Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 501, 2021 г.

С. М. Ананьевский

О КОНСТАНТАХ В НЕРАВЕНСТВАХ КОЛМОГОРОВА–РОГОЗИНА И КЕСТЕНА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Введение

В настоящей работе уточняются значения абсолютных констант в неравенствах Колмогорова–Рогозина и Кестена для функции концентрации суммы независимых случайных векторов в гильбертовом пространстве.

Функция концентрации случайной величины X была введена П. Леви в 1937 году [1] равенством

$$Q(X,\lambda) = \sup_{-\infty<x<\infty} \mathbf{P}(x \leqslant X \leqslant x+\lambda),$$

для любого $\lambda > 0$.

Исследованием ее свойств занимались многие авторы, обзор результатов можно найти в книгах Хергартнера и Теодореску [7] и Петрова [8].

Оценки убывания функции концентрации суммы независимых случайных величин при увеличении числа слагаемых впервые были получены Леви. Впоследствии такими оценками занимались А. Н. Колмогоров [2], Б. А. Рогозин [3], Эссеен [4], Кестен [5], А. Ю. Зайцев [6] и другие авторы.

Для функций концентрации сумм независимых случайных векторов со значениями в гильбертовом пространстве подобные результаты были получены в работах [9–11].

Первая, содержащая только абсолютные константы, оценка функции концентрации суммы независимых случайных величин, не зависящая от распределения и от числа слагаемых, была получена А. Н. Колмогоровым в 1956 году. Несколько позже результат Колмогорова был усилен Рогозиным, который обобщил результат Колмогорова в следующей теореме:

Ключевые слова: суммы независимых случайных векторов, функции концентрации, неравенства для функций концентрации.

Теорема 1 (Рогозин)**.** *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Для любых $0 < \lambda_k \leqslant \lambda$, $k = 1, \ldots, n$ выполнено неравенство*

$$Q(S_n, \lambda) \leqslant C\lambda \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 (1 - Q(X_k, \lambda_k)) \right)^{-1/2}, \tag{1}$$

здесь и далее C – абсолютная константа (не обязательно одна и та же в разных формулах).

Позднее Эссеен доказал следующую теорему, из которой следует неравенство Колмогорова–Рогозина (1).

Пусть $F(x)$ – функция распределения случайной величины X. Положим $\tilde{X} = X - Y$, где X и Y – независимые одинаково распределенные случайные величины, $\tilde{F}(x)$ – функция распределения случайной величины $\tilde{X}$.

Теорема 2 (Эссеен)**.** *В обозначениях теоремы 1 верно следующее неравенство*:

$$Q(S_n, \lambda) \leqslant C\lambda \left(\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| \leqslant \lambda_k} |x|^2 d\tilde{F}_k(x) + \int\limits_{|x| > \lambda_k} \lambda_k^2 d\tilde{F}_k(x) \right)^{-1/2}, \tag{2}$$

Оценки типа Колмогорова–Рогозина с абсолютной константой для многомерного и гильбертова пространства были получены Зигелем [9] *и независимо Энгером* [10].

Впервые внимание значению абсолютной константы в неравенстве Колмогорова – Рогозина было уделено в работе [9]. *В более поздних работах* [12–14] *были приведены оценки абсолютной константы в неравенстве* (1) *для одномерного случая. Так в работе* [12] *получены оценки функции концентрации суммы независимых случайных величин иного типа, из которых возможно получение неравенства* (1) *с численным значением абсолютной константы, улучшающим константу из работы* [9]. *Для случая одинаково распределенных случайных величин в работе* [13] *приведено значение абсолютной константы, которая улучшает результат работы* [14] *и которая для одномерного случая лучше константы из работы* [9].

В настоящей работе приводится неравенство Колмогорова–Рогозина для гильбертова пространства с доказательством, улучшающим оценку Зигеля в $\frac{2}{\pi}\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi-1}{\sqrt{e\pi}}\right) \approx 1{,}58$ раза.

Для одномерного пространства Кестен [5] получил оценки для функции концентрации суммы независимых случайных величин, позволяющие учитывать малость концентрации слагаемых, что отражается в следующей теореме.

