположим на нём случайным образом интервал $(t, t+1)$ с целыми концами. Он разбивает изначальный отрезок на два, каждый из которых далее рассматривается отдельно, аналогично изначальному. Фраза «случайным образом» означает, что $t$ является случайной величиной, равномерно распределенной на множестве целых чисел $\{1, \ldots, n-1\}$. Когда длина всех оставшихся отрезков становится меньше двух, процесс прекращается, и подсчитывается суммарное количество расположенных отрезков. Обозначим эту случайную величину за $X_n$.

Данный процесс можно интерпретировать следующим образом. Пусть у нас есть $n$ подряд идущих парковочных мест, куда по очереди паркуются машины с левым расположением руля. Будем считать, что для того чтобы водитель смог выйти из своей машины, место слева от его машины должно быть свободным. В остальном будем считать, что у водителей нет никаких предпочтений. В таком случае он не может занять самое левое место в каком-либо отрезке подряд идущих свободных мест, а остальные места он будет занимать равновероятно. Будем считать, что процесс парковки заканчивается в тот момент, когда следующий водитель не сможет найти себе место. В таком случае определённая выше случайная величина $X_n$ будет обозначать количество припаркованных машин.

Формально данную последовательность можно определить следующим образом:

$$X_0 = X_1 = 0,$$
$$X_n := 1 + X_{\nu_n - 1} + X_{n-\nu_n}, \quad \text{при} \quad n \geqslant 2, \tag{6}$$

где $\nu_n$ – независимые случайные величины, не зависящие от $X_m$, равновероятно принимающие значения $2, \ldots, n$. Также, в последнем равенстве $X_{\nu_n - 1}$ и $X_{n-\nu_n}$ независимы.

Данная постановка задачи возникла во время обсуждения задачи об эгоистичной парковке с профессором Дитрихом Стояном. Основным отличием данной постановки задачи от постановки, изученной в работе [6], является запрет на расположение интервала на левом краю. В конце статьи представлено сравнение результатов, представленых в нынешней статье и в работе [6].

**Теорема 1.** *Математическое ожидание случайной величины $X_n$ при $n \geqslant 2$ имеет следующий вид*

$$\mathbb{E}\{X_n\} = n\left(1 - \frac{\Gamma(n+1,-1)}{e\Gamma(n+1)}\right) - \frac{\Gamma(n,-1)}{\Gamma(n)},$$

*где $\Gamma(n)$ – гамма-функция, а $\Gamma(n,-1)$ – неполная гамма-функция, которая определяется равенством*

$$\Gamma(n,-1) = \int\limits_{-1}^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}dt.$$

**Доказательство Теоремы 1.** Обозначим последовательность математических ожиданий

$$E_n := \mathbb{E}\{X_n\}.$$

Исходя из равенства (6), при $n \geqslant 2$ для этой последовательности верно следующее соотношение:

$$E_n = 1 + \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}(E_{i-1} + E_{n-i}) = 1 + \frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n-2}E_i + \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}E_i. \quad (7)$$

Определив последовательность

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} E_i$$

и приняв во внимание, что $E_0 = 0$, соотношение (7) можно переписать следующим образом

$$S_n - S_{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}S_{n-1} + \frac{1}{n-1}S_{n-2}, \qquad n \geqslant 2.$$

Умножим обе части этого уравнения на $(n-1)z^n$ и просуммируем их по $n \geqslant 2$. Получим

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)S_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)z^n + \sum_{n=2}^{\infty} nS_{n-1}z^n + \sum_{n=2}^{\infty} S_{n-2}z^n.$$

Заметим, что $S_0 = S_1 = 0$. Значит, все суммы в этом равенстве можно заменить на суммы от нуля до бесконечности

$$\sum_{n=0}^{\infty} nS_{n+1}z^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)S_n z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^{n+2}.$$

Запишем полученное соотношение в более удобной форме

$$\sum_{n=0}^{\infty} nS_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n = z^2\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} nS_n z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^{n+2}. \tag{8}$$

Определим производящую функцию последовательности $S_n$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n.$$

Её производная имеет вид

$$G'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nS_n z^{n-1}.$$

Используя функции $G(z)$ и $G'(z)$, соотношение (8) можно записать следующим образом

$$zG'(z) - G(z) = \frac{z^2}{(1-z)^2} + z^2G'(z) + zG(z) + z^2G(z).$$

Таким образом, имеет место следующее дифференциальное уравнение на функцию $G(z)$

$$(z - z^2)G'(z) = \frac{z^2}{(1-z)^2} + (z^2 + z + 1)G(z). \tag{9}$$

Будем искать решения этого уравнения в виде

$$G(z) = H(z)K(z),$$

где функции $H(z)$ и $K(z)$ удовлетворяют соотношениям

$$(z - z^2)H'(z) = (z^2 + z + 1)H(z), \tag{10}$$

$$(z - z^2)H(z)K'(z) = \frac{z^2}{(1-z)^2}. \tag{11}$$

Рассмотрим сначала (10). Заметим, что

$$(\ln H(z))' = \frac{1+z+z^2}{z-z^2}$$

Значит, функция $\ln H(z)$ имеет вид

$$\ln H(z) = -z - 3\ln(1-z) + \ln(z) + c.$$

Таким образом,

$$H(z) = C\frac{ze^{-z}}{(1-z)^3}.$$

Заметим, что поскольку $G(z) = H(z)K(z)$, то можно считать, что константа $C$ является частью функции $K(z)$. Значит, соотношение (11) имеет вид

$$(z-z^2)\frac{ze^{-z}}{(1-z)^3}K'(z) = \frac{z^2}{(1-z)^2}.$$

Отсюда следует, что

$$K(z) = e^z + c.$$

Получаем, что для некоторой константы $c \in \mathbb{R}$

$$G(z) = \frac{z}{(1-z)^3} + c\frac{ze^{-z}}{(1-z)^3}.$$

Вычислим константу $c$. Заметим, что $G'(0) = S_1 = 0$. С другой стороны,

$$G'(z) = \frac{(1-z)^3 + 3z(1-z)^2}{(1-z)^6} + c\frac{(e^{-z} - ze^{-z})(1-z)^3 + 3ze^{-z}(1-z)^2}{(1-z)^6},$$

