Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 501, 2021 г.

Л. Б. Клебанов

ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СВОЙСТВАМИ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§1. Введение

Хорошо известны характеризации нормального распределения свойствами независимости линейных форм от независимых случайных величин и векторов. Это результат С. Н. Бернштейна [1], а также известная теорема Скитовича и Дармуа [2, 3], и ее многочисленные обобщения как на многомерный случай [4–6], так и на случаи распределений на группах [7–10]. Несколько в стороне стоят исследования А. А. Зингера и Ю. В. Линника [11] о независимости форм со случайными коэффициентами. Их результаты касаются довольно общих свойств характеристических функций соответствующих распределений. Однако характеризационные теоремы приведены только для форм весьма специального вида и касаются они исключительно нормального распределения. Имеются также и распространения этих результатов на нелинейные статистики. Обилие утверждений о том, что независимость линейных форм от независимых случайных элементов является характеристическим свойством нормального распределения приводит к представлению о том, что и формы со случайными коэффициентами не являются исключением. Кроме того оказывается, что характеризации распределений свойствами независимости линейных форм тесно связаны с рассмотрением свойства одинаковой распределенности монома и линейной формы. Например, упомянутая выще теорема С. Н. Бернштейна может быть выведена из результата Д. Полиа [12]. Это обстоятельство делает естественным совместное рассмотрение обоих типов характеризационных теорем.

Ключевые слова: линейные формы; случайные коэффициенты; распределение гиперболического секанса; двух-точечное распределение; равномерное распределение.

Работа была частично финансирована Грантовым Агентством Чешской Республики (Grant GAČR 19-04412S).

Целью предлагаемой работы является рассмотрение указанных типов задач для случая линейных форм со случайными коэффициентами. При этом основной акцент делается на тех формах, для которых изучаемые свойства оказываются характеристическими для распределений, отличных от нормального. Иными словами, мы хотим подчеркнуть существенное отличие свойств форм со случайными коэффициентами от форм с детерминированными коэффициентами. Методы решения функциональных уравнений, возникающих как в этих, так и во многих других задачах характеризации распределений, были разработаны нами ранее (см. [13]). Ниже мы предполагаем, что читатель знаком с определениями и основными результатами [13].

§2. Сходства некоторых свойств распределения гиперболического секанса и нормального закона

Приведем сначала некоторые известные результаты, связанные с распределение гиперболического секанса. Для простоты рассмотрим только случай симметричного относительно нуля распределения.

Прежде всего, в “стандартном” случае плотность распределения гиперболического секанса имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}. \tag{2.1}$$

В общем случае это распредение содержит еще параметр масштаба. Не трудно видеть, что характеристическая функция плотности (2.1) равна

$$f(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\pi t/2)}. \tag{2.2}$$

Мы видим, что плотность распределения гиперболического секанса имеет (с точностью до нормализации) тот же мультипликативный тип, что и его характеристическая функция. Таким же свойством обладает и нормальный закон.

Отметим и некоторые другие свойства, показывающие на сходство распределения гиперболического секанса и нормального закона.

HS1 Распределение гиперболического секанса является предельным при суммировании случайного числа случайных величин. Более точно, пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ - это последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и конечной дисперсией. Допустим, что ν_n

$(n \in N)$ – случайная величина, принимающая целые положительные значения, не зависящая от последовательности X_1, $X_2, \ldots$, и имеющая производящую функцию вероятностей

$$\mathcal{P}_n(z) = \frac{1}{T_n(1/z)}. \tag{2.3}$$

Здесь T_n – полином Чебышева степени n. Тогда суммы

$$(1/\sqrt{n}) \sum_{j=1}^{\nu_n} X_j$$

сходятся по распределению к закону гиперболического секанса при $n \to \infty$. Этот факт был получен в [14].

HS2 Существует квадратичная форма от двух (или более) независимых одинаково распределенных по закону гиперболического секанса случайных величин имеющая постоянную регрессию на выборочное среднее. Этот факт был впервые получен в [15] (см. также [16] по поводу более общих результатов).

Отметим, что эти свойства вполне аналогичны известным свойствам нормального закона.

Приведем теперь еще несколько свойств распределения гиперболического секанса.

Из известного представления гиперболического косинуса в виде бесконечного произведения моментально находим

$$f(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + t^2/(2k-1)^2}. \tag{2.4}$$

Поскольку $1/(1+t^2/(2k-1)^2)$ представляет собой характеристическую функцию распределения Лапласа, которое является безгранично делимым, то и $\mathbf{f(t)}$ **является безгранично делимой характеристической функцией**.

