Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 500, 2021 г.

С. В. Шамов

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ БАШЕН ПОСТНИКОВА

§1. Введение

В данной работе мы рассматриваем башни Постникова произвольной триангулированной категории $\underline{C}$. Пусть даны (ко)гомологический функтор $H\colon \underline{C} \to \mathcal{A}$, произвольный объект $M \in \operatorname{Obj} \underline{C}$, его фильтрация Fil_M и башня Постникова $\mathrm{Po}_{\mathrm{Fil}_M}$. В §2 мы естественным образом строим в $\mathcal{A}$ спектральную последовательность $T(H, M)$ такую, что $E_1^{p,q} = H(M_{-p}[p+q])$, а $\partial_1^{p,q}$ определяются дифференциалами комплекса, ассоциированного с $\mathrm{Po}_{\mathrm{Fil}_M}$. Более того, если предполагать Fil_M ограниченной или усилить требования к H, то $T(H, M)$ будет сходиться к $E_\infty^n = H(M[n])$.

В §3 нами вычислены спектральные последовательности $T(\mathcal{H}, M)$ для некоторых классических фильтраций в гомотопической категории $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ и некоторого гомологического функтора $\mathcal{H}$. В том же параграфе для триангулированных категорий, снабженных весовой структурой (см. [1]), нами строятся *весовые спектральные последовательности* $T_w(H, M)$, обладающие схожими свойствами. В частности, $T_w(H, M)$ сходится к $H(M[n])$, если M ограничен в смысле весовой структуры (вне зависимости от весовой фильтрации объекта M, которая используется при построении $T_w(H, M)$).

Автор выражает благодарность и глубокую признательность своему научному руководителю, профессору М. В. Бондарко, за советы и ценные замечания при работе над данной статьёй.

1.1. Обозначения. Следуя [1], введём необходимые определения и обозначения.

- Для произвольной категории $\mathcal{C}$ и $X, Y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ множество морфизмов из X в Y будем обозначать через $\mathcal{C}(X, Y)$. Если то, чему соответствует морфизм φ, ясно из контекста, будем писать просто $\varphi \in \operatorname{Mor} \mathcal{C}$.

Ключевые слова: триангулированная категория, фильтрация, спектральная последовательность, весовая структура, весовой комплекс.

- Через $\underline{C}$ будем обозначать произвольную триангулированную категорию, через $\mathcal{A}$ – произвольную абелеву.
- Ковариантный (соответственно контравариантный) функтор $H\colon \underline{C} \to \mathcal{A}$ называется *гомологическим* (соответственно *когомологическим*), если он переводит выделенные треугольники в длинные точные последовательности[1].
- Для (ко)гомологического функтора H, $i \in \mathbb{Z}$, обозначение H_i (соответственно H^i) подразумевает $H \circ [-i]$.
- Пусть $M \in \operatorname{Obj}\underline{C}$. Набор данных

$$\mathrm{Fil}_M = \{M_{\leqslant i} \in \operatorname{Obj}\underline{C},\ h_i \in \underline{C}(M_{\leqslant i}, M),\ j_i \in \underline{C}(M_{\leqslant i}, M_{\leqslant i+1}),\ \ i \in \mathbb{Z}\}$$

  называется *фильтрацией* M, если $h_{i+1} \circ j_i = h_i$.
- Fil_M *ограничена сверху* (соответственно *снизу*), если $\exists l \in \mathbb{Z}$: $\forall i < l\, M_{\leqslant i} = 0$ (соответственно для любого $i > l$, h_i – изоморфизм).
- Дополним (любым способом) морфизмы j_i до выделенных треугольников:

$$M_{\leqslant i-1} \xrightarrow{j_{i-1}} M_{\leqslant i} \xrightarrow{c_i} M_i \xrightarrow{e_{i-1}} M_{\leqslant i-1}[1].$$

  Полученную структуру будем называть *башней (системой) Постникова для* Fil_M и обозначать $\mathrm{Po}_{\mathrm{Fil}_M}$.
- Обозначим $M^p = M_{-p}[p]$. Дифференциалы

$$d^p = c_{-p-1}[p+1] \circ e_{-p-1}[p]\colon M^p \to M^{p+1}$$

  задают на M^p структуру комплекса ([1, лемма 1.3.2]). Будем называть полученный комплекс *ассоциированным с* $\mathrm{Po}_{\mathrm{Fil}_M}$.

