Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 500, 2021 г.

А. В. Яковлев

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОГРУЖЕНИЯ ПОЛЕЙ

1. **Введение.** Мы используем обычные для теории полей обозначения; напомним некоторые из них.

- K^* – мультипликативная группа поля K;
- $\mathrm{Gal}(K/k)$ – группа Галуа расширения Галуа K/k;
- K^S – множество элементов из K, инвариантных относительно подгруппы S группы Галуа расширения K/k;
- $Nm_{K/k}(w)$ – норма элемента $w \in K$ для расширения полей K/k;
- $\mathbb{F}_2$ – поле из двух элементов.

Пусть K/k – расширение Галуа с группой Галуа F, и пусть $\varphi\colon G \to F = \mathrm{Gal}(K/k)$ – эпиморфизм конечных групп. Мы обозначаем через $(K/k, G, \varphi)$ следующую задачу погружения:

построить расширение Галуа L/k с группой Галуа G, такое что $L \supset K$ и ограничение любого автоморфизма $g \in G = \mathrm{Gal}(L/k)$ на K совпадает с $\varphi(g)$.

Всюду далее G_n – группа верхних унитреугольных матриц порядка $n \geqslant 4$ над полем $\mathbb{F}_2$, то есть группа матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$a_{ij} \in \mathbb{F}_2$. Как обычно, мы обозначаем через e_{ij} матрицу, единственный ненулевой элемент которой равен 1 и расположен в i-й строке и j-м столбце. Обозначим через $g_{ij} \in G_n$ матрицу $E + e_{ij}$, где $1 < i < j \leqslant n$, а E – единичная матрица. Для $1 \leqslant s \leqslant n$ пусть H_s – множество всех таких матриц $g \in G_n$, что все ненулевые элементы матрицы $g - E$ расположены выше $s+1$-й диагонали. Иначе говоря, H_s – подгруппа G_n, порождённая элементами g_{ij} с $j - i > s$. Очевидно, что H_s

Ключевые слова: расширения Галуа, задача погружения.

– нормальная подгруппа G_n. Положим $F_n = G_n/H_1$, $\bar{G}_n = G_n/H_2$, $\varphi_n\colon G_n \to G_n/H_1 = F_n$, $\bar{\varphi}_n\colon \bar{G}_n = G_n/H_2 \to G_n/H_1 = F_n$ – канонические эпиморфизмы групп на факторгруппы. Заметим, что F_n – элементарная абелева группа порядка 2^{n-1}. Целью работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть k – поле, характеристика которого отлична от 2, и пусть K_n/k – расширение Галуа с группой Галуа F_n. Если разрешима задача погружения $(K_n/k, \bar{G}_n, \bar{\varphi}_n)$, то разрешима и задача погружения $(K_n/k, G_n, \varphi_n)$.*

Замечание. Решение автоматически будет полем (а не алгеброй Галуа), так как G_n – p-группа (при $p = 2$), а ядро задачи погружения содержится в её коммутанте.

Это утверждение в качестве гипотезы было высказано А.Палом и для ряда случаев (в частности, при $n = 4$) доказано им и другими авторами с использованием достаточно глубоких результатов (см., например, [2, 3]). Я узнал об этой гипотезе из его доклада на коллоквиуме факультета математики и компьютерных наук СПбГУ в сентябре 2019 года. И только год спустя я увидел, что задача очень проста, и для её решения достаточны лишь самые элементарные сведения о задаче погружения. Это элементарное доказательство и приведено ниже. [1]

2. **Теорема Фаддеева.** Следующее утверждение почти очевидно, но оно играет ключевую роль в доказательстве теоремы 1. По-видимому, впервые оно было осознано Д. К. Фаддевым и было включено им в курс по задаче погружения, который он читал в конце 50-х годов на математико-механическом факультете тогда Ленинградского университета.

Теорема 2 ([1], теорема 3.7 из §7 главы 3). *Пусть K/k – расширение Галуа с группой Галуа F, F_0 – подгруппа F,*

$$1 \to I_0 \to G_0 \xrightarrow{\varphi_0} F_0 \to 1 \qquad (*)$$

– расширение конечных групп с абелевым ядром, $c \in H^2(F_0, I_0)$ – класс когомологий, отвечающий этому расширению, $I = \mathbb{Z}[F] \otimes_{\mathbb{Z}[F_0]} I_0$,

$$1 \to I \to G \xrightarrow{\varphi} F \to 1 \qquad (**)$$

[1]Для полей характеристики 2 и 2-групп Галуа задачи погружения всегда разрешимы, так что утверждение теоремы тривиально выполняется и в этом случае.