Обозначим $g(t) = 1/(1+t^2)$, $a_k = 1/(2k-1)$. Легко непосредственно проверить, что для любого $p \in (0,1)$

$$g(t) = \frac{pg(\sqrt{p}t)}{1-(1-p)g(\sqrt{p}t)}.$$

Кроме того,

$$\frac{p}{1-(1-p)g(\sqrt{p}t)} = p + (1-p)g(t).$$

Поэтому,

$$f(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{pg(\sqrt{p}a_k t)}{1-(1-p)g(\sqrt{p}a_k t)} = \prod_{k=1}^{\infty} g(\sqrt{p}a_k t) \prod_{j=1}^{\infty} (p + (1-p)g(\sqrt{p}a_k t))$$
$$= f(\sqrt{p}t)h(t), \tag{2.5}$$

где

$$h(t) = \prod_{j=1}^{\infty} (p + (1-p)g(\sqrt{p}a_k t))$$

представляет собой характеристическую функцию. Таким образом, $\mathbf{f(t)}$ **является саморазложимой**.

Продолжим изучение функции распределения гиперболического секанса. Формула (2.1) дает представление плотности этого распределения, интегрирование которой дает выражение функции распределения:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{2arctg(th(x/2))}{\pi}. \tag{2.6}$$

Это выражение вместе с извесной функцией распределения закона Коши показывает, что **если случайная величина** X **имеет распределение гиперболического секанса, то величина** $Y = \operatorname{sh} X$ **подчиняется распределению Коши**.

Формула (2.4) дает представление случайной величины с распределение гиперболического секанса в виде бесконечной суммы независимых случайных величин с распределениями Лапласа (имеющими соответствующие параметры масштаба). Можно получить и несколько другое представление. Для этого запишем характеристическую функцию $f(t)$ с помощью разложения гиперболического косеканса в сумму простейших дробей:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{16n+4}{(4n+1)^2+t^2} - \frac{16n+12}{(4n+3)^2+t^2} \Big)$$

Вычисляя обратное преобразование Фурье, находим

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(4n+1)(4n+3)} q_n(x), \tag{2.7}$$

где плотности $q_n(x)$ определены равенством

$$q_n(x) = \frac{\pi(4n+1)(4n+3)}{8} \mathrm{Exp}\big(-\frac{4n+3}{2}|x|\big) \Big(\mathrm{Exp}(|x|) - 1\Big), \tag{2.8}$$

$n = 1, 2, \ldots$. Соотношения (2.7), (2.8) дают представление распределения гиперболического секанса в виде бесконечной смеси распределений с плотностями $q_n(x)$.

§3. Характеризации закона гиперболического секанса свойствами одинаковой распределенности и независимости форм со случайными коэффициентами

Начнем со свойства одинаковой распределенности статистик.

Теорема 3.1. *Пусть X_1, X_2, X_3 – независимые одинаково распределенные случайные величины с симметричным (относительно нуля) распределением. Предположим, что ε – бернуллиевская случайная величина, принимающая значения 0 и 1 с одинаковыми вероятностями и не зависящая от X_1, X_2, X_3. Соотношение*

$$X_1 \stackrel{d}{=} \frac{X_1 + X_2}{2} + \varepsilon X_3 \tag{3.1}$$

справедливо тогда и только тогда, когда X_1 имеет распределение гиперболического секанса. (Знак $\stackrel{d}{=}$ используется для равенства по распределению.)

Доказательство. Соотношение 3.1 может быть переписано в терминах характеристической функции $f(t)$ величины X_1 как функциональное уравнение

$$f(t) = f^2(t/2) \cdot \frac{f(t) + 1}{2}. \tag{3.2}$$

Ясно, что если $f(t)$ удовлетворяет уравнению (3.2) то и $f(at)$ также является его решением при любом $a > 0$. Подстановка (2.2) в (3.2) показывает, что характеристическая функция распределения гиперболического секанса удовлетворяет этому уравнению и, значит, для соответствующих случайных величин справедливо свойство (3.1).

