Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 501, 2021 г.

А. Н. Бородин

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СКОШЕННОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМ СНОСОМ

Скошенному броуновскому движению посвящено много работ. Впервые этот процесс был описан в монографии К. Ито и Г. Маккина [1].

Нас интересует результат, позволяющий вычислять распределения интегральных функционалов по пространственной переменной от локального времени скошенного броуновского движения с разрывным сносом. Для броуновского локального времени такой результат подробно изложен в § 5 гл. V из [2]. Отправной точкой для данного утверждения служит описание Рэя – Найта броуновского локального времени по пространственной переменной как марковского процесса (см. [3, 4]).

Распределения интегральных функционалов от локального времени диффузии с кусочно постоянным сносом вида

$$\eta\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) + \mu\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

и коэффициентом диффузии 1 изучались в работе [5]. Этот процесс в [5] был назван броуновским движением с разрывным сносом. При $\mu = \eta$ эта диффузия включает в себя броуновское движение с линейным сносом, а при $\eta = -\mu$ она превращается в броуновское движение с переменным сносом, т.е. в диффузию с коэффициентом сноса $\mu \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbf{R}$. Краткая характеристика последнего процесса дана в § 15 приложения 1 из [6], и ему посвящена работа С.-Е. Граверсена и А. Н. Ширяева [7].

Результат, позволяющий вычислять распределения интегральных функционалов по пространственной переменной от локального времени скошенного броуновского движения, был получен в работе [8].

Процесс скошенного броуновского движения с разрывным сносом при определенном сочетании параметров включает в себя все вышеупомянутые процессы.

Ключевые слова: броуновское движение с разрывным сносом, скошенное броуновское движение, локальное время.

Настоящая работа частично поддержана грантом РФФИ 19-01-00356.

§1. Скошенное броуновское движение с разрывным сносом

Обозначим этот процесс $W_\circ^\bullet(t)$, $t \geqslant 0$. Пусть $W_\circ(t)$ – скошенное броуновское движение. Стандартный процесс броуновского движения обозначим $W(t)$.

Производящий оператор процесса $W_\circ^\bullet(t)$, $t \geqslant 0$, имеет вид:

$$\mathcal{G}f = \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2} + \big(\eta \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) + \mu \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\big)\frac{df}{dx}, \quad x \neq 0. \qquad (1.1)$$

Область определения этого оператора – ограниченные непрерывно дифференцируемые за исключением точки 0 функции, удовлетворяющие условию

$$(1-\beta)f'(0-) = \beta f'(0+), \qquad (1.2)$$

где $\beta \in (0,1)$.

Таким образом, $W_\circ^\bullet(t)$, $t \geqslant 0$, – однородный марковский процесс, для которого

$$G_z(x) := \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(W_\circ^\bullet(t) < z)\, dt, \qquad x \in \mathbf{R},$$

– преобразование Лапласа по времени от переходной плотности, при каждом $z \in \mathbf{R}$ является единственным непрерывным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2}G''(x) + \big(\eta \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) + \mu \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\big)G'(x) - \lambda G(x) = 0, \ x \in \mathbf{R} \setminus \{0, z\}, \qquad (1.3)$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda, \qquad (1.4)$$

$$(1-\beta)G'(0-) = \beta G'(0+). \qquad (1.5)$$

Здесь и далее нижний индекс у вероятности и математического ожидания означает начальное состояние скошенного броуновского движения с разрывным сносом или скошенного броуновского движения соответственно.

Задача (1.3)–(1.5), а, следовательно, и сам процесс $W_\circ^\bullet$, обладает свойством антисимметрии: распределения процесса не меняются при трансформации $x \leftrightarrow -x$, $z \leftrightarrow -z$, $\mu \leftrightarrow -\eta$, $\eta \leftrightarrow -\mu$, $\beta \leftrightarrow (1-\beta)$.

Найдем явное решение задачи (1.3)–(1.5). В силу свойства антисимметрии достаточно вычислить функцию $G_z(x)$ при $z > 0, x > 0$ и при $x < 0 < z$.

Решение задачи (1.3)–(1.5) при $z>0$ ищем в виде

$$G_z(x)=\begin{cases}\dfrac{A\lambda}{\sqrt{2\lambda+\mu^2}}\,e^{-\eta x+z(\mu-\sqrt{2\lambda+\mu^2})+x\sqrt{2\lambda+\eta^2}}, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{2\lambda+\mu^2}}\,e^{\mu(z-x)-|x-z|\sqrt{2\lambda+\mu^2}} & \\ \qquad +\dfrac{B\lambda}{\sqrt{2\lambda+\mu^2}}\,e^{\mu(z-x)-(x+z)\sqrt{2\lambda+\mu^2}}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

В этом представлении мы учли, что оно является ограниченным и удовлетворяет уравнению (1.3), а также условию на скачок производной (1.4). Константы A и B можно вычислить из условия непрерывности решения в нуле и условия на скачок в нуле первой производной. Это приводит к системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases}A-B=1,\\ A(1-\beta)(\sqrt{2\lambda+\eta^2}-\eta)+B\beta(\sqrt{2\lambda+\mu^2}+\mu)=\beta(\sqrt{2\lambda+\mu^2}-\mu).\end{cases}$$

