Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 501, 2021 г.

Ю. А. Давыдов

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ “СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕТОВ”

§1. Введение

Случайные полеты – это интересный класс случайных блужданий в случайной среде, они описывают поведение частицы, которая движется в $\mathbb{R}^d$ следующим образом. Имеются две независимые последовательности случайных величин (T_k),(θ_k), причем величины T_k положительны и для всех k $T_k \leqslant T_{k+1}$, а d-мерные величины θ_k независимы и одинаково распределены. Величины $\frac{\theta_k}{|\theta_k|}$ интерпретируются как направления, а T_k – как моменты смены направлений.

Частица стартует из начала координат и движется в направлении θ_1 до момента T_1 с постоянной скоростью $|\theta_1|$. Затем она меняет направление на θ_2 и движется по нему в течение времени T_2-T_1 со скоростью $|\theta_2|$, и т.д. Пусть $X(t)$, – положение частицы в момент времени t. Понятно, что для $t \in [T_n, T_{n+1}]$

$$X(t) = \sum_1^n \theta_k[T_k - T_{k-1}] + \theta_{n+1}[t - T_n].$$

Процессы такого типа привлекали внимание с давних пор. Работа Pearson (1905) [7], вероятно, была первой, она была продолжена Kluyer (1906) [4] и Rayleigh (1919) [8]. Mandelbrot (1982) [5] рассматривал случай, когда приращения $T_n - T_{n-1}$ независимы, одинаково распределены и имеют тяжелые хвосты. Он ввел в оборот термин “Levy flights”, который позже трансформировался в “Random flights”.

Следует также упомянуть работы Высоцкого [9, 10], где рассматривалась несколько иная модель: моменты поворотов частицы определялись ее столкновением с шарами, распределенными в пространстве в соответствии с однородным пуассоновским процессом, а движение между поворотами было не равномерным, а ускоренным.

Ключевые слова: случайные полеты, случайные блуждания в случайной среде, предельное поведение.

В последние годы появился ряд работ (подробную библиографию можно найти в Orsingher and Garra (2014), [6]), в которых при различных предположениях относительно (T_k) были найдены явные формулы для распределения $X(t)$. Давыдов и Конаков (2017), [2], получили первые результаты о глобальном поведении процесса $X = \{X(t),\ t \in R_+\}$, а именно, они интересовались условиями, при которых процессы $\{Y_T,\ T > 0\}$,

$$Y_T(t) = \frac{1}{B_T} X(tT), \ \ t \in [0,1], \tag{1}$$

при подходящей нормировке B_T сходятся слабо в $\mathbb{C}^d[0,1]$: $Y_T \Longrightarrow Y$, $B_T \longrightarrow \infty$, $T \longrightarrow \infty$.

В их работе предполагалось, что моменты поворотов (T_k), $T_k \leqslant T_{k+1}$, имеют вид $T_k = f(V_k)$, где (V_k) – последовательные точки скачков однородного пуассоновского процесса на R_+.

Понятно, что если $f(t) \equiv t$, то процесс $X(t)$ будет в этом случае фактически стандартным случайным блужданием, поскольку спейсинги $T_{k+1} - T_k$ независимы, и тогда в пределе мы получим процесс броуновского движения.

В неоднородном случае спейсинги перестают быть независимыми и ситуация становится более сложной. Тем не менее, в [2] удалось показать, что в зависимости от скорости роста функции f можно выделить три существенно различных типа предельных процессов, которые можно охарактеризовать следующим образом.

Если функция f имеет степенной рост,

$$f(t) = t^{\alpha},\ \alpha > 1/2,$$

то поведение нашего процесса аналогично тому, что происходит при $f(t) = t$ и в пределе мы приходим к гауссовскому процессу, который получается из процесса броуновского движения заменой времени

$$Y(t) = C(\alpha) W(h(s));$$

точный вид нормировочной константы и замены времени будет дан ниже.

В случае экспоненциального роста,

$$f(t) = e^{t\beta},\ \beta > 0,$$

предельный процесс оказывается кусочно линейным с бесконечным числом звеньев, сгущающихся к нулю.