– расширение с классом когомологий $d \in H^2(F, I)$, в который класс c переводится изоморфизмом

$$H^2(F, I_0) \to H^2(F, \mathbb{Z}[F] \otimes_{\mathbb{Z}[F_0]} I_0) = H^2(F, I).$$

Далее, пусть L_0/K^{F_0} – решение задачи погружения $(K/K^{F_0}, G_0, \varphi_0)$. Тогда существует решение L/k задачи погружения $(K/k, G, \varphi)$ (быть может, не поле, а алгебра Галуа), содержащее расширение L_0/K^{F_0}.

Отметим, что если расширение $(*)$ расщепляется, то и $(**)$ – расщепляющееся расширение.

3. Одна элементарная лемма.

Лемма 1. *Пусть G – группа с образующими f, g, h и определяющими соотношениями*

$$f^2 = g^2 = h^2 = e, \quad [f, g] = h,$$

и пусть L/k – расширение Галуа с группой Галуа G. Подполя $K_1 = L^{\langle g,h \rangle}$, $K_2 = L^{\langle f,h \rangle}$ – квадратичные расширения k; пусть $b \in k$ – такой элемент, что $K_2 = k(\sqrt{b})$. Тогда существует элемент $w \in K_1$, такой что $b = Nm_{K_1/k}(w) = w^{1+f}$.

Доказательство. Группа G является полупрямым произведением группы $\langle f \rangle$ и нормальной подгруппы $I = \langle g, h \rangle$. Группа I – элементарная абелева 2-группа с базисом g, h, и действие f на I задаётся формулами $g^f = f^{-1}gf = h$, $h^f = f^{-1}hf = h$. Пусть $M \supset K^*$ – множество элементов мультипликативной группы поля L, квадраты которых принадлежат K_1. Как хорошо известно, $\langle f \rangle$-модуль M/K_1^* изоморфен модулю характеров $\langle f \rangle$-модуля I, поэтому существует элемент $\bar{\omega} \in M/K_1^*$, порождающий M/K_1^* как $\langle f \rangle$-модуль. Пусть $\omega \in L$ – элемент, класс которого по модулю K_1^* равен $\bar{\omega}$. Тогда $w' = \omega^2 \in K_1$.

Элемент $w' = \omega^2 \in K_1$ инвариантен относительно h, поэтому $\omega^h = \pm\omega$ и

$$(\omega^{1+f})^h = (\omega^h)^{1+f} = (\pm 1)^{1+f} \omega^{1+f} = \omega^{1+f},$$

так что элемент ω^{1+f} инвариантен относительно h. Кроме того, он инвариантен относительно f, так что он принадлежит полю $K_2 = L^{\langle f,h \rangle}$. Заметим, что элемент $\bar{\omega}^{1+f} \in M/K^*$ не исчезает, поэтому ω^{1+f} не принадлежит полю K_1 и тем более полю k. Следовательно, $K_2 = k(\omega^{1+f})$. Итак,

$$k(\sqrt{b}) = K_2 = k(\omega^{1+f}) = k(\sqrt{w'^{1+f}});$$

следовательно, существует элемент $d \in k$, такой что $b = d^2 w'^{1+f}$. Положим $w = dw'$; тогда $b = w^{1+f} = Nm_{K_1/k}(w)$. $\square$

4. **Обозначения.** Перед тем, как начать доказательство теоремы 1, уточним некоторые обозначения. Хотя группами Галуа встречающихся полей будут факторгруппы группы G_n или её подгрупп, мы сохраним для их элементов обозначения g_{ij}. Например, группа Галуа F_n расширения K_n/k порождается элементами $g_{12}, g_{23}, \ldots, g_{n-1,n}$, а элементы g_{ij} с $j - i > 1$ действуют на K_n тривиально. Обозначим через k_i квадратичное расширение поля k, состоящее из элементов поля K_n, которые не двигаются всеми автоморфизмами g_{st}, кроме $g_{i,i+1}$, а через $a_i \in k$ – такой элемент, определённый с точностью до квадратов, что $k_i = k(\sqrt{a_i})$. Таким образом,

$$K_n = k_1 k_2 \ldots k_{n-1} = k(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_{n-1}}).$$