Решение имеет вид

$$A=\frac{2\beta\sqrt{2\lambda+\mu^2}}{\beta\mu-(1-\beta)\eta+\beta\sqrt{2\lambda+\mu^2}+(1-\beta)\sqrt{2\lambda+\eta^2}},$$
$$B=A-1=\frac{(1-\beta)\eta-\beta\mu+\beta\sqrt{2\lambda+\mu^2}-(1-\beta)\sqrt{2\lambda+\eta^2}}{\beta\mu-(1-\beta)\eta+\beta\sqrt{2\lambda+\mu^2}+(1-\beta)\sqrt{2\lambda+\eta^2}}.$$

Пусть τ – экспоненциально распределенный с параметром $\lambda>0$ случайный момент времени, не зависящий от диффузии $W_\circ^\bullet(t)$, $t\geqslant 0$, и от скошенного броуновского движения $W_\circ$.

Таким образом, для преобразования Лапласа переходной плотности выводим формулу: при $z>0$

$$\begin{aligned}G_z(x)&=\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(W_\circ^\bullet(\tau)<z)\\ &=\begin{cases}\dfrac{2\lambda\beta\,e^{\mu z-\eta x}e^{x\sqrt{2\lambda+\eta^2}-z\sqrt{2\lambda+\mu^2}}}{\beta\mu-(1-\beta)\eta+\beta\sqrt{2\lambda+\mu^2}+(1-\beta)\sqrt{2\lambda+\eta^2}}, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{\lambda e^{\mu(z-x)}}{\sqrt{2\lambda+\mu^2}}\Big(e^{-|z-x|\sqrt{2\lambda+\eta^2}}-e^{-(x+z)\sqrt{2\lambda+\mu^2}}\Big) & \\ +\dfrac{2\lambda\beta\,e^{\mu(z-x)}e^{-(x+z)\sqrt{2\lambda+\mu^2}}}{\beta\mu-(1-\beta)\eta+\beta\sqrt{2\lambda+\mu^2}+(1-\beta)\sqrt{2\lambda+\eta^2}}, & x\geqslant 0.\end{cases}\end{aligned}\tag{1.6}$$

В представлении функции $G_z(x)$ мы использовали теорему Фубини при τ с плотностью распределения вида $\lambda e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$.

Положим

$$\Delta_{\mu,\eta}(x,z) := \int\limits_x^z \big(\eta \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(y) + \mu \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)\big)dy$$
$$= \begin{cases} \mu(z-x), & x>0, z>0, \\ \mu z - \eta x, & x<0<z. \end{cases}$$

Явное выражение для других аргументов следует из очевидного равенства $\Delta_{\mu,\eta}(x,z) = \Delta_{-\eta,-\mu}(-x,-z)$.

Имеет место абсолютная непрерывность мер: при любом $t>0$

$$\frac{d\mathbf{P}_x^\bullet}{d\mathbf{P}_x^\circ}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\Big(\Delta_{\mu,\eta}(x, W_\circ(t)) - (\beta\mu - (1-\beta)\eta)\,\ell_\circ(t,0)$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \big(\eta^2 \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(W_\circ(s)) + \mu^2 \mathbb{1}_{[0,\infty)}(W_\circ(s))\big)\,ds\Big) \qquad \mathbf{P}_x^\circ\text{-п.н.}, \tag{1.7}$$

где $\mathbf{P}_x^\bullet$ и $\mathbf{P}_x^\circ$ – меры, соответствующие скошенному броуновскому движению с разрывным сносом и скошенному броуновскому движению, $\mathcal{F}_t$ – σ-алгебра, порожденная скошенным броуновским движением до момента t и $\ell_\circ(t,0)$ – локальное время скошенного броуновского движения относительно меры Лебега, т.е.

$$\ell_\circ(t,0) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^t \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(W_\circ(s))\,ds.$$

Поскольку скошенное броуновское движение с разрывным сносом и скошенное броуновское движение являются однородными марковскими процессами, то достаточно доказать аналог (1.7) для переходных плотностей, т.е. следующее равенство:

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(W_\circ^\bullet(t)<z) = e^{\Delta_{\mu,\eta}(x,z)}$$
$$\times\,\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\gamma\ell_\circ(t,0) - \int\limits_0^t \rho(W_\circ(s))\,ds\Big); W_\circ(t)<z\Big\}. \tag{1.8}$$

Здесь и далее для того чтобы упростить формулы, мы используем обозначения $\mathbf{E}\{\xi;A\} := \mathbf{E}\{\xi\mathbb{1}_A\}$, $\gamma := \beta\mu - (1-\beta)\eta$ и

$$\rho(x) := \frac{\eta^2}{2}\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) + \frac{\mu^2}{2}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Мы сначала докажем (1.8), а затем основываясь на этом равенстве докажем (1.7).