1.2. Точные пары. Напомним известное определение точных пар и некоторые их свойства ([3, упражнение III.7.2], [4, определение 5.9.1]). В этом параграфе мы будем считать, что $\mathcal{A} = R - \mathcal{M}od$ – категория модулей над некоторым фиксированным кольцом R. Данные определения легко переносятся на произвольную абелеву категорию при помощи теоремы Фрейда–Митчелла ([4, теорема 1.6.1], [4, замечание после 1.3.2]), или же при помощи явных построений (см. приложение).

- Пусть $E = E_1^{p,q}$, $D = D_1^{p,q}$ – биградуированные целыми числами объекты категории $\mathcal{A}$. Пусть заданы биградуированные морфизмы $i, j, k \in \operatorname{Mor}\mathcal{A}$, которые имеют бистепени $(-1, 1)$, $(0, 0)$ и

[1] Часто ковариантный функтор, удовлетворяющий этому условию, называют когомологическим.

$(1,0)$, причём последовательность $D \xrightarrow{i} D \xrightarrow{j} E \xrightarrow{k} D \xrightarrow{i} D$ точна в каждом члене. Тогда набор $\mathcal{E} = (D, E, i, j, k)$ называется *точной парой.*

- Положим
$$D' = \operatorname{Im} i, \quad E' = \operatorname{Ker}(jk)/\operatorname{Im}(jk),$$
$$i' = i|_{\operatorname{Im} i}, \quad j'(i(x)) = [j(x)], \quad k'([y]) = k(y), \tag{1.2.1}$$
где $[y]$ – класс элемента y в E'. Набор $\mathcal{E}' = (D', E', i', j', k')$ называется *производной (точной) парой.* Применяя (1.2.1) снова, мы получаем производные пары следующих порядков. Эти пары тоже биградуированы:
$$\mathcal{E}^{(r)} = (D^{p,q}_{r+1}, E^{p,q}_{r+1}, i^{(r)}, j^{(r)}, k^{(r)}) \quad \forall r \geqslant 0.$$
Морфизмы $i^{(r)}, j^{(r)}, k^{(r)}$ имеют бистепени $(-1, 1)$, $(r, -r)$, $(1, 0)$. Кроме того, дифференциалы
$$\partial^{p,q}_r = j^{(r-1)} k^{(r-1)} \colon E^{p,q}_r \to E^{p+r,\, q-r+1}_r$$
задают на $E^{p,q}_r$ структуру *спектральной последовательности (ассоциированной с $\mathcal{E}$).*
- $\mathcal{E}^{(r)} = (D^{(r)}, E^{(r)}, i^{(r)}, j^{(r)}, k^{(r)})$ выражаются через $\mathcal{E}$ следующим образом. Обозначим
$c = \operatorname{Coker} k$, $Z^r = \operatorname{Ker}(c \circ i^r) = k^{-1}(\operatorname{Im} i^r)$, $B^r = j(\operatorname{Ker}(i^r))$.
Тогда
$$D^{(r)} = \operatorname{Im} i^r, \quad E^{(r)} = Z^r/B^r,$$
$$i^{(r)} = i|_{\operatorname{Im}(i^r)}, \quad j^{(r)}(i^r(x)) = [j(x)], \quad k^{(r)}([y]) = k(y). \tag{1.2.2}$$

§2. Спектральная последовательность для $\mathrm{Po}_{\mathrm{Fil}_{\mathbf{M}}}$

В §2.1 мы строим спектральную последовательность $T(H, M)$ для гомологических и когомологических функторов. В §2.2 исследуем функториальность полученной конструкции (в зависимости от дополнительных предположений на Fil_M).

2.1. Построение спектральной последовательности $T(H, M)$.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная абелева категория. Морфизмы $f \in \mathcal{A}(A, B)$, $g \in \mathcal{A}(B, C)$ таковы, что $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$. Тогда*

(a) *Для любого морфизма $h \in \mathcal{A}(B, D)$,*
$$\operatorname{Im}(h)/\operatorname{Im}(hf) \cong \operatorname{Im}(g)/g(\operatorname{Ker} h);$$

(б) *Для любого морфизма* $h \in \mathcal{A}(D, B)$,

$$\mathrm{Ker}\,(gh)/\mathrm{Ker}\,h \cong f^{-1}(\mathrm{Im}\,h)/\mathrm{Ker}\,f.$$

Доказательство. В силу теоремы Фрейда–Митчелла, можно считать $\mathcal{A} = \mathcal{R} - \mathcal{M}od$.