Теперь мы хотим показать, что уравнение (3.2) не имеет других решений. Для этого мы используем метод усиленно монотонных операторов (см. [13]). Прежде всего покажем, что четная характеристическая функция, удовлетворяюшая (3.2), не имеет нулей. В самом деле, если для некоторого $t_o > 0$ справедливо $f(t_o) = 0$, то (3.2) влечет $f(t_o/2) = 0$, т.е. $f(t_o/2^k) = 0$ для $k = 1, 2, \ldots$. Последнее невозможно в силу непрерывности $f(t)$ в нуле и того, что $f(0) = 1$. Определим оператор

$$\mathbf{A}f:\ (\mathbf{A}f)(t) = f^2(t/2)\cdot\frac{f(t)+1}{2}.$$

Пусть $\mathcal{E}$ – множество неотрицательных функций, непрерывных на промежутке $[0,T]$, где $T > 0$ – некоторое фиксированное число. Нетрудно видеть, что $\mathbf{A}$ представляет собой усиленно монотонный оператор действующий из $\mathcal{E}$ в пространство непрерывных функций на $[0,T]$.

Рассмотрим семейство $\{\varphi(at),\ a > 0\}$, где $\varphi(t) = 1/\operatorname{ch}(\pi t/2)$. В соответствии с Примером 1.3.1. из [13] это семейство является строго $\mathcal{E}$-положительным. Требуемое теперь вытекает из Теоремы 1.1.1 книги [13]. □

Заметим, что доказанная Теорема 3.1 аналогична Теореме Д. Полиа [12], дающей характеризацию нормального распределения.

Перейдем теперь к характеризации распределения гиперболического секанса свойством независимости линейных форм со случайными коэффициентами.

Теорема 3.2. *Пусть X_1, X_2, X_3 – независимые одинаково распределенные случайные величины с симметричным (относительно нуля) распределением. Предположим, что ε – бернуллиевская случайная величина, принимающая значения 0 и 1 с одинаковыми вероятностями и не зависящая от X_1, X_2, X_3. Рассмотрим линейные формы*

$$L_1 = (X_1+X_2)/2 + \varepsilon X_3;\ L_2 = (X_1-X_2)/2 + (1-\varepsilon)X_3. \tag{3.3}$$

Формы (3.3) стохастически независимы тогда и только тогда, когда X_1 имеет распределение гиперболического секанса.

Доказательство. Вычислим совместную характеристическую функцию форм L_1 и L_2. Имеем

$$\mathbb{E}\exp\{isL_1 + itL_2\} = \mathbb{E}\exp\Big\{i\Big(\frac{s+t}{2}X_1 + \frac{s-t}{2}X_2 \tag{3.4}$$
$$+ (\varepsilon s + (1-\varepsilon)t)X_3\Big)\Big\} = f((s+t)/2)f((s-t)/2)\frac{f(s)+f(t)}{2},$$

где f – это характеристическая функция X_1. Формы L_1 и L_2 независимы тогда и только тогда, когда

$$\mathbb{E}\exp\{isL_1 + itL_2\} = \mathbb{E}\exp\{isL_1\}\mathbb{E}\exp\{itL_2\},$$

что эквивалентно соотношению

$$f((s+t)/2)f((s-t)/2)\frac{f(s)+f(t)}{2} = h_1(s)h_2(t). \tag{3.5}$$

Так как величина X_1 имеет симметричное распределение, то

$$h_1(s) = h_2(s) = f^2(s/2)\frac{f(s)+1}{2}. \tag{3.6}$$

Это соотношение может быть получено либо непосредственным подсчетом, либо подстановкой $t = 0$ $(s = 0)$ в (3.5). Однако подстановка $t = 3$ в (3.5) приводит теперь к

$$f^2(s) = \Big(f^2(s/2)\frac{f(s)+1}{2}\Big)^2. \tag{3.7}$$

Совершенно также как в Теореме 3.1 доказывается, что $f(t)$ не имеет нулей на вещественной оси. Поэтому (3.7) эквивалентно (3.2) и из Теоремы 3.1 вытекает, что f – характеристическая функция распределения гиперболического секанса.

Непосредственной подстановкой в (3.4) убеждаемся, что для распределения гиперболического секанса величины X_1 линейные формы оказываются независимыми. □

Ясно, что доказанная Теорема 3.2 является аналогом Теоремы С. Н. Бернштейна о характеризации нормального распределения.

§4. Характеризация двух-точечного распределения свойством одинаковой распределенности

Выше мы видели, что распределение гиперболического секанса может быть охарактеризовано свойствами линейных форм со случайными коэффициентами. Оказывается, что некоторые видоизменения в конструкции форм приводят к характеризациям других распределений. Некоторые результаты такого рода и приводятся ниже.