Достаточно доказать (1.8) для преобразования Лапласа по времени, т.е. следующее равенство:

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(W_\circ^\bullet(\tau)<z)=e^{\Delta_{\mu,\eta}(x,z)}$$
$$\times\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\gamma\ell_\circ(\tau,0)-\int\limits_0^\tau\rho(W_\circ(s))\,ds\Big);W_\circ(\tau)<z\Big\}. \tag{1.9}$$

Согласно теореме А.2 и замечанию А.2 из [8] функция

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\tau\rho(W_\circ(s))\,ds-\gamma\ell_\circ(\tau,0)\Big);W_\circ(\tau)<z\Big\}$$

при каждом $z\in\mathbf{R}$ является единственным непрерывным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2}G''(x)-(\lambda+\rho(x))G(x)=0,\ x\in\mathbf{R}\setminus\{0,z\}, \tag{1.10}$$
$$G'(z+0)-G'(z-0)=-2\lambda, \tag{1.11}$$
$$(1-\beta)G'(0-)-\beta G'(0+)=-\gamma G(0). \tag{1.12}$$

В силу свойства антисимметрии скошенного броуновского движения решение этой задачи можно рассмотреть лишь при $z>0$.

Решение задачи (1.10)–(1.12) при $z>0$ ищем в виде

$$G_z(x)=\begin{cases}\dfrac{A\lambda}{\sqrt{2\lambda+\mu^2}}\,e^{x\sqrt{2\lambda+\eta^2}-z\sqrt{2\lambda+\mu^2}}, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{2\lambda+\mu^2}}\,e^{-|x-z|\sqrt{2\lambda+\mu^2}} & \\ \qquad+\dfrac{B\lambda}{\sqrt{2\lambda+\mu^2}}\,e^{-(x+z)\sqrt{2\lambda+\mu^2}}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

В этом представлении мы учли, что оно является ограниченным и удовлетворяет уравнению (1.10), а также условию на скачок производной (1.11). Константы A и B можно вычислить из условия непрерывности решения в нуле и условия на скачок в нуле первой производной. Это приводит к системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases}A-B=1,\\ A(1-\beta)\sqrt{2\lambda+\eta^2}-\beta(\sqrt{2\lambda+\mu^2}-B\sqrt{2\lambda+\mu^2})=-\gamma A.\end{cases}$$

Решение имеет вид

$$A = \frac{2\beta\sqrt{2\lambda+\mu^2}}{\gamma+\beta\sqrt{2\lambda+\mu^2}+(1-\beta)\sqrt{2\lambda+\eta^2}},$$

$$B = A-1 = \frac{\beta\sqrt{2\lambda+\mu^2}-\gamma-(1-\beta)\sqrt{2\lambda+\eta^2}}{\gamma+\beta\sqrt{2\lambda+\mu^2}+(1-\beta)\sqrt{2\lambda+\eta^2}}.$$

В итоге имеем

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int_0^\tau \rho(W_\circ(s))\,ds-\gamma\ell_\circ(\tau,0)\Big);W_\circ(\tau)<z\Big\}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2\lambda\beta\, e^{x\sqrt{2\lambda+\eta^2}-z\sqrt{2\lambda+\mu^2}}}{\gamma+\beta\sqrt{2\lambda+\mu^2}+(1-\beta)\sqrt{2\lambda+\eta^2}}, & x\leqslant 0, \\ \dfrac{\lambda}{\sqrt{2\lambda+\mu^2}}\Big(e^{-|z-x|\sqrt{2\lambda+\eta^2}}-e^{-(x+z)\sqrt{2\lambda+\mu^2}}\Big) & \\ \qquad +\dfrac{2\lambda\beta\, e^{-(x+z)\sqrt{2\lambda+\mu^2}}}{\gamma+\beta\sqrt{2\lambda+\mu^2}+(1-\beta)\sqrt{2\lambda+\eta^2}}, & x\geqslant 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Домноженная на $e^{\Delta_{\mu,\eta}(x,z)}$, формула (1.13) при $\gamma=\beta\mu-(1-\beta)\eta$ совместно с (1.6), что доказывает (1.8).

Перейдем к доказательству формулы (1.7). Для справедливости (1.7) достаточно доказать, что для любого ограниченного измеримого функционала $\wp(X(s),0\leqslant s\leqslant t)$ справедливо равенство

$$\mathbf{E}_x\big\{\wp\big(W^\bullet_\circ(s),0\leqslant s\leqslant t\big);W^\bullet_\circ(t)\in dz\big\} = e^{\Delta_{\mu,\eta}(x,z)}\mathbf{E}\Big\{\wp(W_\circ(s),0\leqslant s\leqslant t)$$
$$\times\exp\Big(-\gamma\ell_\circ(t,0)-\int_0^t \rho(W_\circ(s))\,ds\Big);W_\circ(t)\in dz\Big\}, \tag{1.14}$$

Вместо произвольного ограниченного измеримого функционала можно рассмотреть любые возрастающие моменты времени $0=t_0<t_1<\dots<t_m<t$, произвольные борелевские множества A_k, $k=1,2,\dots m$ и доказать, что

$$\mathbf{E}_x\Big\{\prod_{k=1}^m \mathbb{1}_{A_k}(W^\bullet_\circ(t_k));W^\bullet_\circ(t)\in dz\Big\} = e^{\Delta_{\mu,\eta}(x,z)}\mathbf{E}_x\Big\{\prod_{k=1}^m \mathbb{1}_{A_k}(W_\circ(t_k))$$
$$\times\exp\Big(-\gamma\ell_\circ(t,0)-\int_0^t \rho(W_\circ(s))\,ds\Big);W_\circ(t)\in dz\Big\}. \tag{1.15}$$

Будем доказывать (1.15) по индукции. При $m = 0$ произведение считается равным единице. При этом формула (1.15) превращается в (1.8). Предположим, что (1.15) верна при $0 \leqslant m \leqslant n-1$ и докажем ее при $m = n$.