Теорема 3 (Кестен)**.** *В обозначениях теоремы* 1 *выполняется следующее неравенство:*

$$Q(S_n,\lambda) \leqslant C\lambda \max_{1\leqslant j\leqslant n} Q\left(X_j,\lambda_j\right) \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 (1-Q(X_k,\lambda_k))\right)^{-1/2} \tag{3}$$

В работе [11] *неравенство Кестена было доказано для многомерных случайных векторов и векторов со значениями в гильбертовом пространстве. В настоящей работе в теореме* 5 *отражен этот результат и приведено вычисление абсолютной константы.*

2. Вспомогательные обозначения

Пусть $\mathbf{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, X – случайный вектор со значениями в $\mathbf{H}$. *Функцией концентрации* X для множества A будем называть

$$Q\left(X,A\right) = \sup_{a\in \mathrm{H}} P\left(X+a\in A\right).$$

В качестве множества A в этой работе мы будем рассматривать $\Sigma_\lambda = \{x\in H : |x| \leqslant \lambda\}, \quad |x| = \sqrt{(x,x)}$, хотя все результаты будут верными и для более широкого класса множеств (см. замечание после доказательства теоремы 4).

Положим

$$D\left(X,\lambda\right) = \frac{1}{\lambda^2}\int\limits_{\Sigma_\lambda} |x|^2 dF(x) + \int\limits_{\overline{\Sigma_\lambda}} dF(x,)$$

для любого $\lambda > 0$, здесь $\overline{A}$ – дополнение множества A.

Отметим два простых свойства $D(X,\lambda)$:

$$1 \geqslant D(X,\lambda) \geqslant 1 - Q(X.\Sigma_\lambda) \tag{4}$$

и

$$D(X,\lambda) \geqslant \frac{1}{\lambda^2}\frac{\lambda^2}{4}\int\limits_{\Sigma_\lambda\setminus\Sigma_{\frac{\lambda}{2}}} dF(x) + \int\limits_{\overline{\Sigma_\lambda}} dF(x)$$

$$\geqslant \frac{1}{4}\mathbf{P}(X\notin\Sigma_{\frac{\lambda}{2}}) \geqslant \frac{1}{4}(1-Q(X,\Sigma_{\frac{\lambda}{2}})). \qquad (5)$$

3. Неравенство Колмогорова–Рогозина

В работе Г. Зигеля [9] приведена абсолютная константа в неравенстве Колмогорова–Рогозина для случайных векторов со значениями в многомерных и гильбертовых пространствах. Мы приведем доказательство его результата с некоторыми улучшениями при вычислении константы.

В начале приведем лемму, которая нам понадобится при доказательстве теоремы.

Лемма. *Пусть $L_k(x)$, $x\in\mathbb{R}^1$, $k=1,2,\dots,n$ – спектральные функции Леви для безгранично делимых характеристических функций $f_k(t), t\in\mathbb{R}^1$. Пусть*

$$\eta(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2t^2\right), \quad \lambda>0.$$

Тогда для любых $c_0>0$, $0<\lambda_k\leqslant\lambda$, $k=1,2,\dots,n$ имеет место неравенство:

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-c_0\sum_{k=1}^n\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)dL_k(x)\right)d\eta(t)$$

$$\leqslant \lambda c_1\left(c_0\sum_{k=1}^n\left(\int\limits_{|x|<\lambda_k}x^2dL_k(x)+\lambda_k^2\int\limits_{|x|\geqslant\lambda_k}dL_k(x)\right)\right)^{-1/2}, \qquad (6)$$

где $c_1 = \frac{\pi}{2}\left(1+\int\limits_1^\infty\exp(-\frac{x^2}{2})dx\right) = 2,1955\dots$.

Доказательство леммы. Выберем последовательность чисел $\{b_n\}$, такую что $0 = b_0 < 1 = b_1 < \ldots$ и $b_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда

$$I = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2 t^2 - c_0 \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\infty}^{\infty} (1-\cos tx)dL_k(x)\right) dt$$
$$\leqslant \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{|t|\leqslant \frac{b_m}{\lambda}} \exp\left(-c_0 \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1-\cos tx)dL_k(x)\right)$$
$$\times\, dt \left(e^{-\frac{b_{m-1}^2}{2}} - e^{-\frac{b_m^2}{2}}\right) \qquad (7)$$

Введем обозначения:

$$J_m = \int\limits_{|t|\leqslant \frac{b_m}{\lambda}} \exp\left(-c_0 \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1-\cos tx)dL_k(x)\right) dt,$$
$$\rho = \frac{\lambda}{b_m}, \qquad \rho_k = \frac{\lambda_k}{b_m}.$$