Теорема 4.1. *Пусть X_1, X_2 – независимые копии случайной величины X, имеющей симметричное распределение. Предположим, что ε - бернуллиевская случайная величина, принимающая значения 0 и 1 с одинаковыми вероятностями и не зависящая от X_1, X_2. Тогда соотношение*

$$\varepsilon X_1 \overset{d}{=} \frac{1}{2}\big(X_1 + X_2\big) \tag{4.1}$$

имеет место тогда и только тогда, когда величина X *принимает с равными вероятностями два значения* a *и* $-a$ *для некоторого* $a > 0$.

Доказательство. Пусть $g(t)$ - характеристическая функция случайной величины X. Тогда уравнение (4.1) эквивалентно следующему:

$$\frac{1}{2}(g(t)+1) = g^2(t/2). \tag{4.2}$$

Легко проверить, что для любого $a > 0$ функция $\cos(at)$ является решением (4.2). Нам остается показать, что это уравнение не имеет других решений, представляющих собой симметричные характеристические функции. Используем снова метод усиленно монотонных операторов [13]. Определим оператор

$$\mathbf{A}: \ (\mathbf{A})(t) = 2g^2(t/2) - 1.$$

Обозначим $\mathcal{E}_+$ множество неотрицательных непрерывных функций в интервале $[0,T]$ для некоторого фиксированного $T > 0$ такого, что $g(t)$ не имеет нулей в $[-T,T]$. Нетрудно убедиться, что $\mathcal{A}$ является усиленно монотонным оператором, действующим из $\mathcal{E}_+$ в пространство всех непрерывных функций на $[0,T]$.

Рассмотрим семейство $\{\varphi(at), \ a > 0\}$, где $\varphi(t) = \cos t$. В соответствии с Примером 1.3.1 из [13] это семейство является строго $\mathcal{E}_+$-положительным. Требуемое вытекает теперь из Теоремы 1.1.1 книги [13]. □

Следующая теорема дает несколько более общий результат.

Теорема 4.2. *Пусть* X *– случайная величина с симметричным распределением, а* $n \geqslant 2$ *- натуральное число. Рассмотрим* n *независимых копий величины* X, *обозначив их* $X_1, \dots, X_n$. *Предположим, что случайная величина* ε_n *не зависит от* $X_1, \dots, X_n$ *и в случае нечетного* n *принимает значения* $0, 2, \dots, n-1$ *с вероятностями*

$$\mathbb{P}\{\varepsilon_n = n-k\} = \frac{1}{2^{n-1}}\binom{n}{k}, \ k = 0, \dots, (n-1)/2.$$

В случае когда n *четное* ε_n *принимает значения* $0, 2, \dots, n-2$ *с вероятностями*

$$\mathbb{P}\{\varepsilon_n = n\} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2} + \frac{1}{2^{n-1}},$$
$$\mathbb{P}\{\varepsilon_n = n-2k\} = \frac{1}{2^{n-1}}\binom{n}{k},\ k = 1, \dots, n/2-1.$$

Соотношение

$$\varepsilon_n X_1 \stackrel{d}{=} X_1 + X_2 + \ldots + X_n \tag{4.3}$$

справедливо тогда и только тогда, когда X *принимает два значения* a *и* $-a$ *(a>0) с равными вероятностями.*

Доказательство. Уравнение (4.3) в терминах характеристических функций принимает вид

$$f^n(t) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{(n-1)/2}\binom{n}{k} f((n-2*k)t) \text{ для нечетных } n, \tag{4.4}$$

и

$$f^n(t) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n/2-1}\binom{n}{k} f((n-2*k)t) + \frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2} \text{ для четных } n. \tag{4.5}$$

Оба уравнения (4.4) и (4.5) могут быть решены с помощью метода усиленно монотонных операторов вполне аналогично тому, как это было сделано в доказательстве Теоремы 4.1. Мы опускаем детали. □

§5. Характеризация двух-точечного распределения свойством независимости форм со случайными коэффициентами

Теорема 5.1. *Пусть* X_1, X_2 *независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие симметричное распределение. Предположим, что случайная величина* ε *имеет распределение Бернулли с параметром* $1/2$ *и независящая от* X_1, X_2*. Определим линейные формы*

$$L_1 = \varepsilon X_1 + (1-\varepsilon)X_2 \text{ и } L_2 = \varepsilon X_1 - (1-\varepsilon)X_2.$$

Формы L_1 *и* L_2 *стохастически независимы тогда и только тогда, когда* X_1 *принимает только два значения* a *и* $-a$ *(для некоторого* $a > 0$*) с равными вероятностями.*

Доказательство. Вычислим совместную характеристическую функцию форм L_1 и L_2. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\exp\{isL_1+itL_2\} &= \mathbb{E}\exp\{i(s+t)\varepsilon X_1+i(s-t)(1-\varepsilon)X_2\}\\ &= \frac{1}{2}\big(f(s+t)+f(s-t)\big).\end{aligned}$$

Независимость форм эквивалентна справедливости уравнения

$$\frac{1}{2}\big(f(s+t)+f(s-t)\big)=f(s)f(t) \tag{5.1}$$

для всех s,t.