С одной стороны в силу марковости и однородности процесса $W_\circ^\bullet(t)$, имеем

$$\mathbf{E}_x\Big\{\prod_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{A_k}(W_\circ^\bullet(t_k)); W_\circ^\bullet(t)\in dz\Big\} = \int_{A_n}\mathbf{E}_x\Big\{\prod_{k=1}^{n-1}\mathbb{1}_{A_k}(W_\circ^\bullet(t_k))\Big|W_\circ^\bullet(t_n)=y\Big\}$$
$$\times\, \mathbf{P}_x\big\{W_\circ^\bullet(t)\in dz\big|W_\circ^\bullet(t_n)=y\big\}\mathbf{P}_x\big(W_\circ^\bullet(t_n)\in dy\big). \tag{1.16}$$
$$= \int_{A_n}\mathbf{E}_x\Big\{\prod_{k=1}^{n-1}\mathbb{1}_{A_k}W_\circ^\bullet(t_k); W_\circ^\bullet(t_n)\in dy\Big\}\mathbf{P}_y\big(W_\circ^\bullet(t-t_n)\in dz\big).$$

С другой стороны в силу марковости и однородности процесса $W_\circ(t)$ правая часть (1.15) при $m = n$, в которой под экспонентой стоит аддитивный однородный функционал от этого процесса, преобразуется к виду

$$\int_{A_n} e^{\Delta_{\mu,\eta}(x,y)}\mathbf{E}_x\Big\{\prod_{k=1}^{n-1}\mathbb{1}_{A_k}(W_\circ(t_k))\exp\Big(\gamma\ell_\circ(t_n,0)$$
$$-\int_0^{t_n}\rho(W_\circ(s))\,ds\Big); W_\circ(t_n)\in dy\Big\} \tag{1.17}$$
$$\times\, e^{\Delta_{\mu,\eta}(y,z)}\mathbf{E}_y\Big\{\exp\Big(-\gamma\ell_\circ(t-t_n,0)-\int_0^{t-t_n}\rho(W_\circ(u)\,ds\Big); W_\circ(u)\in dz\Big\}.$$

Первые сомножители под интегралом в правых частях (1.16) и (1.17) совпадают в силу индукционного предположения. Вторые сомножители в этих частях совпадают в силу (1.8). В результате соотношение (1.15) является доказанным, а с ним является доказанным и (1.14). Таким образом, абсолютная непрерывность мер (1.7) доказана.

В силу абсолютной непрерывности мер у процесса $W^{\bullet}_{\circ}(s)$, $s \geqslant 0$, с вероятностью единица существует локальное время

$$\ell^{\bullet}_{\circ}(t,y) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_0^t \mathbb{1}_{(y-\varepsilon,y+\varepsilon)}(W^{\bullet}_{\circ}(s))\,ds, \qquad y \in \mathbf{R},$$

так как оно существует у скошенного броуновского движения. Поскольку у скошенного броуновского движения локальное время является разрывным в нуле (см., например, [8]), то и у процесса $W^{\bullet}_{\circ}(s)$, $s \geqslant 0$, оно будет разрывным.

Так как локальное время имеет конечный носитель, то для любой локально интегрируемой функции g и любого $t > 0$

$$\int\limits_0^t g(W^{\bullet}_{\circ}(s))\,ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\ell^{\bullet}_{\circ}(t,x)\,dx \qquad \text{п.н.,} \tag{1.18}$$

причем интеграл в правой части конечен. Это аналог соответствующего утверждения для скошенного броуновского движения (случай $\mu = \eta = 0$).

Из формулы (1.14) следует, что для любого ограниченного измеримого функционала $\wp(X(s), 0 \leqslant s \leqslant t)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_x\big\{\wp\big(W^{\bullet}_{\circ}(s), 0 \leqslant s \leqslant \tau\big); W^{\bullet}_{\circ}(\tau) \in dz\big\} \\ &= e^{\Delta_{\mu,\eta}(x,z)}\mathbf{E}\Big\{\wp(W_{\circ}(s), 0 \leqslant s \leqslant \tau)\exp\Big(-(\beta\mu-(1-\beta)\eta)\ell_{\circ}(\tau,0) \qquad (1.19) \\ &- \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau \big(\eta^2\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(W_{\circ}(s)) + \mu^2\mathbb{1}_{[0,\infty)}(W_{\circ}(s))\big)\,ds\Big); W_{\circ}(\tau) \in dz\Big\}, \end{aligned}$$

где τ фактически задает преобразование Лапласа с параметром $\lambda > 0$ по переменной t. Эта формула позволяет нам изучать распределения функционалов от локального времени скошенного броуновского движения с разрывным сносом, основываясь на соответствующих результатах для скошенного броуновского движения (см. [8]).