(а) Рассмотрим отображение $\varphi(x)\colon\ \mathrm{Im}(h)/\,\mathrm{Im}(hf) \to \mathrm{Im}(g)/g(\mathrm{Ker}\,h)$, построенное по правилу $\varphi(x) = g(h^{-1}(x))$. Корректность и сюръективность очевидны. Проверим инъективность:

$$g(h^{-1}(x)) - g(h^{-1}(y)) \in g(\mathrm{Ker}\,h) \Leftrightarrow$$
$$h^{-1}(x) - h^{-1}(y) \in \mathrm{Ker}\,g + \mathrm{Ker}\,h = \mathrm{Im}\,f + \mathrm{Ker}\,h \Leftrightarrow x - y \in \mathrm{Im}(hf).$$

(б) Рассмотрим категорию $\mathcal{A}^{op}$, двойственную к $\mathcal{A}$. $\mathrm{Im}\,g^{op} = \mathrm{Ker}\,f^{op}$, значит, по предыдущему пункту,

$$\mathrm{Im}\,h^{op}/\,\mathrm{Im}(h^{op}g^{op}) \cong \mathrm{Im}\,f^{op}/\,f^{op}(\mathrm{Ker}\,h^{op}). \tag{2.1.1}$$

При переходе обратно в $\mathcal{A}$, ядра и коядра меняются местами. Пусть c – коядро h, тогда $f^{-1}(\mathrm{Im}\,h) = \mathrm{Ker}\,cf$. Заметим, что

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Im}(h) \xrightarrow{g} \mathrm{Im}(gh)) \cong \mathrm{Ker}\,(gh)/\mathrm{Ker}\,h,$$
$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Im}\,f \xrightarrow{c} \mathrm{Im}\,cf) \cong \mathrm{Ker}\,(cf)/\mathrm{Ker}\,f.$$

Левые части изоморфны, как двойственные к изоморфным объектам из (2.1.1). □

Предложение 2. *Пусть даны* $M \in \mathrm{Obj}(\underline{C})$, *фильтрация* Fil_M *и башня Постникова* $\mathrm{Po}_{\mathrm{Fil}_M}$ (*рис.* 1). *Пусть* $H\colon \underline{C} \to \mathcal{A}$ *– гомологический (т.е. ковариантный) функтор. Тогда существует спектральная последовательность* $T(H, M) = E_r^{p,q}$ *такая, что*

$$E_1^{p,q} = H(M_{-p}[p+q]) = H(M^p[q]) = H_{-q}(M^p),$$
$$\partial_1^{p,q} = H_{-p-q}(c_{-p-1}[1] \circ e_{-p-1}) = H_{-q}(d^p).$$

Более того, пусть выполнено следующее условие:

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ \ \exists i :\ \forall j > i\ \ H(M_{\leqslant -j}[n]) = 0,\ H(h_j[n]) \text{ – изоморфизм.} \tag{2.1.2}$$

Тогда $T(H, M)$ *сходится к* $E_\infty^n = H(M[n]) = H_{-n}(M)$. *А именно (проверяя определение сходимости спектральной последовательности из* [3, III.7.3]*), существует возрастающая ограниченная фильтрация* $F_n H_{\leqslant p} = \mathrm{Im}(H(h_p[n]))$ *такая, что*

$$F_n H_{\leqslant k}/F_n H_{\leqslant k-1} \cong E_\infty^{n-k,k}, \tag{2.1.3}$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
{} \arrow[dr, "\widehat{e_2}"] & & M_2[-1] \arrow[dr, "\widehat{e_1}"] & & M_1[-1] \arrow[dr, "\widehat{e_0}"] & & M_0[-1] \arrow[dr, "\widehat{e_{-1}}"] & & {} \\
{} & M_{\leqslant 2} \arrow[l, dash] \arrow[ur, "c_2", "{[1]}"'] & & M_{\leqslant 1} \arrow[ll, "j_1"] \arrow[ur, "c_1", "{[1]}"'] & & M_{\leqslant 0} \arrow[ll, "j_0"] \arrow[ur, "c_0", "{[1]}"'] & & M_{\leqslant -1} \arrow[ll, "j_{-1}"] \arrow[ur, "{[1]}"'] & {} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