В ходе доказательства мы будем рассматривать несколько задач погружения, связанных с группой G_n или факторгруппами её подгрупп. Хотя мы всегда точно формулируем, по каким подгруппам надо факторизовать G_n или подгруппу G_n, и какие элементы составляют ядро задачи, разобраться в этом требует некоторых усилий; поэтому мы будем изображать это в матричной форме на примере группы G_7. Пусть H', $H'' \supset H'$ – нормальные подгруппы G_n, порождённые некоторыми из элементов g_{st}, $G' = G/H'$, $F' = G/H''$, φ' – естественный эпиморфизм $G' \to F'$, $I' = \operatorname{Ker} \varphi' = H''/H'$. Графически изобразим эту ситуацию верхней треугольной матрицей, в которой отсутствующие значки в матрицах отвечают элементам из H', а кружочки $\circ$ – элементам $H''/H' = \operatorname{Ker} \varphi'$. Мы не будем выписывать эту матрицу для произвольного n, а ограничимся явной записью для $n = 7$, из которой будет понятно, как выглядит эта матрица в общем случае. Например, для задач погружения из теоремы 1 соответствующие матрицы таковы:

$$\bar{G}_n \underset{n=7}{=} \begin{pmatrix} 1 & * & \circ & & & & \\ & 1 & * & \circ & & & \\ & & 1 & * & \circ & & \\ & & & 1 & * & \circ & \\ & & & & 1 & * & \circ \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad G_n \underset{n=7}{=} \begin{pmatrix} 1 & * & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & 1 & * & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & & 1 & * & \circ & \circ & \circ \\ & & & 1 & * & \circ & \circ \\ & & & & 1 & * & \circ \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

5**. Доказательство теоремы 1.** Пусть $\bar{L}_n$ – решение задачи погружения $(K_n/k, \bar{G}_n, \bar{\varphi}_n)$, которое существует по условию теоремы 1.

Лемма 2. *Существуют*

(1) *элемент* $w_1 \in k_1$*, такой что* $a_2 = Nm_{k_1/k}(w_1)$*;*
(2) *элемент* $w_3 \in k_3$*, такой что* $a_2 = Nm_{k_3/k}(w_3)$*;*
(3) *элементы* $d \in k$*,* $w \in k_1k_3$*, такие что* $a_2 = d^2 Nm_{k_1k_3/k}(w)$*.*

Доказательство. (1) Пусть L – подполе элементов из $\bar{L}_n$, состоящее из всех элементов, инвариантных относительно всех g_{ij} с $j > 3$. В лемме 1 положим $f = g_{12}$, $g = g_{23}$, $h = g_{13}$. Тогда $L^{\langle g,h\rangle} = k_1$, $L^{\langle f,h\rangle} = k_2 = k(\sqrt{a_2})$, и по этой лемме существует элемент $w_1 \in k_1$, такой что $a_2 = Nm_{k_1/k}(w_1)$.

(2) Пусть L – подполе элементов из $\bar{L}_n$, состоящее из всех элементов, инвариантных относительно g_{12}, g_{13} и всех g_{ij} с $j > 5$, $f = g_{34}$, $g = g_{23}$, $h = g_{23}$. Тогда $L^{\langle g,h\rangle} = k_3$, $L^{\langle f,h\rangle} = k_2 = k(\sqrt{a_2})$, и по лемме 1 существует элемент $w_3 \in k_1$, такой что $a_2 = Nm_{k_3/k}(w_3)$.