§2. Распределения функционалов от локального времени

Рассмотрим вопрос о том, как вычислять распределения функционалов от локального времени. Интегральный функционал от локального времени по пространственной переменной имеет вид

$$B(t) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\ell^{\bullet}_{\circ}(t,y))\,dy, \tag{2.1}$$

где $f(v)$, $v \in [0,\infty)$, – некоторая неотрицательная кусочно непрерывная функция.

Имея выражения для преобразований Лапласа распределений неотрицательных интегральных функционалов от процесса, можно вычислять распределения функционалов типа супремума. Так, например, для вычисления супремума произвольного непрерывного процесса $X(y)$ можно воспользоваться очевидным соотношением (см. § 2 гл. III из [2])

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{a\leqslant y\leqslant b} X(y) \leqslant h\Big) = \lim_{\gamma\to\infty} \mathbf{E}\exp\Big(-\gamma\int\limits_a^b \mathbb{1}_{(h,\infty)}(X(y))\,dy\Big). \tag{2.2}$$

Во многих случаях, когда

$$\mathbf{E}\exp\Big(-\gamma\int\limits_a^b \mathbb{1}_{(h,\infty)}(X(y))\,dy\Big)$$

выражается с помощью решений некоторых дифференциальных уравнений, можно не вычислять математическое ожидание явно и не находить затем предел, а доказать, что предельное значение для этого математического ожидания также выражается с помощью решений аналогичных уравнений с некоторыми граничными условиями.

Вычисление распределений функционалов вида (2.1) в фиксированный момент времени t сводится к вычислению распределений этих же функционалов, остановленных в случайный момент времени τ, который не зависит от скошенного броуновского движения с разрывным сносом $W^{\bullet}_{\circ}$ и имеет экспоненциальное распределение

$$\mathbf{P}(\tau \geqslant t) = e^{-\lambda t}, \qquad t \geqslant 0, \quad \lambda > 0. \tag{2.3}$$

Достаточно применить обратное преобразование Лапласа по λ.

Теорема 2.1. *Пусть $f(v), v \in [0,h]$, – неотрицательная кусочно непрерывная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$ и*

$$\beta^* = \max\{\beta, (1-\beta)\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_0\Big[\exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty} f(\ell_\circ^\bullet(\tau,y))\,dy\Big); \sup_{y\in\mathbf{R}} \ell_\circ^\bullet(\tau,y) < h\Big] \\
&= 2\lambda \int_0^{h/2\beta^*} e^{-(\beta\mu-(1-\beta)\eta))v}\big(\beta R_\eta(2(1-\beta)v)Q_\mu(2\beta v) \qquad (2.4)\\
&+ (1-\beta)R_\mu(2\beta v)Q_{-\eta}(2(1-\beta)v)\big)\,dv,
\end{aligned}$$

где функции $R_\mu(v)$ и $Q_\mu(v)$, $v \in [0,h]$, являются ограниченными непрерывными решениями задачи

$$2vR''_\mu(v) - (\big(\lambda + \frac{\mu^2}{2}\big)v + f(v))R_\mu(v) = 0, \qquad (2.5)$$

$$R_\mu(0) = 1, \qquad R_\mu(h) = 0, \qquad (2.6)$$

$$2vQ''_\mu(v) + 2Q'_\mu(v) - \Big(\big(\lambda + \frac{\mu^2}{2}\big)v - \mu + f(v)\Big)Q_\mu(v) = -R_\mu(v), \qquad (2.7)$$

$$Q_\mu(h) = 0. \qquad (2.8)$$

Замечание 2.1. Для кусочно непрерывной функции f уравнения (2.5), (2.7) должны пониматься следующим образом: они имеют место во всех точках непрерывности функции f, а в точках разрыва функции f их решения непрерывны вместе с первой производной.

Замечание 2.2. Очевидно, задача (2.5), (2.6) имеет единственное решение. В случае $\mu \leqslant 0$ можно гарантировать единственность ограниченного решения задачи (2.7), (2.8) (см. замечание 2.2 в [5]).