Далее

$$J_m = \int\limits_{|t|\leqslant 1/\rho} \exp\Bigg(- c_0 \sum_{k=1}^{n} \Bigg(\int\limits_{|x|<\rho_k} (1-\cos tx)dL_k(x)$$
$$+ \int\limits_{|x|\geqslant\rho_k} (1-\cos tx)dL_k(x)\Bigg)\Bigg)dt$$

При $|t| \leqslant 1/\rho$, $|x| < \rho_k$ имеем $1 - \cos tx \geqslant \frac{11}{24}t^2x^2$, поэтому

$$J_m \leqslant \int\limits_{|t|\leqslant 1/\rho} \Bigg(\exp\Bigg(- c_0 \frac{11}{24} t^2 \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|<\rho_k} x^2 dL_k(x)\Bigg)$$
$$\times \prod_{k=1}^{n} \exp(-c_0 \int\limits_{|x|\geqslant\rho_k} (1-\cos tx)dL_k(x))\Bigg)dt \qquad (8)$$

Положим

$$\alpha_0 = \frac{1}{B} c_0 \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|<\rho_k} x^2 dL_k(x), \quad \alpha_k = \frac{c_0 \rho_k^2 p_k}{B},$$

где

$$B = c_0 \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{|x|<\rho_k} x^2 dL_k(x) + \rho_k^2 \int\limits_{|x|\geqslant\rho_k} dL_k(x) \right), \quad p_k = \int\limits_{|x|\geqslant\rho_k} dL_k(x).$$

Тогда замечаем, что $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k = 1, \quad \alpha_k > 0$. Применяя к (8) неравенство Гёльдера получаем:

$$J_m \leqslant \left(\int\limits_{|t|\leqslant 1/\rho} \exp(-\frac{11}{24}Bt^2)dt \right)^{\alpha_0}$$
$$\times \prod_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{|t|\leqslant 1/\rho} \exp\left(-\frac{B}{\rho_k^2} \int\limits_{|x|\geqslant\rho_k} (1-\cos tx) \frac{dL_k(x)}{p_k} \right) dt \right)^{\alpha_k} = \prod_{k=0}^{n} I_k^{\alpha_k}. \tag{9}$$

Далее при оценке интегралов I_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ будем пользоваться равенством $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-bt^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{b}}$ при $b > 0$.

При $k = 0$ имеем

$$I_0 \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{11}{24}Bt^2)dt = \sqrt{\frac{24\pi}{11B}}.$$

При $k \geqslant 1$ применяем неравенство Йенсена (для функции $\varphi(x) = \exp(-x)$) и затем меняем порядок интегрирования

$$I_k \leqslant \int\limits_{|t|\leqslant 1/\rho} \left(\int\limits_{|x|\geqslant\rho_k} \exp\left(-\frac{B}{\rho_k^2}(1-\cos tx) \right) dM_k(x) \right) dt$$
$$= \int\limits_{|x|\geqslant\rho_k} \left(\int\limits_{|t|\leqslant 1/\rho} \exp\left(-\frac{B}{\rho_k^2}(1-\cos tx) \right) dt \right) dM_k(x)$$
$$= \int\limits_{|x|\geqslant\rho_k} T_k dM_k(x),$$

где

$$dM_k(x) = \frac{dL_k(x)}{p_k} \quad \text{при} \quad |x| \geqslant \rho_k \quad \text{и} \quad dM_k(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| < \rho_k.$$

Покажем, что $T_k < c/\sqrt{B}$ при $|x| \geqslant \rho_k$, из чего будет следовать, что $I_k < c/\sqrt{B}$ (с той же константой c , так как M_k – функция распределения).

При $\rho_k \leqslant |x| \leqslant \pi\rho_k$ и $|t| \leqslant 1/\rho_k$ имеем $|tx| \leqslant \pi$, отсюда следуют неравенства

$$1 - \cos(tx) \geqslant \frac{2}{\pi^2}t^2x^2 \geqslant \frac{2}{\pi^2}t^2\rho_k^2.$$

Тогда

$$T_k \leqslant \int\limits_{|t|\leqslant 1/\rho} \exp\left(-\frac{2}{\pi^2}Bt^2\right) dt \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2}{\pi^2}Bt^2\right) dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{B}}.$$