Наконец, при сверх-экспоненциальном росте f, предельный процесс вырождается в случайную линейную функцию:

$$Y(t) = \theta t, \quad t \in [0,1], \quad \theta \stackrel{Law}{=} \theta_1.$$

Целью данной работы является показать, что указанные три типа сходимости сохраняются при гораздо более широких предположениях о последовательности (V_n). А именно, мы будем считать, что $T_k = f(V_k)$, а (V_k) имеют вид: $V_n = \sum\limits_1^n \xi_k$, где (ξ_k), – строго стационарная последовательность.

Говоря более точно, мы будем предполагать, что выполнены следующие условия:

H1. (θ_k) – последовательность независимых одинаково распределенных случайных d-мерных векторов, $|\theta_k| > 0$ п.н.

H2. $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ – строго стационарная эргодическая последовательность, $\xi_k > 0$ п.н., $a := \mathbf{E}\xi < \infty$, $V_n = \sum\limits_1^n \xi_k$.

H3. Последовательности (θ_k) и (ξ_k) независимы.

Несколько слов об обозначениях.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – основное вероятностное пространство.
$\mathbb{R}^d$ – d-мерное евклидово пространство с борелевской σ-алгеброй.
$\mathcal{M}$ – σ-алгебра, порожденная величинами (ξ_k).
$\mathbb{C}^d[0,1]$ – банахово пространство непрерывных функций на $[0,1]$ со значениями в $\mathbb{R}^d$.
$\Longrightarrow$ – знак слабой сходимости распределений в $\mathbb{C}^d[0,1]$.
$\xrightarrow{P}$ – знак сходимости по вероятности.
W – стандартный процесс броуновского движения в $\mathbb{R}^d$ на $[0,1]$.
W_K – процесс броуновского движения в в $\mathbb{R}^d$, для которого $W_K(1)$ имеет матрицу ковариаций K.
C – обозначение для абсолютных констант.

§2. Сверхэкспоненциальный рост

Мы начнем с технически самого простого случая, когда функция f имеет сверх-экспоненциальный рост. Это означает, что для любого $h > 0$ при $t \to \infty$

$$\frac{f(t+h)}{f(t)} \to \infty. \tag{2}$$

Так как при $T = T_n$ траектория $Y_T(t)$ имеет целое число полных сегментов на интервале $[0,1]$, то будет удобней следить за поведением процесса $Y_T(t)$ по этой последовательности моментов, так что в дальнейшем будет использоваться обозначение

$$Y_n(t) = Y_{T_n}(t).$$

Итак, типичная траектория $\{Y_n(t), t \in [0,1]\}$ это непрерывная кусочно-линейная фунция с вершинами в точках $\{(t_{n,k}, \frac{S_k}{B_n}),\ k = 0,1,\ldots,n\}$, где $t_{n,k} = \frac{T_k}{T_n}$, $T_0 = 0$, $B_n = B_{T_n}$, $S_k = \sum\limits_1^k \theta_i(T_i - T_{i-1})$.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* **H1 − H3**. *Предположим также, что*

1. f *неотрицательная возрастающая функция, удовлетворяющая условию* (2).
2. $\mathbf{E}|\theta_1| < \infty$
3. $B_n = T_n$.

Тогда $Y_n \Longrightarrow Y$, *где*

$$Y(t) = \theta_1 t, \quad t \in [0,1].$$

Доказательство. Заметим сначала, что из (2) и условия 2) теоремы следует сходимость по вероятности

$$\frac{T_{n-1}}{T_n} \xrightarrow{P} 0. \tag{3}$$

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$. Так как f не убывает, то

$$\begin{aligned}\gamma_n := \mathbb{P}\left\{\frac{T_{n-1}}{T_n} > \varepsilon\right\} &\leqslant \mathbb{P}\{\xi_n < \delta\} + \mathbb{P}\left\{\frac{f(V_{n-1})}{f(V_n)} > \varepsilon,\ \xi_n \geqslant \delta\right\}\\ &\leqslant \mathbb{P}\{\xi_1 < \delta\} + \mathbb{P}\left\{\frac{f(V_{n-1})}{f(V_{n-1}+\delta)} > \varepsilon\right\}.\end{aligned}$$

В силу (2) и УЗБЧ для (ξ_k), с вероятностью 1 $\frac{f(V_{n-1})}{f(V_{n-1}+\delta)} \to 0$, так что второе слагаемое сходится к нулю при $n \to \infty$.