Доказательство теоремы 2.1. Предположим сначала, что $h = \infty$ и f – ограниченная дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными первыми и вторыми производными. Поскольку в нижеприведенных вычислениях все подынтегральные функции положительны, а левая часть равенств является ограниченной величиной, то все интегралы сходятся. Используя (1.18) и (1.19), найдем

$$\mathbf{E}_0 \exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty} f(\ell_\circ^\bullet(\tau,y))\,dy\Big)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_0\Big\{ \exp\Big(- \int_{-\infty}^{\infty} f(\ell_\circ^\bullet(\tau,y))\,dy\Big); W_\circ^\bullet(\tau)\in dz\Big\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\Delta_{\mu,\eta}(0,z)}\mathbf{E}_0\bigg\{ \exp\bigg(- \int_{-\infty}^{0} \big(f(\ell(\tau,y)) + \frac{\eta^2}{2}\ell(\tau,y)\big)\,dy$$

$$- \int_0^{\infty} \big(f(\ell(\tau,y)) + \frac{\mu^2}{2}\ell(\tau,y)\big)\,dy - (\beta\mu - (1-\beta)\eta)\ell_\circ(\tau,0)\bigg); W_\circ(\tau)\in dz\bigg\}.$$

Поскольку

$$\mathbf{P}_0(W_\circ(\tau)\in dz) = \big(\beta \mathbb{1}_{(0,\infty)}(z) + (1-\beta)\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(z)\big)\sqrt{2\lambda}\, e^{-|z|\sqrt{2\lambda}},$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 \exp\Big(- \int_{-\infty}^{\infty} f(\ell_\circ^\bullet(\tau,y))\,dy\Big) = \sqrt{2\lambda}\beta \int_0^{\infty} e^{z(\mu-\sqrt{2\lambda})} I_{\mu,\eta}^{(\beta)}(z)\,dz \\ +\sqrt{2\lambda}(1-\beta)\int_0^{\infty} e^{-z(\eta+\sqrt{2\lambda})} I_{-\eta,-\mu}^{(1-\beta)}(-z)\,dz, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где

$$I_{\mu,\eta}^{(\beta)}(z) := \mathbf{E}_0^z \exp\bigg(- \int_{-\infty}^{0} \big(f(\ell_\circ(\tau,y)) + \frac{\eta^2}{2}\ell_\circ(\tau,y)\big)\,dy$$

$$- \int_0^{\infty} \big(f(\ell_\circ(\tau,y)) + \frac{\mu^2}{2}\ell_\circ(\tau,y)\big)\,dy - (\beta\mu - (1-\beta)\eta)\ell_\circ(\tau,0)\bigg).$$

В этом определении мы использовали новое вероятностное пространство, которое порождено условными распределениями

$$\mathbf{P}_0^z(B) = \mathbf{P}_0(B|W_\circ(\tau)=z).$$

Символы вероятности и математического ожидания, относящиеся к этому пространству, будем снабжать индексами z сверху и 0 снизу.

Для получения равенства в (2.9) применено свойство антисимметрии скошенного броуновского движения при $W_\circ(0)=0$.

Используя выражение для плотности распределения локального времени скошенного броуновского движения в новом вероятностном пространстве, имеем

$$I^{(\beta)}_{\mu,\eta}(z)=\sqrt{2\lambda}\int\limits_0^\infty e^{-v\sqrt{2\lambda}}\mathbf{E}^z_0\biggl\{\exp\biggl(-\int\limits_{-\infty}^0\bigl(f(\ell_\circ(\tau,y))+\frac{\eta^2}{2}\ell_\circ(\tau,y)\bigr)\,dy$$

$$-\int\limits_0^\infty\bigl(f(\ell_\circ(\tau,y))+\frac{\mu^2}{2}\ell_\circ(\tau,y)\bigr)\,dy-(\beta\mu-(1-\beta)\eta)\ell_\circ(\tau,0)\biggr)\bigg|\ell_\circ(\tau,0)=v\biggr\}\,dv.$$

Далее мы воспользуемся вычислениями из [8]. Применяя теорему 3.1 из [8], т.е. марковское свойство локального времени скошенного броуновского движения в новом вероятностном пространстве, при $z>0$ получаем

$$I^{(\beta)}_{\mu,\eta}(z)=\sqrt{2\lambda}\int\limits_0^\infty e^{-(\beta\mu-(1-\beta)\eta)v-v\sqrt{2\lambda}}\,\widetilde{r}_\eta(z,v)\widetilde{q}_\mu(z,v)\,dv, \tag{2.10}$$

где

$$\widetilde{r}_\eta(z,v):=\mathbf{E}^z_0\biggl\{\exp\biggl(-\int\limits_{-\infty}^0\bigl(f(\ell_\circ(\tau,y))+\frac{\eta^2}{2}\ell_\circ(\tau,y)\bigr)\,dy\biggr)\bigg|\ell_\circ(\tau,0)=v\biggr\},$$

$$\widetilde{q}_\mu(z,v):=\mathbf{E}^z_0\biggl\{\exp\biggl(-\int\limits_0^\infty\bigl(f(\ell_\circ(\tau,y))+\frac{\mu^2}{2}\ell_\circ(\tau,y)\bigr)\,dy\biggr)\bigg|\ell_\circ(\tau,0)=v\biggr\}.$$

Тогда, снова применяя теорему 3.1 из [8], получаем, что $\widetilde{r}_\eta(z,v)=\overline{r}_\eta(z,2(1-\beta)v)$, где

$$\overline{r}_\eta(z,v)=\mathbf{E}\biggl\{\exp\biggl(-\int\limits_0^\infty\bigl(f(V_3(h))+\frac{\eta^2}{2}V_3(h)\bigr)\,dh\biggr)\bigg|V_3(0)=v\biggr\},$$