Легко видеть, что $f(t)=\cos(at)$ является решением (5.1). Для того чтобы убедиться, что других решений нет, достаточно подставить $t=s$ в (5.1) и применить Теорему 4.1. □

§6. Характеризация равномерного распределения

Несколько неожиданной представляется возможность охарактеризовать равномерное распределение свойствами линейных форм со случайными коэффициентами. Именно, справедлив следующий результат.

Теорема 6.1. *Пусть X_1,X_2,X_3 независимые копии невырожденной случайной величины X, имеющей симметричное распределение. Пусть ξ – случайная величина, не зависящая от X_1,X_2,X_3 и принимающая только два значения $1/2$ и 1 с вероятностью $1/2$ каждое. При этих предположениях линейные формы*

$$L_1=\xi X_1+\frac{1}{4}(X_2+X_3) \text{ и } L_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2+X_3)$$

одинаково распределены тогда и только тогда, когда X имеет равномерное распределение на интервале $(-A,A)$ для некоторого $A>0$.

Доказательство. Свойство равной распределенности форм в терминах характеристических функций записывается как

$$\frac{1}{2}\Big(f(t)+f(t/2)\Big)f^2(t/4)=f^3(t/2). \tag{6.1}$$

Легко убедиться, что функция $g(t)=\sin(At)/(At)$ является решением уравнения (6.1) для любого $A>0$. Для завершения доказательства достаточно показать, что (6.1) не имеет других решений.

Введем функцию

$$\mathcal{K}(t)=\frac{f(t)}{f(t/2)},$$

которая определена в некоторой окрестности нуля. Она удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{K}(t) = 2\mathcal{K}^2(t/2) - 1 \text{ при всех } t. \tag{6.2}$$

Хотя изначально $\mathcal{K}(t)$ определена только в некоторой окрестности нуля, соотношение (6.2) позволяет продолжить ее на всю вещественную ось. Заметим, что (6.2) совпадает с (4.2), однако мы не можем применить Теорему 4.1, так как $\mathcal{K}(t)$ не обязана быть характеристической функцией[1]. Тем не менее, мы можем применить метод усиленно монотонных операторов.

Функция $\cos(At)$ является решением (6.2) при любом $A > 0$. Из вида функции $\mathcal{K}(t)$ и того факта, что $f(t)$ является характеристической функцией ясно, что существует точка $t_o > 0$ в которой $0 < \mathcal{K}(t_o) < 1$. А тогда можно выбрать положительное A, зависящее от t_o и такое, что $\mathcal{K}(t_o) = \cos(At_o/2)$. Подставляя значение t_o (6.2) видим, что $\mathcal{K}(t_o/2) = \cos(At_o/4)$. Действуя так, по индукции находим, что

$$\mathcal{K}(t_o/2^j) = \cos\frac{At_o}{2^{j+1}},\ j = 0, 1, \dots. \tag{6.3}$$

Однако, $\mathcal{K}(t) = f(t)/f(t/2)$ при всех t. Поэтому

$$f(t_o/2^j) = \cos\frac{At_o}{2^{j+1}} f(t_o/2^{j+2}) = \prod_{k=1}^{\infty}\cos\frac{At_o}{2^{j+k}} = \frac{\sin(At_o/2^j)}{At_o/2^j}, \tag{6.4}$$

для $j = 1, 2, \dots$. Таким образом, характеристическая функция $f(t)$ совпадает с аналитической характеристической функцией $\sin(t)/t$ на некоторой последовательности точек $t_j = t_o/2^j$, сгущающейся к нулю. По теореме Ю. В. Линника [17] (см., также [13]) эти характеристические функции совпадают всюду. □

§7. Еще одна характеризация

В разделе 6 была приведена характеризация симметричного равномерного распределения, имеющего (в стандартизованном виде) характеристическую функцию $\sin(t)/t$. Здесь мы приведем сходный результат для распределения с характеристической функцией $f(t) = t/\operatorname{sh}(t)$.