Поэтому

$$\limsup_n \gamma_n \leqslant \mathbb{P}\{\xi_1 < \delta\}.$$

В силу произвольности $\delta > 0$, $\lim_n \gamma_n = 0$, ч.т.д.

Покажем теперь, что

$$M_n := \sup_{t\in[0,\, t_{n,n-1}]} \{|Y_n(t)|\} \xrightarrow{P} 0. \tag{4}$$

Пусть $\mathcal{M}$ – σ-алгебра, порожденная всеми величинами (V_k). Так как

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{1}^{n-1} |\theta_i|(T_i - T_{i-1}) > \delta T_n \mid \mathcal{M}\right\} \leqslant \frac{\mathbf{E}|\theta_1|}{\delta T_n}\sum_{1}^{n-1}(T_i - T_{i-1}) = \frac{T_{n-1}}{T_n}\frac{\mathbf{E}|\theta_1|}{\delta},$$

то

$$\mathbb{P}\{M_n > \delta\} \leqslant \frac{\mathbf{E}|\theta_1|}{\delta}\mathbf{E}\left\{\frac{T_{n-1}}{T_n}\right\}.$$

Правая часть последнего неравенства в силу (3) и теоремы Лебега стремится к нулю при $n \to \infty$, что дает (4).

По определению,

$$Z_n(1) = \frac{1}{T_n}[S_{n-1} + \theta_n(T_n - T_{n-1})] = \theta_n + \frac{S_{n-1}}{T_n} - \frac{T_{n-1}}{T_n}\theta_n.$$

Так как $\frac{T_{n-1}}{T_n} \xrightarrow{P} 0$ и в силу (4)

$$\frac{S_{n-1}}{T_n} \leqslant M_n \xrightarrow{P} 0,$$

то мы получаем слабую сходимость $Z_n(1) \Rightarrow \theta_1$, что вместе с (4) доказывает теорему. □

§3. Экспоненциальный рост

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия* **H1** – **H3**. *Предположим также, что* $\mathbf{E}|\theta_1| < \infty$, *а функция* f *теперь такова:* $f(t) = e^{t\beta}$, $\beta > 0$; *как и ранее,* $B_n = T_n$.

Тогда

$$Y_n \Longrightarrow Y,$$

где Y *– непрерывный кусочно-линейный процесс, траектории которого имеют вершины в точках* $(t_k, Y(t_k))$,

$$t_k = e^{-\beta V_{k-1}}, \quad V_0 = 0,$$

$$Y(t_k) = \sum_{i=k}^{\infty} \theta_k(e^{-\beta V_{i-1}} - e^{-\beta V_i}), \quad Y(0) = 0.$$

Замечание 1. Можно описать предельный процесс Y иначе:

Рассмотрим точечный процесс $\mathbf{T} = (t_k)$, $t_k = e^{-\beta V_{k-1}}$, на $(0,1]$, и определим процесс $\{Z(t),\, t \in (0,1]\}$, равенством

$$Z(t) = \theta_k \quad \text{при} \ \ t \in (t_{k+1}, t_k].$$

Тогда

$$Y(t) = \int\limits_0^t Z(s)\,\mathrm{d}s.$$

Доказательство. Для простоты будем считать, что $\beta = 1$, в общем случае все выкладки аналогичны.

По условию, $t_{n,k} := \frac{T_k}{T_n} = e^{-(V_n - V_k)} = e^{-(\xi_{k+1}+\dots+\xi_n)}$, и

$$X_n\,(t_{n,k}) = \sum_{i=1}^{k} \theta_i (e^{-(\xi_{i+1}+\dots+\xi_n)} - e^{-(\xi_i+\dots+\xi_n)}), \quad k = 1,\dots,n.$$

Удобно представить процесс X_n в виде:

$$X_n(t) = \int\limits_0^t L_n(s)ds,$$

где L_n – ступенчатый процесс со значением θ_i на интервале $(t_{n,i-1}, t_{n,i}]$. Так как процесс X_n полностью определяется двумя независимыми векторами $(\theta_1,\dots,\theta_n)$ и $(\xi_1,\dots,\xi_n)$, и так как их совместное распределение не меняется при замене первого на $(\theta_n,\dots,\theta_1)$, а второго – на $(\xi_{-n+1},\dots,\xi_0)$, то $(X_n(\cdot)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Y_n(\cdot))$, где

$$Y_n(t) = \int\limits_0^t M_n(s)ds,$$

а M_n – ступенчатый процесс со значением θ_j на интервале $(\tau_j, \tau_{j-1}]$; $\tau_j = e^{-(\xi_{1-j}+\dots+\xi_0)}$, $j = 0,1,\dots,n-1$ и со значением θ_n на интервале $[0, e^{-(\xi_{1-n}+\dots+\xi_0)}]$.