а $V_3(h)$, $h\geqslant 0$, – однородный диффузионный процесс с производящим оператором

$$\mathbf{L}_3:=2v\Bigl(\frac{d^2}{dv^2}-\sqrt{2\lambda}\frac{d}{dv}\Bigr).$$

Ясно, что функция $\overline{r}_\eta(z,v)$ не зависит от z. Обозначим $\bar{R}_\eta(v):=\overline{r}_\eta(z,v)$. Используя выражение для производящего оператора процесса V_3 и применяя теорему 12.5 гл. II из [2], получим, что функция $\bar{R}_\eta(v)$,

$v \in (0, \infty)$, является ограниченным решением следующего однородного уравнения:

$$2v\big(\bar{R}''(v) - \sqrt{2\lambda}\,\bar{R}'(v)\big) - \big(\frac{\eta^2}{2}v + f(v)\big)\bar{R}(v) = 0, \qquad v > 0. \tag{2.11}$$

Известно, что 0-мерный бесселевский процесс, попадая в нуль, из нуля уже не выходит, т.е. остается равным нулю. В силу описания процесса V_3, (см. предложение 2.1 § 2 гл. V из [2]) аналогичное утверждение верно и для него. Отсюда, так как $f(0) = 0$, следует, что $\bar{R}_\eta(0) = 1$.

Применяя теорему 3.1 из [8], получаем, что $\widetilde{q}_\mu(z, v) = \bar{q}_\mu(z, 2\beta v)$, где

$$\bar{q}_\mu(z, v) = \mathbf{E}\bigg\{\exp\bigg(-\int_0^\infty \big(f(V_1(h)) + \frac{\mu^2}{2}V_1(h)\big)\,dh - \int_0^z \big(f(V_2(h))$$
$$+ \frac{\mu^2}{2}V_2(h)\big)\,dh\bigg)\bigg|V_2(0) = v\bigg\}$$
$$= \int_0^\infty \mathbf{E}_v^{(2)}\bigg\{\exp\bigg(-\int_0^\infty \big(f(V_1(h)) + \frac{\mu^2}{2}V_1(h)\big)\,dh$$
$$- \int_0^z \big(f(V_2(h)) + \frac{\mu^2}{2}V_2(h)\big)\,dh\bigg)\bigg|V_2(z) = g\bigg\}\mathbf{P}\big(V_2(z) \in dg | V_2(0) = v\big).$$

Здесь $V_1(h)$, $h \geqslant 0$, – однородный диффузионный процесс с производящим оператором

$$\mathbf{L}_1 := 2v\Big(\frac{d^2}{dv^2} - \sqrt{2\lambda}\frac{d}{dv}\Big),$$

а $V_2(h)$, $h \geqslant 0$, – однородный диффузионный процесс с производящим оператором

$$\mathbf{L}_2 := 2v\Big(\frac{d^2}{dv^2} - \sqrt{2\lambda}\frac{d}{dv}\Big) + 2\frac{d}{dv},$$

не зависящий от процесса V_1 при фиксированных начальных условиях. Мы использовали обозначение $\mathbf{E}_v^{(2)}\{\cdot\} = \mathbf{E}\{\cdot | V_2(0) = v\}$.

Используя марковское свойство и условие $V_1(0)=V_2(z)$, имеем

$$\bar q_\mu(z,v)=\int\limits_0^\infty \mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\infty \big(f(V_1(h))+\frac{\mu^2}{2}V_1(h)\big)\,dh\Big)\Big|V_1(0)=g\Big\}$$

$$\times\,\mathbf{E}_v^{(2)}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^z\big(f(V_2(h))+\frac{\mu^2}{2}V_2(h)\big)dh\Big)\Big|V_2(z)=g\Big\}\mathbf{P}_v^{(2)}\big(V_2(z)\in dg\big),$$

где $\mathbf{P}_v^{(2)}(\cdot)=\mathbf{P}(\cdot|V_2(0)=v)$. Поскольку при фиксированных начальных значениях инфинитезимальные характеристики у процессов V_1 и V_3 одинаковы, то

$$\bar q_\mu(z,v)=\int\limits_0^\infty \bar R_\mu(g)\mathbf{E}_v^{(2)}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^z\big(f(V_2(h))+\frac{\mu^2}{2}V_2(h)\big)\,dh\Big);V_2(z)\in dg\Big\}$$

$$=\mathbf{E}\Big\{\bar R_\mu(V_2(z))\exp\Big(-\int\limits_0^z\big(f(V_2(h))+\frac{\mu^2}{2}V_2(h)\big)\,dh\Big)\Big|V_2(0)=v\Big\}.$$

Применим теорему 13.2 гл. II из [2]. Тогда получим, что функция $\bar q_\mu(z,v)$, $(z,v)\in[0,\infty)\times[0,\infty)$, является решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial z}\bar q(z,v)=2v\Big(\frac{\partial^2}{\partial v^2}\bar q(z,v)-\sqrt{2\lambda}\frac{\partial}{\partial v}\bar q(z,v)\Big)+2\frac{\partial}{\partial v}\bar q(z,v)$$
$$-\big(\frac{\mu^2}{2}v+f(v)\big)\bar q(z,v), \tag{2.12}$$
$$\bar q(0,v)=\bar R_\mu(v). \tag{2.13}$$

Особенность применения теорем 12.5 и 13.2 гл. II из [2] состоит в том, что процессы V_1 и V_2 принимают неотрицательные значения и их коэффициент диффузии $\sigma^2(v)=v$ вырождается в нуле.