Рис. 1. Башня Постникова $\mathrm{Po}_{\mathrm{Fil}_M}$ $(\widehat{e_i} = e_i[-1])$.

$$
\begin{tikzcd}
& {} & & {} & \\
{} \arrow[r] & H(M_{\leqslant 1}) \arrow[u, dash] \arrow[r, "H(c_1)"] & H(M_1) \arrow[r, "H(e_0)"] & H_{-1}(M_{\leqslant 0}) \arrow[u, dash] \arrow[r] & H_{-1}(M_0) \\
H_1(M_1) \arrow[r] & H(M_{\leqslant 0}) \arrow[u, "H(j_0)"] \arrow[r, "H(c_0)"] & H(M_0) \arrow[r, "H(e_{-1})"] & H_{-1}(M_{\leqslant -1}) \arrow[u, "H_{-1}(j_{-1})"'] \arrow[r] & H_{-1}(M_{-1}) \\
H_1(M_0) \arrow[r] & H(M_{\leqslant -1}) \arrow[u, "H(j_{-1})"] \arrow[r, "H(c_{-1})"] & H(M_{-1}) \arrow[r, "H(e_{-2})"] & H_{-1}(M_{\leqslant -2}) \arrow[u, "H_{-1}(j_{-2})"'] \arrow[r, dash] & {} \\
& {} \arrow[u] & & {} \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Рис. 2. Точная пара, ассоциированная с башней Постникова $(H_i = H \circ [-i])$.

где вложение $F_n H_{\leqslant k-1}$ *в* $F_n H_{\leqslant k}$ *индуцировано* $H(j_{k-1}[n])$.

Доказательство. Для каждого выделенного треугольника (рис. 1)

$$M_p[-1] \xrightarrow{e_{p-1}[-1]} M_{\leqslant p-1} \xrightarrow{j_{p-1}} M_{\leqslant p} \xrightarrow{c_p} M_p$$

получаем длинную точную последовательность

$$\begin{aligned}\cdots \to H(M_p[k-1]) &\xrightarrow{H(e_{p-1}[k-1])} H(M_{\leqslant p-1}[k]) \\ &\xrightarrow{H(j_{p-1}[k])} H(M_{\leqslant p}[k]) \xrightarrow{H(c_p[k])} H(M_p[k]) \to \dots .\end{aligned}$$

Рассмотрим точную пару $E_1^{p,q} = H(M_{-p}[p+q])$, $D_1^{p,q} = H(M_{\leqslant -p}[p+q])$. Она изображена на рис. 2, причём любая последовательность стрелок “вверх–вправо–вправо–вверх” является точной. В качестве $T(H, M)$ возьмём спектральную последовательность, ассоциированную с этой точной парой (построение описано в §1.2).

Пусть выполнено условие (2.1.2). Чтобы проверить (2.1.3), вычислим $E_r^{p,q}$ в терминах первого слоя (см. (1.2.2)). Для удобства рассмотрим только первый столбец, $n = p + q = 0$,

$$D_{r+1}^{p,q} = \operatorname{Im}(H(j)^r) = (H(j_{-p-1}) \circ \cdots \circ H(j_{-p-r}))(D_1^{p+r,q-r}),$$
$$\partial_r^{p,q} = H(c_{-p-r}[1]) \circ H(j[1])^{-(r-1)} \circ H(e_{-p-1}).$$

Чтобы получить $E_{r+1}^{p,q}$, нужно профакторизовать ядро $\partial_r^{p,q}$ по образу $\partial_r^{p-r,q+(r-1)}$,

$$Z_r^{p,q} = \operatorname{Ker}\partial_r^{p,q} = H(e_{-p-1})^{-1}\{(H(j[1])^r)(D_1^{p+r+1,q-r})\}, \qquad (2.1.4)$$

$$B_r^{p,q} = \operatorname{Im}\partial_r^{p-r,q+r-1} = H(c_{-p})\{\operatorname{Ker}(H(j_{-p+r}) \circ \cdots \circ H(j_{-p}))\}. \quad (2.1.5)$$