то есть

$$G'(0) = 1 + c = 0.$$

Получаем, что $c = -1$, и

$$G(z) = \frac{z(1-e^{-z})}{(1-z)^3}.$$

Определим теперь производящую функцию последовательности $E_n$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n z^n.$$

Заметим, что в силу соотношения $E_n = S_n - S_{n-1}$,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(S_n - S_{n-1})z^n = G(z) - zG(z) = \frac{z(1-e^{-z})}{(1-z)^2}.$$

Теперь необходимо разложить функцию $F(z)$ в ряд. Для этого заметим, что

$$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n,$$

$$1 - e^{-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} z^n.$$

Таким образом, используя следующее соотношение для неполной гамма-функции

$$\frac{\Gamma(n+1,-1)}{e\Gamma(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

получаем, что

$$E_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(n-k)}{k!} = n\left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right)$$
$$- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} = n\left(1 - \frac{\Gamma(n+1,-1)}{e\Gamma(n+1)}\right) - \frac{\Gamma(n,-1)}{\Gamma(n)}.$$

$\square$

**Замечание.** В работе [6] было показано, что без запрета занятия самого левого места математические ожидания имеют следующий вид

$$\mathbb{E}\{X'_n\} = \frac{2n-1}{3} = \frac{2}{3}n + o(n).$$

А соотношение из Теоремы 1 можно записать в следующем виде

$$\mathbb{E}\{X_n\} = \left(1 - \frac{1}{e}\right) n + o(n).$$

Заметим, что

$$\frac{2}{3} > 1 - \frac{1}{e}.$$

Значит, в случае запрета занятия самого левого места асимптотически интервалов будет расположено меньше, чем при его отсутствии.

**Благодарность.** Автор хотел бы поблагодарить кандидата физико-математических наук, доцента Сергея Михайловича Ананьевского за комментарии по улучшению данной статьи.

## Список литературы


1. A. Rényi, *On a one-dimensional problem concerning space-filling.* — Publ. Math. Inst. Hungarian Acad. Scie. **3** (1958), 109–127.
2. A. Dvoretzky, H. Robbins, *On the "parking" problem.* — Publ. Math. Inst. Hungarian Acad. Scie. **9** (1964), 209–226.
3. R. G. Pinsky, *Problems from the Discrete to the Continuous.* — Springer International Publishing Switzerland, **3** (2014), 21–34.
4. Н. А. Крюков, *Дискретизация задачи о парковке.* — Вестн. С.-П. ун-та, Математика, механика, астрономия., **7 (65)**, No. 4 (2019), 662–677. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.408
5. С. М .Ананьевский, Н. А. Крюков, *Асимптотическая нормальность в дискретном аналоге задачи о парковке.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **495** (2020), 9-36. http://mi.mathnet.ru/znsl6996
6. С. М. Ананьевский, Н. А. Крюков, *Задача об эгоистичной парковке.* — Вестн. С.-П. ун-та, Математика, механика, астрономия, **5 (63)**, No. 4 (2018), 549–555. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.402
7. С. М. Ананьевский, Н. А. Крюков, *Об асимптотической нормальности в одном обобщении задачи Реньи.* — Вестн. С.-П. ун-та, Математика, механика, астрономия, **6 (64)**, No. 3 (2019), 353–362. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.301
8. M. P. Clay, N. J. Simanyi, *Rényi's parking problem revisited.* — Stoch. Dynam. **16**, No. 2 (2016), 1660006.
9. L. Gerin, *The Page-Rényi parking process.* — Electr. J. Comb. **22**, No 4 (2015), P4.4.
10. С. М. Ананьевский, *Некоторые обобщения задачи о "парковке".* — Вестн. С.-П. ун-та, Математика, механика, астрономия, **3 (61)**, No. 4 (2016), 525–532. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.401
11. С. М. Ананьевский, *Задача парковки для отрезков различной длины.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **228** (1996), 16–23.
12. А. Б. Ільєнко, В. В. Фатенко, *Узагальнення задачі Реньї про паркування.* — Наукові вісті НТУУ "КПІ": міжнародний науково-технічний журнал, No. 4 (114) (2017), 54–60.
13. P. Billingsley, *Probability and Measure.* — Third Edition, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley Sons, New York, (1985).



Kryukov N. A. One-sided selfish parking.

This paper considers a discrete analogue of the parking problem.

Let $n$ be an integer number. If $n > 1$ then we randomly locate an interval $(t, t+1)$ with integer endpoints on a segment $[0, n]$. Thus the original segment is divided into two: $[0, t]$ and $[t+1, n]$ and each of them will be further considered separately likewise the original one. The phrase "randomly" in this problem means that $t$ is a uniformly distributed on a set {1,. . . ,n-1} random variable. The process of location of the intervals

finishes when the lengths of all the remaining intervals are less than two. Define as $X_n$ the total amount of the located intervals. In this paper the expectations $\mathbb{E}\{X_n\}$ were calculated. The process described above can be interpreted as a parking process of cars with handlebars on the left. Hence the driver is able to leave his car only if the place on his left is free. This is exactly the case when the driver cannot take the left end place of any free segment. In this case $X_n$ stands for the amount of the parked cars.

Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034 Россия
*E-mail*: kryuknik@gmail.com

Поступило 27 мая 2021 г.