Сравним теперь процесс Y_n с процессом Y,

$$Y(t) = \int\limits_0^t M(s)ds, \ \ t \in [0,1],$$

где M – ступенчатый процесс со значением θ_j на интервале $(\tau_j, \tau_{j-1}]$, $j = 0, 1, \ldots$.

Так как

$$\Delta_n := \sup_t |Y_n(t) - Y(t)| \leqslant |\theta_1|\tau_{n-1} + \sum_{i=n}^{\infty} |\theta_i|(\tau_{i-1} - \tau_i),$$

то для любого $\delta > 0$ при $n \to \infty$

$$\mathbb{P}\{\Delta_n > \delta\} \leqslant \frac{2\mathbf{E}|\theta_1|}{\delta} e^{-\tau_{n-1}} \longrightarrow 0.$$

Тем самым, Y_n сходится по вероятности в $\mathbb{C}^d[0,1]$ к Y, что влечет слабую сходимость X_n к Y. □

Замечание 2. Если $\beta \neq 1$, то достаточно заменить e^{-V_k} на $e^{-\frac{V_k}{\beta}}$.

§4. Степенной рост

При степенном росте, в отличие от двух предыдущих случаев, удается проследить за поведением процесса Y_T по всей временной шкале.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия* **H1** – **H3**. *Предположим также, что*

1. *Функция f имеет вид $f(t) = t^\alpha$, $\alpha > 1/2$.*
2. $\mathbf{E}|\theta_1|^2 < \infty$, $\mathbf{E}\theta_1 = 0$, *K – матрица ковариаций θ_1.*
3. *Нормирующие константы определяются равенством*

$$B_T^2 = \frac{b^2}{2\alpha - 1} T^{2\alpha-1}, \quad b = \alpha a^\alpha.$$

Тогда при $T \to \infty$

$$Y_T \Longrightarrow Y,$$

где $Y(t) = W_K(t^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}})$, а W_K – процесс броуновского движения, у которого матрица ковариаций вектора $W_K(1)$ равна K.

Сначала мы изучим поведение Y_T по подпоследовательности $T = T_n$.

Лемма 1. *Предположим, что случайные d-мерные вектора (θ_k) независимы, одинаково распределены, имеют вторые моменты и* $\mathbf{E}\theta_k = 0$. *Обозначим через K матрицу ковариаций величин θ_k. Пусть (b_k), – монотонная последовательность положительных чисел, причем $b_0 = 0$, $b_k \sim bk^\gamma$, $\gamma > -1/2$.*

Положим $S_0 = 0$, $S_n = \sum\limits_1^n \theta_k b_k$; $B_n^2 = \sum\limits_1^n b_k^2$; $\tau_{n,k} = \frac{B_k^2}{B_n^2}$, *и рассмотрим случайные непрерывные кусочно-линейные процессы* $\{Z_n(t)\}$ *на* $[0,1]$ *с вершинами в точках* $(\tau_{n,k}, \frac{S_k}{B_n})$.

Тогда

$$Z_n \Longrightarrow W_K,$$

где W_K *– процесс броуновского движения, у которого матрица ковариаций вектора* $W_K(1)$ *равна* K.

Доказательство леммы 1. Поскольку приращения процессов Z_n асимптотически независимы, то достаточно показать, что для любого $x \in \mathbb{R}^d$ одномерные процессы $\{Z_{n,x}\}$, $Z_{n,x}(t) = \langle Z_n(t), x\rangle$ слабо сходятся к $\langle W_K(t), x\rangle$.