Для фиксированных p, q и достаточно больших r имеем

$$H(D_1^{p+r+1,q-r}) = H(M_{\leqslant -p-r-1}[1]) = 0,$$

откуда, в силу (2.1.4),

$$Z_\infty^{p,q} = \lim_{r\to\infty} Z_r^{p,q} = H(e_{-p-1})^{-1}(0) = \operatorname{Ker} H(e_{-p-1}) = \operatorname{Im} H(c_{-p}).$$

Также, с некоторого момента $H(h_{-p+r})$ и $H(j_{-p+r})$ становятся изоморфизмами. Поэтому ядра $\operatorname{Ker}(H(j_{-p+r}) \circ \cdots \circ H(j_{-p}))$ для достаточно больших r изоморфны друг другу. Следовательно, $B_r^{p,q}$ становятся изоморфны некоторому $B_\infty^{p,q}$ в силу (2.1.5).

Рассмотрим на $H(M)$ фильтрацию

$$F_0 H_{\leqslant p} = \operatorname{Im} H(h_p) \overset{\forall r\in\mathbb{N}}{=} H(h_{p+r})(\operatorname{Im}(H(j_{p+r-1}) \circ \cdots \circ H(j_p)))$$
$$= H(h_{p+r}) \circ H(j)^r(H(M_{\leqslant p})).$$

Легко видеть, что $F_0 H_{\leqslant p-1} \subset F_0 H_{\leqslant p}$ и вложение индуцировано $H(j_{p-1})$. Для достаточно больших p, $H(h_p)$ – изоморфизмы, $H(M_{\leqslant -p}) = 0$, откуда $F_0 H_{\leqslant p} \cong H(M)$, $F_0 H_{\leqslant -p} = 0$, т.е. $F_0 H$ – ограниченная фильтрация. Наконец, проверим, что $F_0 H_{\leqslant k}/F_0 H_{\leqslant k-1} \cong E_\infty^{-k,k}$.

Воспользуемся леммой 1(a). Положим $A = H(M_{\leqslant k-1})$, $B = H(M_{\leqslant k})$, $C = H(M_k)$, $D = H(M)$,

$$f = H(j_{k-1}), \quad g = H(c_k),$$
$$h = H(h_k) = H(h_{k+r}) \circ H(j_{k+r-1}) \circ \cdots \circ H(j_k)$$

для достаточно большого r, начиная с которого $H(h_{k+r-1})$ – изоморфизмы. В частности,

$$\operatorname{Ker} h = \operatorname{Ker}(H(h_{k+r}) \circ H(j)^r) \cong \operatorname{Ker} H(j)^r.$$

Тогда

$$\begin{aligned} F_0H_{\leqslant k}/F_0H_{\leqslant k-1} &= \operatorname{Im} H(h_k)/\operatorname{Im} H(h_{k-1}) \\ &= \operatorname{Im}(H(h_{k+r}) \circ H(j)^r)/\operatorname{Im}(H(h_{k+r}) \circ H(j)^r \circ H(j_{k-1})) \\ &\cong \operatorname{Im} H(c_k)/H(c_k)(\operatorname{Ker} H(j)^r) = Z_\infty^{-k,k}/B_\infty^{-k,k} = E_\infty^{-k,k}. \quad \square \end{aligned}$$

Предложение 3. *Условие* (2.1.2) *выполнено в следующих случаях*:

(1) Fil_M *ограничена*;
(2) Fil_M *ограничена снизу, для всех n верно $H(M_{\leqslant -j}[n]) = 0$ при достаточно больших j*;
(3) Fil_M *ограничена сверху, для всех n верно $H(h_j[n])$ – изоморфизмы при достаточно больших j.*

Доказательство. Функтор сдвига и гомологический функтор H переводят изоморфизмы в изоморфизмы. Более того, эти функторы аддитивны, а значит, переводят нулевой объект в нулевой. Поэтому, если Fil_M ограничена снизу (соответственно, сверху), то для любого n существует i, начиная с которого $H(h_i[n])$ – изоморфизм (соответственно, $H(M_{\leqslant -i}[n]) = 0$). $\square$

Следствие 4. *Для когомологического* (*т.е. контравариантного*) *функтора $\widetilde{H} : \underline{C} \to \mathcal{A}$ верно двойственное утверждение*: *для башни Постникова $\mathrm{Po}_{\mathrm{Fil}_M}$ существует спектральная последовательность $T(\widetilde{H}, M)$ такая, что*