Замена $R_\mu(v)=e^{-v\sqrt{2\lambda}/2}\bar R_\mu(v)$ приводит к задаче

$$2vR''(v)-\big(\big(\lambda+\frac{\mu^2}{2}\big)v+f(v)\big)R(v)=0,\qquad R(0)=1, \tag{2.14}$$

а замена $q_\mu(z,v)=e^{-v\sqrt{2\lambda}/2}\bar q_\mu(z,v)$ – к задаче

$$\frac{\partial}{\partial z}q(z,v)=2v\frac{\partial^2}{\partial v^2}q(z,v)+2\frac{\partial}{\partial v}q(z,v)$$
$$-\big(\big(\lambda+\frac{\mu^2}{2}\big)v-\sqrt{2\lambda}+f(v)\big)q(z,v), \tag{2.15}$$
$$q(0,v)=R_\mu(v). \tag{2.16}$$

Используя новые обозначения, можно переписать (2.10) в следующем виде:

$$I^{(\beta)}_{\mu,\eta}(z) = \sqrt{2\lambda}\int_0^\infty e^{-(\beta\mu-(1-\beta)\eta)v} R_\eta(2(1-\beta)v) q_\mu(z, 2\beta v)\, dv.$$

Положим

$$Q_\mu(v) := \int_0^\infty e^{z(\mu-\sqrt{2\lambda})} q_\mu(z, v)\, dz.$$

Тогда из (2.15), (2.16) следует, что функция $Q_\mu(v)$ удовлетворяет (2.7).

Таким образом,

$$\beta\sqrt{2\lambda}\int_0^\infty e^{z(\mu-\sqrt{2\lambda})} I^{(\beta)}_{\mu,\eta}(z)\, dz$$
$$= \beta 2\lambda \int_0^\infty e^{-(\beta\mu-(1-\beta)\eta)v} R_\eta(2(1-\beta)v) Q_\mu(2\beta v)\, dv.$$

Теперь из (2.9) следует (2.4) для случая, когда $h = \infty$ и f – ограниченная дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными первыми и вторыми производными.

Как и при доказательстве теоремы 4.1 гл. IV из [2], результат для кусочно непрерывных функций f доказывается с помощью аппроксимации f непрерывно дифференцируемыми функциями.

Доказательство теоремы 2.1 для $h < \infty$ основано на очевидном обобщении соотношения (2.2):

$$E_\gamma := \mathbf{E}\Big[\exp\Big(-\int_{-\infty}^\infty f(\ell_\bullet(\tau, y))\, dy\Big); \sup_{y\in\mathbf{R}} \ell_\bullet(\tau, y) \leqslant h\Big]$$
$$= \lim_{\gamma\to\infty} \mathbf{E}\Big[\exp\Big(-\int_{-\infty}^\infty (f(\ell_\bullet(\tau, y)) + \gamma \mathbb{1}_{(h,\infty)}(\ell_\bullet(\tau, y)))\, dy\Big)\Big].$$

Более подробно аналогичные вычисления изложены в §5 гл. V из [2]. $\square$

Список литературы

1. К. Ито, Г. Маккин, *Диффузионные процессы и их траектории*, М., Мир, 1968.
2. А. Н. Бородин, *Случайные процессы*, Санкт-Петербург, Лань, 2013.
3. F. B. Knight, *Random walks and a sojourn density process of Brownian motion.* — Trans. Amer. Math. Soc. **109** (1963), 56–86.
4. D. B. Ray, *Sojourn times of a diffusion process.* — Ill. J. Math. **7** (1963), 615–630.
5. А. Н. Бородин, *Распределения функционалов от локального времени броуновского движения с разрывным сносом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **496**, (2020), 102–121.
6. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы*, Санкт-Петербург, Лань, 2016.
7. S.-E. Graversen, A. N. Shiryaev, *An extension of P. Lévy's distributional properties to the case of a Brownian motion.* — Bernoulli, **6**, (2000), 615–620.
8. A. N. Borodin, P. Salminen, *On the local time process of a skew Brownian motion.* — Trans. Amer. Math. Soc., **372**, No. 5, (2019), 3597–3618.

Borodin A. N. Distributions of functionals of local time of a skew Brownian motion with discontinuous drift

A skew Brownian motion with piecewise constant drift is considered. With equal constants this diffusion includes a skew Brownian motion with linear drift and with opposite sign constants it turns into a skew Brownian motion with alternating drift. We are interested in a result that allows us to calculate the distributions of the integral functionals with respect to the spatial variable of the local time of a skew Brownian motion with discontinuous drift.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
С-Петербург, Россия
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 06 июля 2021 г.