Если же $|x| > \pi\rho$, то делая замену: $u = t|x|$, получаем

$$\begin{aligned}
T_k &= \frac{1}{|x|} \int\limits_{|u|\leqslant \frac{|x|}{\rho}} \exp\left(-\frac{B}{\rho_k^2}(1-\cos u)\right) du \\
&\leqslant \frac{1}{|x|}\left(\frac{|x|}{\pi\rho}+1\right) \int\limits_{|u|\leqslant\pi} \exp\left(-\frac{B}{\rho_k^2}(1-\cos u)\right) du \\
&\leqslant \frac{2}{\pi\rho} \int\limits_{|u|\leqslant\pi} \exp|\left(-\frac{B}{\rho_k^2}\frac{2}{\pi^2}u^2\right) du \\
&\leqslant \frac{2}{\pi\rho} \int\limits_{\infty}^{\infty} \exp|\left(-\frac{B}{\rho_k^2}\frac{2}{\pi^2}u^2\right) du = \frac{2}{\pi\rho}\frac{\pi\rho_k}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{B}} \leqslant \sqrt{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{B}}.
\end{aligned}$$

В результате для всех $k = 0, 1, \ldots, n$ получаем

$$I_k \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{B}} \max\left(\sqrt{\frac{24}{11}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = \sqrt{2\pi}\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{B}},$$

и подставив это в неравенство (9), получим

$$J_m \leqslant \sqrt{2\pi}\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{B}}. \tag{10}$$

Заметим, что при $m \geqslant 1$

$$B = c_0 \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{|x|<\rho_k} x^2 dL_k(x) + \rho_k^2 \int\limits_{|x|\geqslant\rho_k} dL_k(x) \right)$$

$$\geqslant c_0 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_m^2} \left(\int\limits_{|x|<\lambda_k} x^2 dL_k(x) + \lambda_k^2 \int\limits_{|x|\geqslant\lambda_k} dL_k(x) \right) \tag{11}$$

Тогда, принимая во внимание (10), (11) и (7), получаем

$$I \leqslant \lambda \frac{\pi}{2} c_2 \left(c_0 \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{|x|<\lambda_k} x^2 dLk(x) + \lambda_k^2 \int\limits_{|x|\geqslant\lambda_k} dL_k(x) \right) \right)^{-1/2},$$

где

$$c_2 = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \left(e^{-\frac{b_{m-1}^2}{2}} - e^{-\frac{b_m^2}{2}} \right).$$

Переходя к пределу по $\Delta = \sup\limits_{m\geqslant1}(b_{m+1} - b_m) \to 0$, мы получаем утверждение леммы. □

Теорема 4. *Для $\Sigma_\lambda = \{x : |x| \leqslant \lambda\}$ и любых $0 < \lambda_k \leqslant \lambda$, $k = 1, 2, \ldots, n$ имеют место неравенства*

$$Q(S_n, \Sigma_\lambda) \leqslant C_1 \lambda \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 D(\tilde{X}_k, \lambda_k) \right)^{-1/2}$$

$$\leqslant C_1 \lambda \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 (1 - Q(\tilde{X}_k, \Sigma_{\lambda_k})) \right)^{-1/2}, \tag{12}$$

где $C_1 = c_1\sqrt{2e} = 5,1191\ldots$, а c_1 – постоянная из леммы.

Следствие. *В случае $\lambda_k = \lambda$, $\quad k = 1, 2, \ldots, n$ получаем*

$$Q(S_n, \Sigma_\lambda) \leqslant C_1 \left(\sum_{k=1}^{n} D(\tilde{X}_k, \lambda) \right)^{-1/2} \leqslant C_1 \left(\sum_{k=1}^{n} (1 - Q(\tilde{X}_k, \Sigma_\lambda)) \right)^{-1/2}, \tag{13}$$

Доказательство теоремы 4. (I) Для начала рассмотрим случай, когда случайные величины принимают значения в $\mathbb{R}^d$. Пусть η – нормальная вероятностная мера с характеристической функцией

$$f_\eta(x) = \varphi_\lambda(x) = \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\lambda^2}\right).$$

Пусть $f_n, F_{(n)}$ и $P_{(n)}$ – характеристическая функция, функция распределения и распределение S_n. Тогда

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f_n(t)| d\eta(t) &\geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(t,x)} f_n(t) d\eta(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x+u|^2}{2\lambda^2}} dF_{(n)}(u)\\ &= \int\limits_{\Sigma_\lambda - x} e^{-\frac{|x+u|^2}{2\lambda^2}} dF_{(n)}(u) + \int\limits_{\overline{\Sigma_\lambda - x}} e^{-\frac{|x+u|^2}{2\lambda^2}} dF_{(n)}(u)\\ &\geqslant e^{-\frac{1}{2}} P_{(n)}(\Sigma_\lambda - x).\end{aligned}$$