(3) Элемент w_1 инвариантен относительно g_{34}, а элемент w_3 инвариантен относительно g_{12}; поэтому

$$\begin{aligned}(w_1/w_3)^{g_{12}g_{34}+1} &= w_1^{g_{12}+1}/w_3^{g_{34}+1} \\ &= Nm_{k_1/k}(w_1)/Nm_{k_3/k}(w_3) = a_2/a_2 = 1,\end{aligned}$$

и по теореме Гильберта 90 существует элемент $w \in k_1k_3$, такой что $w^{g_{12}g_{34}-1} = w_1/w_3$. Мы имеем:

$$\begin{aligned}Nm_{k_1k_3/k}(w) &= (w^{g_{12}g_{34}+1})^{g_{12}+1} = (w^2 w^{g_{12}g_{34}-1})^{g_{12}+1} = (w^2 w_1/w_3)^{g_{12}+1} \\ &= (w^{g_{12}+1}/w_3)^2 w_1^{g_{12}+1} = a_2(w^{g_{12}+1}/w_3)^2.\end{aligned}$$

Элемент $d = w_3/w^{g_{12}+1}$ обладает следующими свойствами:

$$d^2 = a_2/Nm_{k_1k_3/k}(w) \in k; \qquad d^{g_{12}} = w_3^{g_{12}}/(w^{g_{12}+1})^{g_{12}} = w_3/w^{g_{12}+1} = d.$$

Множество элементов поля k_1k_3, квадраты которых принадлежат k^*, является объединением четырёх множеств k, $\alpha_1 k$, $\alpha_3 k$, $\alpha_1\alpha_3 k$, где $\alpha_1 = \sqrt{a_1}$, $\alpha_3 = \sqrt{a_3}$. При этом

$$\alpha_1^{g_{12}-1} = \alpha_3^{g_{34}-1} = -1, \quad \alpha_1^{g_{34}-1} = \alpha_3^{g_{12}-1} = 1.$$

Первое из указанных выше свойств элемента d показывает, что d принадлежит одному из множеств k^*, $\alpha_1 k^*$, $\alpha_3 k^*$, $\alpha_1\alpha_3 k^*$, а второе – что d не принадлежит множествам $\alpha_1 k^*$, $\alpha_1\alpha_3 k^*$, так как элементы этих множеств под действием g_{12} умножаются на -1. Следовательно, $d \in$

$k \cup \alpha_3 k$. Точно так же из представления нормы w в виде $Nm_{k_1 k_3/k}(w) = (w^{g_{12}g_{34}+1})^{g_{34}+1}$ получаем, что $d \in k^* \cup \alpha_1 k^*$. Таким образом, $d \in k^*$, и $a_2 = d^2 Nm_{k_1 k_3/k}(w)$, что и требовалось. $\square$

Лемма 3. *Пусть $\widetilde{G}_n$ – факторгруппа G_n по подгруппе, порождённой всеми g_{ij} с $j - i > 2$, кроме g_{14}, $\widetilde{F}_n$ – факторгруппа $\bar{G}_n$ по подгруппе, порождённой g_{13}, g_{23}, g_{24}, $\widetilde{\varphi}_n \colon \widetilde{G}_n \to \widetilde{F}_n$ – канонический эпиморфизм группы на факторгруппу:*

$$\widetilde{G}_n \underset{n=7}{=} \begin{pmatrix} 1 & * & \circ & \circ & & & \\ & 1 & \circ & \circ & & & \\ & & 1 & * & * & & \\ & & & 1 & * & * & \\ & & & & 1 & * & * \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \ \widetilde{F}_n \underset{n=7}{=} \begin{pmatrix} 1 & * & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & * & * & & \\ & & & 1 & * & * & \\ & & & & 1 & * & * \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$\bar{L}'$ – подполе $\bar{L}$, состоящее из всех элементов, инвариантных относительно g_{13}, g_{23}, g_{24}, так что $\mathrm{Gal}(\bar{L}'/k) = \widetilde{F}_n$. Тогда существует решение $\widetilde{L}$ задачи погружения $(\bar{L}'/k, \widetilde{G}_n, \widetilde{\varphi}_n)$, содержащее квадратный корень ω из элемента $w \in k_1 k_3$, построенного в лемме 2. При этом $k_2 = k(\alpha)$, где $\alpha = \omega^{1+g_{12}+g_{13}+g_{14}}$, – подполе $\widetilde{L}$, состоящее из элементов, инвариантных относительно всех g_{ij}, кроме g_{12}.

Доказательство. Положим в теореме Фаддеева

$F = \widetilde{F}_n$, F_0 – подгруппа $\widetilde{F}_n$ порождённая всеми g_{ij} с $j > 4$,

$I_0 = \langle g_{14} \rangle$, $I = \langle g_{13}, g_{14}, g_{23}, g_{24} \rangle = \mathbb{Z}[F] \otimes_{\mathbb{Z}[F_0]} I_0$,

$G = \widetilde{G}_n = FI$, $G_0 = F_0 \times I_0$ – подгруппа $\widetilde{G}_n$, порождённая g_{14} и всеми g_{ij} с $j > 4$,

$K = \bar{L}'$, $\varphi = \widetilde{\varphi}_n$, φ_0 – ограничение $\widetilde{\varphi}_n$ на G_0.