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_1^{p,q} &= \widetilde{H}(M_p[-(p+q)]) = \widetilde{H}^q(M^{-p}), \\ \widetilde{\partial}_1^{p,q} &= \widetilde{H}^{p+q}(c_p \circ e_p[-1]) = \widetilde{H}^q(d^{-p-1}). \end{aligned}$$

Если для $\widetilde{H}$ выполняется условие (2.1.2), *то $T(\widetilde{H}, M)$ сходится к $\widetilde{E}_\infty^n = \widetilde{H}(M[-n]) = \widetilde{H}^n(M)$. А именно, существует возрастающая ограниченная фильтрация $F^n\widetilde{H}_{\leqslant p} = \operatorname{Ker}(\widetilde{H}(h_{-p}[-n]))$ такая, что*

$$F^n\widetilde{H}_{\leqslant k+1}/F^n\widetilde{H}_{\leqslant k} \cong \widetilde{E}_\infty^{n-k,k}, \tag{2.1.6}$$

где вложение $F^n\widetilde{H}_{\leqslant k}$ в $F^n\widetilde{H}_{\leqslant k+1}$ индуцировано морфизмом $\widetilde{H}(j_{-k-1}[-n])$.

Доказательство. Рассмотрим функтор $\widetilde{H}$ как гомологический $H\colon \underline{C} \to \mathcal{A}^{op}$, где $\mathcal{A}^{op}$ – двойственная категория. Построим в $\mathcal{A}^{op}$ спектральную последовательность $E_r^{p,q} = T(H, M)$. Перейдём к двойственной категории ещё раз, возвращаясь в $\mathcal{A}$, и положим

$$\widetilde{E}_r^{p,q} = E_r^{-p,-q}, \;\; \widetilde{\partial}_r^{p,q} = (\partial_r^{-p-r,-q+r-1})^{op}.$$

В частности,

$$\widetilde{E}_1^{p,q} = H(M^{-p}[-q]) = \widetilde{H}(M^{-p}[-q]),$$
$$\widetilde{\partial}_1^{p,q} = (\partial_1^{-p-1,-q})^{op} = \widetilde{H}(d^{-p-1}[-q]).$$

Проверим, что $\widetilde{E}_r^{p,q}$ образуют спектральную последовательность в $\mathcal{A}$, т.е. сохраняется эквивалентность

$$\widetilde{E}_{r+1}^{p,q} \cong \operatorname{Ker} \widetilde{\partial}_r^{p,q} / \operatorname{Im} \widetilde{\partial}_r^{p-r,q-r+1}.$$

Действительно, пусть $f, g \in \operatorname{Mor} \mathcal{A}$ таковы, что $g \circ f = 0$. Обозначим $k = \operatorname{Ker} g$, $c = \operatorname{Coker} f \in \operatorname{Mor} \mathcal{A}$. Как известно, существуют единственные морфизмы a, b такие, что $f = ka$, $g = bc$. При этом,

$$\operatorname{Ker} g / \operatorname{Im} f = \operatorname{Coker} a \cong \operatorname{Ker} b,$$

см. [3, II.6.3]. Для $f = \partial_r^{-p,-q}$ и $g = \partial_r^{-p-r,-q+r-1}$, получаем

$$\widetilde{E}_{r+1}^{p,q} = E_{r+1}^{-p,-q} \cong \operatorname{Ker} \partial_r^{-p,-q} / \operatorname{Im} \partial_r^{-p-r,-q+r-1}$$
$$\cong \operatorname{Ker}(b) = \operatorname{Coker}(b^{op}) = \operatorname{Ker} \widetilde{\partial}_r^{p,q} / \operatorname{Im} \widetilde{\partial}_r^{p-r,q+r-1}.$$

Предположим, что выполняется условие (2.1.2). Положим

$$F^n \widetilde{H}_{\leqslant p} = \operatorname{Ker} H(h_{-p}[-n]).$$

Очевидно, это возрастающая фильтрация. Для достаточно больших p, $\widetilde{H}(h_p[-n])$ – изоморфизмы, и $\widetilde{H}(M_{\leqslant -p}[-n]) = 0$, откуда $F^n \widetilde{H}_{-p} = 0$, и $F^n \widetilde{H}_{\leqslant p} = \widetilde{H}(M[-n])$, т.е. фильтрация ограничена.