Отсюда

$$Q(S_n, \Sigma_\lambda) \leqslant e^{1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f_n(t)| d\eta(t). \tag{14}$$

Из неравенства $1+x \leqslant e^x$ получим, что $|f_{P_j}(t)|^2 \leqslant \exp(-(1-|f_{P_j}(t)|^2))$, где f_{P_j} – характеристическая функция X_j . Учитывая равенство

$$1 - |f_{P_j}(t)|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos(t,x)) d\tilde{P}_j(x)$$

и принимая во внимание (14) получаем

$$Q(S_n, \Sigma_\lambda) \leqslant e^{1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos(t,x)) d\tilde{P}_k(x)\right) d\eta(t).$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера для $\beta_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, таких что $\beta_1 + \ldots + \beta_n = 1$. Получим

$$Q(S_n, \Sigma_\lambda) \leqslant e^{1/2} \prod_{k=1}^{n} J_k^{\beta_k}, \tag{15}$$

где $J_k = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp(-\frac{1}{2\beta_k} \int\limits_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos(t,x)) d\tilde{P}_k(x)) d\eta(t)$

Заметим, что достаточно доказать наше утверждение для дискретных мер с конечным носителем, а далее воспользуемся предельным переходом (так как любая вероятностная мера является слабым пределом некоторой последовательности дискретных вероятностных мер с конечным носителем).

Итак, пусть G_k такая вероятностная мера, что

$$\tilde{G}_k(x_{k,j}) = p_{k,j}, \quad x_{k,j} \in \mathbb{R}^d, \quad 1 \leqslant j \leqslant l = l(k).$$

Вновь будем пользоваться неравенством Гёльдера для некоторых $\alpha_j > 0$, $j = 1, \ldots, l$, таких что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_l = 1$. Тогда

$$J_k \leqslant \prod_{j=1}^{l} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha_j \beta_k} (1 - \cos(t, x_{k,j})) p_{k,j} \right) d\eta(t) \right)^{\alpha_j}.$$

Если Y – случайный вектор с распределением η, то случайная величина $\xi = (Y, e)$, $\quad (|e| = 1)$ имеет нормальное распределение $\eta_1 = N(0, \lambda^{-2})$. С помощью преобразования $u \to (t, \frac{x}{|x|})$ и формулы замены переменной получим

$$J_k \leqslant \prod_{j=1}^{l} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha_j \beta_k} \int\limits_{\mathbb{R}^1} (1 - \cos ux) dP_{k,j}(x) \right) d\eta_1(u) \right)^{\alpha_j}$$

где $P_{k,j}$ – мера, сосредоточенная в точке $|x_{k,j}| \in \mathbb{R}^1$, такая что $P_{k,j}(\{|x_{k,j}|\}) = p_{k,j}$.

По доказанной лемме имеем

$$J_k \leqslant \lambda c_1 \sqrt{2} \prod_{j=1}^{l} \left(\frac{1}{\alpha_j \beta_k} \left(\int\limits_{|x| < \lambda_k} x^2 dP_{k,j}(x) + \lambda_k^2 \int\limits_{|x| \geqslant \lambda_k} dP_{k,j}(x) \right) \right)^{\alpha_j}.$$

Обозначим

$$D_{k,j} = \int\limits_{|x| < \lambda_k} x^2 dP_{k,j}(x) + \lambda_k^2 \int\limits_{|x| \geqslant \lambda_k} dP_{k,j}(x),$$

тогда, вводя следующие обозначения:

$$\alpha_j = \frac{D_{k,j}}{\sum\limits_{i=1}^{l(k)} D_{k,i}}, \; 1 \leqslant j \leqslant l(k), \qquad \beta_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{l(k)} D_{k,j}}{\sum\limits_{m=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{l(m)} D_{m,i}}, \; 1 \leqslant k \leqslant n,$$

получим

$$J_k \leqslant \lambda c_1 \sqrt{2} \prod_{j=1}^{l} \left(\sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{l(m)} D_{m,i} \right)^{\alpha_j} = \lambda c_1 \sqrt{2} \left(\sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{l(m)} D_{m,i} \right).$$

Отсюда и из (15) следует неравенство

$$Q(S_n, \Sigma_\lambda) \leqslant \lambda c_1 \sqrt{2e} \left(\sum_{m=1}^{n} \sum_{i=1}^{l(m)} D_{m,i} \right).$$

После предельного перехода получаем требуемое неравенство.

(II) Рассмотрим случай произвольного сепарабельного гильбертова пространства $\mathbf{H}$.