Пусть L_0 – поле, полученное присоединением к полю $K = \bar{L}'$ квадратного корня ω из w. Поскольку $w \in k_1 k_3 = K^{F_0}$, это поле решает прямую задачу погружения $(K/K^{F_0}, G_0, \varphi_0)$ с циклическим ядром I_0 порядка 2. По теореме Фаддеева тогда существует содержащее L_0 решение $\widetilde{L}$ полупрямой задачи погружения $(K/k, G, \varphi)$, то есть задачи погружения $(\bar{L}'/k, \widetilde{G}_n, \widetilde{\varphi}_n)$.

Элемент $\omega \in L_0 \subset \widetilde{L}$ инвариантен относительно всех g_{ij} с $j > 4$, поэтому элемент $\omega^{1+g_{12}+g_{13}+g_{14}} \in \widetilde{L}$ инвариантен относительно всех g_{ij}, кроме, быть может, g_{23}, а его квадрат $w^{1+g_{12}+g_{13}+g_{14}} = a_2/d^2$ не является квадратом в $\bar{L}'$; поэтому он порождает над k поле элементов из $\widetilde{L}$, инвариантных относительно всех g_{ij}, кроме g_{23}, то есть поле k_2. $\square$

Замечание. Из доказанной леммы, в частности, вытекает утверждение теоремы для $n = 4$: в этом случае построенное расширение $\widetilde{L}/k$ решает задачу погружения $(K_4/k, G_4, \varphi_4)$. Как отмечено выше, это было доказано и ранее, но с использованием более сложной техники.

В следующих далее рассуждениях появляются факторгруппы не всей группы $\widetilde{G}_n$, а её подгруппы $\widetilde{G}_n^0$, порождённой всеми g_{ij}, кроме g_{12}:

$$\widetilde{G}_n^0 \underset{n=7}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * & & & \\ & 1 & * & * & & & \\ & & 1 & * & * & & \\ & & & 1 & * & * & \\ & & & & 1 & * & * \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\widehat{L}$ – подполе поля $\widetilde{L}$, состоящее из всех элементов, инвариантных относительно g_{23}, g_{24}; оно не является нормальным расширением k, но зато является нормальным расширением полей k_1 и $K' = k_1'k_3 \dots k_{n-1}$, где $k_1' = k_1(\omega^{1+g_{34}})$. Группы Галуа $\widehat{G}_n$ и F_n' расширений $\widehat{L}/k_1$ и K'/k_1 имеют вид

$$\widehat{G}_n \underset{n=7}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & * & * & & \\ & & & 1 & * & * & \\ & & & & 1 & * & * \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad F_n' \underset{n=7}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & * & & & \\ & & & 1 & * & & \\ & & & & 1 & * & \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix};$$

первая из них – факторгруппа $\widetilde{G}_n^0$ по подгруппе, порождённой g_{23} и g_{24}, а вторая – факторгруппа первой по подгруппе, порождённой g_{14} и всеми $g_{s,s+2}$ с $s \geqslant 3$.

Дальнейшее доказательство теоремы ведем индукцией по n. Как отмечено в замечании после леммы 3, теорема справедлива при $n = 4$. Пусть $n \geqslant 5$, и теорема уже доказана для группы G_{n-1}.

Лемма 4. *Пусть G_n^0 – подгруппа G_n, порождённая всеми g_{ij}, кроме g_{12}, а G'_n – её факторгруппа по нормальной подгруппе, порождённой всеми g_{2j} из второй строки:*

$$G'_n \underset{n=7}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * & * & * & * \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & * & * & * & * \\ & & & 1 & * & * & * \\ & & & & 1 & * & * \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее, пусть $\varphi'_n \colon G'_n \to F'_n$, $\widehat{\varphi}_n \colon \widehat{G}_n \to F'_n$ – канонические эпиморфизмы групп на факторгруппы. Существует решение L'/k_1 задачи погружения $(K'/k_1, G'_n, \varphi'_n)$.