Понятно, что

$$B_n^2 \sim \frac{b^2}{2\gamma+1} n^{2\gamma+1} \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Поскольку для схемы серий

$$\left\{\eta_{n,k} = \frac{\langle \theta_k, x\rangle b_k}{B_n}, \ \ k = 0, 1, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

выполнено условие Линдеберга: для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n &\mathbf{E}\eta_{n,k}^2 \mathbf{I}_{\{|\eta_{n,k}|>\varepsilon\}} \\ &= \sum_1^n \frac{b_k^2}{B_n^2} \mathbf{E}[\langle \theta_k, x\rangle^2 \mathbf{I}_{\{|\langle \theta_k, x\rangle| > \varepsilon \frac{B_n}{b_k}\}}] \\ &\leqslant \mathbf{E}\langle \theta_1, x\rangle^2 \mathbf{I}_{\{|\langle \theta_1, x\rangle| > \varepsilon \frac{1}{\delta_n}\}} \to 0,\end{aligned}$$

то по теореме Прохорова (см. Gikhman and Skorohod (1996), ch. IX, sec. 3, Th.1) имеем сходимость $Z_{n,x} \Longrightarrow (\mathbf{E}\langle \theta_1, x\rangle^2)^{\frac{1}{2}} W = \langle Kx, x\rangle^{\frac{1}{2}} W$, где W – стандартное броуновское движение. Так как процессы $\langle Kx, x\rangle^{\frac{1}{2}} W$ и W_K имеют одинаковое распределение, то получаем требуемый результат. □

Доказательство теоремы 3. Пусть, как и ранее, $Y_n = Y_{T_n}$, а $\mathcal{M}$ – σ-алгебра, порожденная всеми величинами (V_k). Зафиксируем $x \in \mathbb{R}^d$ и рассмотрим предельное поведение процесса $\langle Y_n(\cdot), x\rangle$ при условии $\mathcal{M}$. Тогда последовательность (V_k) становится фиксированной и такой, что для почти всех ω $f(V_k) \sim (ak)^\alpha$. Поэтому можно воспользоваться Леммой 1. Беря

$$b_k = T_k - T_{k-1} \sim bk^\gamma,\ b = \alpha a^\alpha;\ \gamma = \alpha - 1;\ B_n^2 \sim \frac{b^2}{2\gamma+1} n^{2\gamma+1},$$

получим, что для почти всех $\omega \in \Omega$, случайные ломаные Z_n с вершинами в точках $\left(\tau_{n,k}, \frac{S_k}{B_n}\right)$, где $\tau_{n,k} = \frac{B_k^2}{B_n^2}$, $S_k = \sum\limits_1^k \theta_i(T_i - T_{i-1})$, сходятся слабо к W_K.

Так как предельный процесс один и тот же для всех этих ω, то будет иметь место и безусловная сходимость $Z_n \Longrightarrow W_K$.

Пусть $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$, – кусочно линейная непрерывная функция и такая, что $f_n(t_{n,k}) = \tau_{n,k}$. Из определения процессов Z_n и Y_n следует, что

$$Y_n(t_{n,k}) = Z_n(f_n(t_{n,k}).)$$

Легко видеть, что f_n поточечно сходится к f, $f(t) = t^{\frac{2\gamma+1}{\gamma+1}}$, но так как f, f_n монотонно неубывают и $f_n(0) = f(0)$, $f_n(1) = f(1)$, то f_n сходится к f и равномерно. Поэтому отображения

$$F_n\colon \mathbb{C}^d[0,1] \to \mathbb{C}^d[0,1], \quad F_n(x)(t) = x(f_n(t)), \quad t \in [0,1],$$

удовлетворяют условию Теоремы 4.4 из [1], благодаря которой из сходимости $Z_n \Longrightarrow W_K$ следует сходимость $Y_n \Longrightarrow Y$.