Пусть $e_1, e_2, \ldots$ – ортонормированный базис в $\mathbf{H}$ и пусть P_k – оператор проектирования на подпространство H_k , порожденное векторами $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$. Рассмотрим функции

$$g_j(x) = |x|^2 \quad \text{при} \quad |x| \leqslant \lambda_j \quad \text{и} \quad g_j(x) = \lambda_j^2 \quad \text{при} \quad |x| > \lambda_j$$

и меры $F_k^j = F_j P_k^{-1},\ j = 1, 2, \ldots, n$ на H_k . По формуле замены переменной получим

$$\int\limits_{H_k} g_j(x) dF_k^j(x) = \int\limits_{H} g_j(P_k(x)) dF_j(x).$$

Теперь положим

$$X^k = P_k X, \quad \Sigma_\lambda^k = P_k \Sigma_\lambda.$$

Тогда для любого фиксированного $a \in \mathbf{H}$

$$\mathbf{P}(X_k + a_k \in \Sigma_\lambda^k) = \mathbf{P}(X + a \in P_k^{-1} \Sigma_\lambda^k), \quad \text{где} \quad a_k = P_k a.$$

Поскольку $\Sigma_\lambda \subset P_k^{-1} \Sigma_\lambda^k$, то

$$Q(X_k, \Sigma_\lambda^k) = Q(X, P_k^{-1} \Sigma_\lambda^k) \geqslant Q(X, \Sigma_\lambda).$$

Из последнего соотношения и того, что $g_j(P_k(x)) \to g_j(x)$ при $k \to \infty$ для любого $x \in \mathbf{H}$, утверждение теоремы для $\mathbf{H}$ получается из пункта (I) с помощью предельного перехода по размерности пространства.

(III) Второе неравенство в теореме легко получается после применения неравенства (4). $\square$

Замечание. Неравенство (13) остается верным (как было показано в [9] и [10]) для более широкого класса множеств $\mathbb{B}$: положим $A \in \mathbb{B}$, если существуют ограниченные линейные операторы $B_1, B_2, \ldots, B_k$, такие что

$$A = \{x \in \mathbf{H} : \sum_{j=1}^{k} |B_j x| \leqslant 1\}.$$

В этом случае вместо функции $D(\tilde{X}_k, \lambda)$ рассматривается $\mathbf{E}(\min(p_A(\tilde{X}_k), 1))$,
где $p_A(x) = \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha A\}$ – функционал Минковского.

4. Неравенство Кестена

Кестеном [5] для одномерного случая было получено неравенство, которое улучшает неравенство Колмогорова-Рогозина, учитывая малость концентрации слагаемых. В работе [11] неравенство Кестена было доказано для случая многомерных случайных векторов и векторов со значениями в гильбертовом пространстве. В следующей теореме приводится доказательство неравенства Кестена для векторов со значениями в гильбертовом пространстве с указанием значения абсолютной константы.

Теорема 5. *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые случайные векторы со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Тогда для любого $\lambda > 0$ выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} Q(S_n, \Sigma_\lambda) &\leqslant C_2 \max_{1 \leqslant j \leqslant n} Q(X_j, \Sigma_\lambda) \left(\sum_{k=1}^{n} D(\tilde{X}_k, \lambda) \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\leqslant C_2 \max_{1 \leqslant j \leqslant n} Q(X_j, \Sigma_\lambda) \left(\sum_{k=1}^{n} (1 - Q(X_k, \Sigma_\lambda)) \right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (16) \end{aligned}$$

где $C_2 = \left(\frac{4+3\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{6}}{3} \right) C_1 = 37.816...$

Доказательство теоремы 5. Для $n = 1$ утверждение теоремы (с $C_2 = 1$) следует из неравенства $D(X, \lambda) \leqslant 1$. Так что будем далее считать, что $n \geqslant 2$.

I. Рассмотрим случай $\mathbb{R}^d$.

Если $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} Q(X_j, \Sigma_\lambda) \geqslant \frac{1}{2}$, тогда утверждение теоремы (с $C_2 = 2C_1$) получаем непосредственно из неравенства (12) теоремы 4.

Если же $Q(X_j, \Sigma_\lambda) < \frac{1}{2}$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$, то найдутся такие $\alpha_j > 1$, что $Q(X_j, \Sigma_{\alpha_j\lambda}) \geqslant \frac{1}{2}$, а для любого $0 < \beta_j < \alpha_j$ выполнено $Q(X_j, \Sigma_{\beta_j\lambda}) < \frac{1}{2}$. Не умаляя общности, мы можем считать $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \geqslant \alpha_n$.