Рассмотрим в $\mathcal{A}^{op}$ каноническую фильтрацию

$$F_n H_{\leqslant p} = \operatorname{Im} H(h_p[n]), \quad F_n H_{\leqslant k} / F_n H_{\leqslant k-1} = \operatorname{Coker}(i_{k-1}^n) = E_\infty^{n-k,k},$$

где $i_p^n\colon F_n H_{\leqslant p} \to F_n H_{\leqslant p+1}$ – вложения, индуцированные $H(j_p[n])$. При переходе в $\mathcal{A}$, получаем вложения $(i_p^n)^{op}\colon\ \operatorname{Im} \widetilde{H}(h_{p+1}[n]) \to \operatorname{Im} \widetilde{H}(h_p[n])$. Наконец,

$$E_\infty^{k-n,-k} = \widetilde{E}_\infty^{n-k,k} = \operatorname{Ker}(i_{-k-1}^{-n})^{op}$$
$$\cong \operatorname{Ker} \widetilde{H}(h_{-k-1}[-n]) / \operatorname{Ker} \widetilde{H}(h_{-k}[-n]) = F^n \widetilde{H}_{\leqslant k+1} / F^n \widetilde{H}_{\leqslant k}. \;\square$$

Замечание 5. Следствие 4 можно доказать напрямую, рассмотрев точную пару

$$\widetilde{E}_1^{p,q} = \widetilde{H}(M_p[-p-q]),\ \ \widetilde{D}_1^{p,q} = \widetilde{H}(M_{\leqslant p-1}[-p-q+1])$$

(ср. рис. 2). В этом случае, (2.1.6) будет следовать из леммы 1(б) аналогично (2.1.3).

2.2. Функториальность $\mathbf{T}(\cdot,\cdot)$.

Лемма 6. *Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная абелева категория, последовательность*

$$A_1 \xrightarrow{a_1} X \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{k} Z \xrightarrow{b_2} B_2$$

точна в средних членах. Пусть, кроме того, даны $a_2 \in \mathcal{A}(X, A_2)$, $b_1 \in \mathcal{A}(B_1, Z)$. Тогда существуют морфизмы φ и ψ, для которых точна последовательность

$$0 \to \operatorname{Im} a_2/\operatorname{Im}(a_2a_1) \xrightarrow{\varphi} k^{-1}(\operatorname{Im} b_1)/j(\operatorname{Ker} a_2) \xrightarrow{\psi} \operatorname{Ker}(b_2b_1)/\operatorname{Ker} b_1 \to 0.$$

Доказательство. Положим $\varphi(x) = j(a_2^{-1}(x))$, $\psi(y) = b_1^{-1}(k(y))$. Корректность и точность проверяются непосредственно. □

Следствие 7. *Пусть $H\colon \underline{C} \to \mathcal{A}$ – гомологический функтор.*

(а) *Пусть $G\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ – точный функтор между абелевыми категориями. Тогда спектральная последовательность $T(G\circ H, M)$ получается применением G ко всем членам $T(H, M)$.*

(б) *Пусть в $\underline{C}$ зафиксирована башня Постникова $\mathrm{Po}_{\mathrm{Fil}_M}$ и, соответственно, M и Fil_M. Тогда $T(\cdot, M)$ – функтор между категорией гомологических функторов ($\underline{C} \to \mathcal{A}$) и категорией спектральных последовательностей в $\mathcal{A}$.*

(в) *Пусть $M \in \operatorname{Obj}\underline{C}$ и фильтрация Fil_M таковы, что*

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} \quad \operatorname{Ker} H_n(j_m \circ j_{m-1}) = \operatorname{Ker} H_n(j_{m-1}). \tag{2.2.1}$$

Тогда при любом выборе $\mathrm{Po}_{\mathrm{Fil}_M}$, при $r \geqslant 2$ получаем

$$T(H, M)_r^{p,q} \cong \operatorname{Im} H_{-p-q}(j_{-p})/\operatorname{Im} H_{-p-q}(j_{-p}\circ j_{-p-1}), \quad \partial_r^{p,q} = 0.$$

Другими словами, $T(H, M)$ со второго слоя функториально зависит от Fil_M.

Доказательство. (а) В силу точности G, функтор $G \circ H$ гомологический. По построению, точная пара, определяющая первый слой

$T(G\circ H, M)$ (см. рис. 2) получается применением G к членам соответствующей точной пары для $T(H,M)$. Из точности G также получаем, что это свойство переносится и на следующие слои.