Окончание доказательства. Как и ранее, рассмотрим процесс Y_T при условии, что последовательность (V_n) фиксирована и такова, что $\frac{V_n}{n} \to a$. Для $T_{n-1} \leqslant T < T_n$ имеем

$$|Y_n(s) - Y_T(s)| \leqslant \Delta_1(s) + \Delta_2(s),$$

где

$$\Delta_1(s) = \left|\frac{1}{B_n} Y(T_n s) - \frac{1}{B_n} Y(Ts)\right| = \frac{1}{B_n}|Y(T_n s) - Y(Ts)|,$$

а

$$\Delta_2(s) = \left|\frac{1}{T} - \frac{1}{T_n}\right| |Y(Ts)| \leqslant \frac{|T_n - T_{n-1}|}{T_n T_{n-1}} |Y(Ts)|.$$

Очевидно,

$$\sup_{s\in[0,1]} \Delta_2(s) \leqslant \sup_{s\in[0,1]} |Y_n(s)| \left(\frac{T_n}{T_{n-1}} - 1\right).$$

Так как в силу предыдущего

$$\sup_{s\in[0,1]} |Y_n(s)| \Longrightarrow \sup_{s\in[0,1]} |Y(s)|,$$

а $\frac{T_n}{T_{n-1}} \to 1$, то при $n \to \infty$

$$\sup_{s\in[0,1]} \Delta_2(s) \xrightarrow{P} 0. \tag{5}$$

Оценим Δ_1. Обозначим ω_n модуль непрерывности процесса Y_n. Из сходимости $Y_n \Longrightarrow Y$ следует, что для любого $h > 0 \quad \omega_n(h) \xrightarrow{P} 0$.

Полагая $\beta_n = 1 - \frac{T_{n-1}}{T_n}$, получим, что

$$\sup_{s\in[0,1]} \Delta_1(s) = \sup_{s\in[0,1]} \left| Y_n(s) - Y_n\left(s\frac{T}{T_n}\right)\right| \leqslant \omega_n(\beta_n).$$

Так как $\beta_n \to 0$ п.н., то отсюда следует сходимость

$$\sup_{s\in[0,1]} \Delta_1(s) \xrightarrow{P} 0. \tag{6}$$

Из (5), (6) следует сходимость

$$\sup_{s\in[0,1]} \{|Y_n(s) - Y_T(s)|\} \xrightarrow{P} 0,$$

что дает

$$Y_T \Longrightarrow Y.$$

Напомним, что эта сходимость имеет место при фиксированной последовательности (V_n), но так как для почти всех $\omega \in \Omega$ предельный процесс один и тот же, то имеет место и безусловная сходимость.

Теорема 3 доказана. □

Благодарности

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить М. А. Лифшица за интерес к работе и полезные обсуждения.

Список литературы

1. P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, John Wiley and Sons, N-Y, 1968.
2. Yu. Davydov and V. Konakov, *Random walks in non homogeneous Poisson environment.* — in: Modern problems of stochastic analysis and statistics - Selected contributions in honor of V. Konakov, Heidelberg: Springer, **208**, (2017), 3–24.

3. I. I. Gikhman and A. V. Skorohod, *Introduction to the theory of random processes,* Dover Publications, 1996.
4. J. C. Kluyver, *A local probability problem.* — in: Proceedings of the Section of Sciences, Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, **8**, (1905), 341–350.
5. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of Nature,* N-Y, 1982.
6. E. Orsingher, R. Garra, *Random flights governed by Klein-Gordon type partial differential equations.* — Stoch. Proc. and Appl., **124** (2014), 2171–2187.
7. K. Pearson, *The problem of the Random Walk.* — Nature, **72**, vol. 1865, (1905), 294.
8. L. Rayleigh, *On the problem of the random flights and of random vibrations in one, two and three dimensions.* — Philosophical Magazine, **37**, (1919), 321–347.
9. V. V. Vysotsky, *A limit theorem for the position of a particle in the Lorentz model.* — J. Math. Sci. (N. Y.), **139**, No. 3, (2006), 6520–6534.
10. V. V. Vysotsky, *A functional limit theorem for the position of a particle in a Lorentz type model.* – Markov Processes and Related Fields, **12**, 4, (2007), 767–790.

Davydov Yu. A. Limit theorems for “random flights.”

The article discusses the asymptotic behavior of a particle performing so-called “random flight”. In a recent work by Davydov–Konakov (2017), when the moments T_k of changing the direction of the particle form an inhomogeneous Poisson process, it was shown that, depending on the nature of the inhomogeneity, three variants of the limiting distribution arise naturally for the zoomed particle trajectory. The purpose of this work is to show that these three options are preserved under much more general assumptions about the sequence (T_k).

С.-Петербургский
государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия
Université de Lille
E-mail: youri.davydov@univ-lille.fr

Поступило 25 июня 2021 г.