Далее, пусть $a \in \mathbb{R}^d$, тогда

$$\mathbf{P}(S_n + a \in \Sigma_\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathbf{P}(X_n + x \in \Sigma_\lambda)\mathbf{P}(S_{n-1} + a \in dx).$$

Пусть x_0 такое, что $Q(X_n, \Sigma_{\alpha_n\lambda}) = \mathbf{P}(X_n + x_0 \in \Sigma_{\alpha_n\lambda})$. Тогда можем написать:

$$\mathbf{P}(S_n+a\in\Sigma_\lambda)=\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathbf{P}((X_n+x\in\Sigma_\lambda) \cap (X_n+x_0\in\Sigma_{\alpha_n\lambda}))\mathbf{P}(S_{n-1}+a \in dx)$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathbf{P}((X_n+x\in\Sigma_\lambda) \cap (X_n + x_0 \notin \Sigma_{\alpha_n\lambda}))\mathbf{P}(S_{n-1}+a\in dx)=I_1+I_2 \quad (17)$$

Сначала оценим I_1:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathbf{P}((X_n + x \in \Sigma_\lambda) \cap (X_n + x_0 \in \Sigma_{\alpha_n\lambda}))\mathbf{P}(S_{n-1} + a \in dx) \\ &\leqslant \int\limits_{\Sigma_{(1+\alpha_n)\lambda}+x_0} \mathbf{P}(X_n + x \in \Sigma_\lambda)\mathbf{P}(S_{n-1} + a \in dx) \\ &\leqslant Q(X_n, \Sigma_\lambda)Q(S_{n-1}, \Sigma_{(1+\alpha_n)\lambda}) \\ &\leqslant C_1 Q(X_n.\Sigma_\lambda)\left(\sum_{k=1}^{n-1} D(\tilde{X}_k, (1+\alpha_n)\lambda)\right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее будем оценивать I_2:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathbf{P}((X_n + x \in \Sigma_\lambda) \cap (X_n + x_0 \notin \Sigma_{\alpha_n\lambda}))\mathbf{P}(S_{n-1} + a \in dx) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathbf{P}(X_n+x\in\Sigma_\lambda | X_n + x_0 \notin \Sigma_{\alpha_n\lambda})\mathbf{P}(X_n + x_0 \notin \Sigma_{\alpha_n\lambda})\mathbf{P}(S_{n-1}+a\in dx) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathbf{P}(X_n \in dy | X_n+x_0 \notin \Sigma_{\alpha_n\lambda})\mathbf{P}(S_{n-1}+a+y\in\Sigma_\lambda) \leqslant \frac{1}{2}Q(S_{n-1}, \Sigma_\lambda) \end{aligned} \quad (19)$$

Учитывая (17), (18), (19) и произвольность $a \in \mathbb{R}^d$, получим:

$$Q(S_n, \Sigma_\lambda) \leqslant C_1 Q(X_n, \Sigma_\lambda) \left(\sum_{k=1}^{n-1} D(\tilde{X}_k, (1+\alpha_n)\lambda) \right)^{-1/2} + \frac{1}{2} Q(S_{n-1}, \Sigma_\lambda) \tag{20}$$

Принимая во внимание (5), имеем:

$$D(\tilde{X}_k, (1+\alpha_n)\lambda) \geqslant \frac{1}{4}(1 - Q(X_k, \Sigma_{\frac{1+\alpha_n}{2}\lambda})).$$

Поскольку $\frac{1+\alpha_n}{2} < \alpha_n$ и $\alpha_n = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\alpha_j\}$, то по выбору α_j имеем $Q(X_k, \Sigma_{\frac{1+\alpha_n}{2}\lambda}) < \frac{1}{2}$, и следовательно, $D(\tilde{X}_k, (1+\alpha)\lambda) \geqslant \frac{1}{8}$. Подставляя это в (20), получаем:

$$Q(S_n, \Sigma_\lambda) \leqslant A \frac{1}{\sqrt{n-1}} Q(X_n, \Sigma_\lambda) + \frac{1}{2} Q(S_{n-1, \Sigma_\lambda}), \tag{21}$$

где $A = 2\sqrt{2}C_1$.