Доказательство. Группы G'_n, $\widehat{G}_n$, F'_n изоморфны соответственно группам G_{n-1}, $\bar{G}_{n-1}$, F_{n-1}, и эти изоморфизмы согласованы со связывающими их гомоморфизмами: диаграмма

$$\begin{tikzcd} G'_n \arrow[r, "\varphi'_n"] \arrow[d] & F'_n \arrow[d] & \widehat{G}_n \arrow[l, "\widehat{\varphi}_n"'] \arrow[d] \\ G_{n-1} \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] & F_{n-1} & \bar{G}_{n-1} \arrow[l, "\bar{\varphi}_{n-1}"'] \end{tikzcd},$$

вертикальные стрелки которой – упомянутые выше изоморфизмы, коммутативна. Поэтому задачи погружения

$$(K'/k_1, G'_n, \varphi'_n), \qquad (K'/k_1, \bar{G}'_n, \bar{\varphi}'_n)$$

фактически являются задачами вида

$$(K_{n-1}/k, G_{n-1}, \varphi_{n-1}), \qquad (K_{n-1}/k, \bar{G}_{n-1}, \bar{\varphi}_{n-1})$$

из теоремы. Но задача $(K'/k_1, \widehat{G}_n, \bar{\varphi}'_n)$ разрешима – расширение $\widehat{L}/k_1$ решает её, поэтому по предположению индукции существует и решение L' задачи погружения $(K'/k_1, G'_n, \varphi'_n)$. $\square$

6. **Окончание доказательства теоремы 1.** Положим $G_0 = G'_n = \mathrm{Gal}(L'/k_1)$, I_0 – подгруппа группы G'_n, порождённая всеми g_{1s} с $3 \leqslant s < n$, $L_0 = L'$, $K = L_0^{I_0}$, $G = G_n$, I – подгруппа G, порождённая всеми g_{1s}, g_{2s} с $3 \leqslant s < n$. Поле K нормально не только над $k_1 = K^{F_0}$, но и над полем k, причём $\mathrm{Gal}(K/k) = G/I$.

Следующие схемы отвечают полупрямым задачам погружения $(K/k_1, G_0, \varphi_0) = (K/K^{F_0}, G_0, \varphi_0)$ и $(K/k, G, \varphi)$:

$$G_0 \underset{n=7}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & * & * & * & * \\ & & & 1 & * & * & * \\ & & & & 1 & * & * \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad G_n \underset{n=7}{=} \begin{pmatrix} 1 & * & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & 1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & & 1 & * & * & * & * \\ & & & 1 & * & * & * \\ & & & & 1 & * & * \\ & & & & & 1 & * \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Поле $L_0 = L'$ решает первую из этих задач, а ядро I второй задачи изоморфно как G-модуль тензорному произведению $\mathbb{Z}[F] \otimes_{\mathbb{Z}[F_0]} I_0$; поэтому по теореме Фаддеева существует решение L второй задачи погружения, содержащее поле $L_0 = L'$. В частности, L содержит элемент $\omega^{1+g_{14}} \in k_1' \subset L'$; поэтому элемент $\alpha = \omega^{(1+g_{14})(1+g_{12})}$ принадлежит L. По лемме 3 поле $k(\alpha) = k_2$ состоит из всех элементов поля L, инвариантных относительно всех g_{ij}, кроме g_{23}. Таким образом, поле L решает задачу погружения $(K_n/k, G_n, \varphi_n)$.

Список литературы

1. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа*, Наука, М., 1990.
2. A. Pal, E. Szabo, *The strong Massey vanishing for fields with virtual cohomological dimension at most* 1, `asXiv:1811.06192`, 27 pages (2020).
3. Y. Harpaz, O. Wittenberg, *The Massey vanishing condition for number fields*, `asXiv:1904.06512`, 10 pages (2019).

Yakovlev A. V. About one Galois embedding problem.

We consider the Galois embedding problem of an extension with an elementary abelian 2-group in an extension with the Galois group isomorphic to the group of unitriangular matrices over the 2-element field. It is proved that the solvability of the maximal accompanying problem with central kernel of period 2 is sufficient for the solvability of the original problem.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28
Петродворец, 198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `yakovlev.anatoly@gmail.com`

Поступило 13 Мая 2021 г.