---

[1]Однако, если окажется, что наша теорема верна, то мы увидим, что $\mathcal{K}(t) = \cos(t/2)$, т.е. $\mathcal{K}(t)$ действительно характеристическая функция.

Соответствующая ей случайная величина имеет плотность распределения

$$p(x) = \frac{\pi}{4\,\mathrm{ch}^2(\pi x/2)}, \ x \in \mathbb{R}^1. \tag{7.1}$$

Теорема 7.1. *Пусть X_1, X_2, X_3 независимые копии невырожденной случайной величины X, имеющей симметричное распределение. Пусть ξ – случайная величина, не зависящая от X_1, X_2, X_3 и принимающая только два значения $1/2$ и 1 с вероятностью $1/2$ каждое. При этих предположениях линейные формы*

$$L_1 = \xi X_1 + \frac{1}{2}(X_2 + X_3) \text{ и } L_2 = X_1 + \frac{1}{4}(X_2 + X_3)$$

одинаково распределены тогда и только тогда, когда X имеет плотность вида $p(x/a)/a$, $a > 0$, где $p(x)$ определена равенством (7.1).

Доказательство. Основная идея та же самая, что и в Теореме 6.1. Мы опускаем все детали. □

Список литературы

1. С. Н. Бернштейн, *Об одном свойстве, характеризующем закон Гаусса.* — Тр. Ленинград. политехн. ин-та **3** (1941), 21–22.
2. G. Darmois, *Analyse générale des liaisons stochastiques.* — Rev. Inst. Intern. Stat. **30**, No. 1 (1953), 2–8.
3. В. П. Скитович, *Об одном свойстве нормального распределения.* — ДАН СССР **89**, No. 2 (1953), 217–219.
4. S. G. Ghurye, I. Olkin, *A characterization of the multivariate normal distribution.* — Ann. Math. Stat. **33**, No. 2 (1962), 533–541.
5. А. А. Зингер, *О характеризации многомерного нормального закона независимостью линейных статистик.* — Теор. вероятн. и ее примен. **24**, No. (1979), 381–385.
6. И. А. Ибрагимов, *О теореме Скитовича–Дармуа–Рамачандрана.* — Теор. вероятн. и ее примен. **57**, No. 3 (2012), 418–426.
7. А. Рухин, *Об одной теореме С. Н. Бернштейна.* — Матем. заметки **6**, No. 3 (1969), 301–307.
8. G. M. Feldman, *Bernstein Gaussian distributions on groups.* — Theory Probab. Appl. **31** (1986), 40–49.
9. G. M. Feldman, P. Graczyk, *On the Skitovich–Darmois theorem on compact Abelian groups.* — J. of Theoret. Probab. **13**, No. 3.
10. G. M. Feldman, *Functional equations and characterization problems on locally compact Abelian groups.* — EMS Tracts in Mathematics, **5**, Zurich. European Mathematical Society (EMS), (2008), 268 pp.
11. А. А. Зингер, Ю. В. Линник, *Нелинейные статистики и случайные линейные формы.* — Труды Мат. ин-та им. Стеклова АН СССР **111** (1970).

12. D. Polya, *Herleitung des Gauss'schen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung.* — Math. Zeitschrift **18** (1923), 185–188.
13. A. V. Kakosyan, L. B. Klebanov, J. A. Melamed, *Characterization of Distributions by the Method of Intensively Monotone Operators.* — Lect. Notes Math. **1088** (1984), Springer–Verlag, 175 pp.
14. L. B. Klebanov, A. V. Kakosyan, S. T. Rachev, G. Temnov, *On a Class of Distributions Stable Under Random Summation.* — J. Appl. Prob. **49** (2012), 303–318.
15. R. G. Laha, E. Lukacs, *On a Problem Connected With Quadratic Regression.* — Biometrika **47** (1960), 335–343.
16. J. Pusz, *A Regression Characterization of the Meisner Hypergeometric Distribution.* — Austral. J. Statist. **37**, No. 1 (1995), 83–87.
17. Ю. В. Линник, *Разложения вероятностных законов.* — Изд-во Ленингр. ун-та, (1960), 263 с.

Klebanov L. B. Characterization of probability distributions by the properties of linear forms with random coefficients.

Some distributions are characterized both by the property of the identical distribution of linear forms with random coefficients and by the property of independence of these statistics.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики, Карлов университет, Прага, Чешская республика

E-mail: levbkl@gmail.com

Поступило 13 сентября 2021 г.