Из последнего неравенства следует, что

$$Q(S_n, \Sigma_\lambda) \leqslant A \sum_{j=0}^{n-1} Q(X_{n-j}, \Sigma_\lambda) 2^{-j} (\max\{n-j-1, 1\})^{-1/2}$$
$$\leqslant A \max_{1 \leqslant j \leqslant n} Q(X_j, \Sigma_\lambda) \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j} (\max\{n-j-1, 1\})^{-1/2}$$

Оценим сумму:

$$\sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j} (\max\{n-j-1, 1\})^{-1/2} = \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]-1} 2^{-j} (n-j-1)^{-1/2}$$
$$+ \sum_{j=[\frac{n}{2}]}^{n-1} 2^{-j} (\max\{n-j-1\})^{-1/2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{[\frac{n}{2}]-1} 2^{-j}$$
$$+ \sum_{j=[\frac{n}{2}]}^{n-1} 2^{-j} \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \tag{22}$$

Тогда

$$Q(S_n, \Sigma_\lambda) \leqslant B \max_{1 \leqslant j \leqslant n} Q(X_j, \Sigma_\lambda) \frac{1}{\sqrt{n}}, \tag{23}$$

где $B = (2\sqrt{2} + \sqrt{3})A$.

Осталось воспользоваться свойством (4): $1 \geqslant D(\tilde{X}_k, \lambda)$, отсюда $n \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} D(\tilde{X}_k, \lambda)$ и следовательно $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} D(\tilde{X}_k, \lambda)\right)^{-1/2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Окончательно получаем

$$Q(S_n, \Sigma_\lambda) \leqslant C_2 \max_{1 \leqslant j \leqslant n} Q(X_j, \Sigma_\lambda) \left(\sum_{k=1}^{n} D(\tilde{X}_k, \lambda)\right)^{-1/2}, \tag{24}$$

где $C_2 = (8 + 2\sqrt{6})C_1$.

Второе неравенство в теореме следует из свойства (4)

II. Переход от пространства $\mathbb{R}^d$ к произвольному сепарабельному гильбертовому пространству $\mathbf{H}$ производится так же как и в доказательстве теоремы 4. $\square$

Автор благодарен рецензенту за замечания, способствовавшие существенному улучшению рукописи.

Список литературы

1. P. Lévy, *Théorie de láddition des variables aléatoires.* — Paris: Gautier-Villars, 1937.
2. A. Kolmogorov, *Sur les propriétés des fonctions de conctytration de M.P.Lévy.* — Ann. Inst. Henri Poincaré, **16** (1958), 27–34.
3. Б. А. Рогозин, *Об одной оценке функций концентрации.* — Теория вероятн. и ее примен. **6** (1961), 103–105.
4. C.-G. Esseen, *On the concentration function of a sum of independent random variables.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw, Geb. **9** (1968), 290–308.
5. H. Kesten, *A sharper form of the Doeblin-Levy-Kolmogorov-Rogozin inequality for concentration functions.* — Math. Scand. **25** (1969), 133–144.
6. А. Ю. Зайцев, *Оценка максимальной вероятности в проблеме Литтлвуда–Оффорда.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **441** (2015), 204–209.
7. В. Хенгартнер, Р. Теодореску, *Функции концентрации.* М., Наука, 1980.
8. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* М., Наука, 1972.
9. Г. Зигель, *Верхние оценки для функции концентрации в гильбертовом пространстве.* — Теор. вероятн. и ее примен. **26** (1981), 335–349.
10. J. Enger, *Bounds for the concentration function of a sum of independent random vectors with a Hilbert space.* — Thesis, Uppsala Univ.Press, Uppsala, 1975.
11. С. М. Ананьевский, А. Л. Мирошников, *Локальные оценки функции концентрации Леви в многомерном и гильбертовом пространстве.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР **130**(1983), 6–10.
12. С. В. Нагаев, С. С. Ходжабагян, *Об оценке функции концентрации сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **41** (1996), 655–665.

13. Я. С. Голикова, *Об улучшении оценки расстояния между распределениями последовательных сумм независимых случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **474** (2018), 118–123.
14. Е. Л. Майстренко, *Оценка абсолютной постоянной в неравенстве для равномерного расстояния между распределениями последовательных сумм независимых случайных векторов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 216–219.

Ananjevskii S. M. On constants in the Kolmogorov–Rogozin and Kesten inequalities in a Hilbert space.

In this paper, we refine the values of the absolute constants in the Kolmogorov–Rogozin and Kesten inequalities for the concentration function of the sum of independent random vectors in a Hilbert space.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: ananjevskii@mail.ru

Поступило 1 июня 2021 г.