(б) Легко видеть, что операция построения точной пары и ассоциированной с ней спектральной последовательности (см. §1.2) функториальны.

(в) Будем считать $n=p+q=0$. По построению, $D_2^{p,q}=\operatorname{Im} H(j_{-p-1})$. Напомним, что на рис. 2, отвечающем за первый слой $T(H,M)$, любая длинная последовательность стрелок "вверх–вправо–вправо–вверх" является точной. Применим лемму 6 для

$$a_1=H(j_{-p-1}),\quad a_2=H(j_{-p}),\quad b_1=H(j_{-p-2}[1]),\quad b_2=H(j_{-p-1}[1]),$$
$$j=H(c_{-p}),\quad k=H(e_{-p-1}).$$

По построению и в силу свойства (2.2.1), получаем

$$E_2^{p,q}=Z_1^{p,q}/B_1^{p,q}=H(e_{-p-1})^{-1}(\operatorname{Im} H(j_{-p-2}[1]))/H(c_{-p})(\operatorname{Ker} H(j_{-p}))$$
$$\cong \operatorname{Im} H(j_{-p})/\operatorname{Im} H(j_{-p}\circ j_{-p-1}).$$

То, что $\partial_r^{p,q}=0$ при $r\geqslant 2$, проверяется непосредственно из (1.2.2). □

§3. Применения $T(H,M)$

3.1. Гомотопическая категория. Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория. Рассмотрим гомотопическую категорию $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Как известно, стандартный функтор сдвига задаёт на ней структуру триангулированной категории ([3, IV.1.9]).

Обозначим через $\mathcal{H}$ гомологический функтор, сопоставляющий коцепному комплексу его когомологии в нулевом члене.

Замечание 8. Частный случай предложения 2 для ограниченных фильтраций приведён в [3, упражнение IV.2.2]. Рассматривается башня Постникова, состоящая из объектов X^i, Y^j, где $i,j\in[0,\dots,n]$. В наших обозначениях эта башня будет выглядеть следующим образом (ср. рис. 1):

$$M_{\leqslant -k}=\begin{cases}Y^0[-n-1], & k<0,\\ Y^k[-n-1], & 0\leqslant k\leqslant n,\\ 0, & n<k;\end{cases}\qquad M_{-k}=\begin{cases}X^k[-k], & 0\leqslant k\leqslant n,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Кроме того, вводится объект $T(X^\bullet) = Y^0[n-1] = M_{\leqslant 0}[2n]$. Требуется построить спектральную последовательность с первым слоем $E_1^{p,q} = H(X^p[q])$, сходящуюся к $H(T(X^\bullet)[p+q])$.

К сожалению, это не представляется возможным уже при $n = 1$. Рассмотрим категорию $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ и функтор $\mathcal{H}$. Положим X^0 сосредоточенным в нулевом члене, $X^1 = 0$, $Y^0 = X^0[2]$. Получаем, что $\mathcal{H}(T(X^\bullet)[0]) = 0$, но $E_r^{0,0} = \mathcal{H}(X^0) = X^0 \neq 0$.

Утверждение становится верным (и согласуется с предложением 2), если положить

$$T(X^\bullet) = Y^0[-n-1] = M_{\leqslant 0} = M.$$

Вычислим спектральные последовательности $T(\mathcal{H}, \cdot)$ для некоторых важных примеров фильтраций (ср. [3, III.7.5-6]).

Определение 9 ([3, III.7.5]). Пусть

$$\cdots \to X^{-2} \xrightarrow{\partial^{-2}} X^{-1} \xrightarrow{\partial^{-1}} X^0 \xrightarrow{\partial^0} X^1 \to \cdots = X^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A}).$$

- *Глупой* называется фильтрация $\mathrm{Fil_{st}}\, X^\bullet$ такая, что

$$X^\bullet_{\leqslant k} = \cdots \to 0 \to 0 \to X^{-k} \xrightarrow{\partial^{-k}} X^{-k+1} \xrightarrow{\partial^{-k+1}} X^{-k+2} \to \dots$$

- *Канонической* называется фильтрация $\mathrm{Fil_{can}}\, X^\bullet$ такая, что

$$X^\bullet_{\leqslant k} = \cdots \to X^{k-2} \xrightarrow{\partial^{k-2}} X^{k-1} \xrightarrow{\partial^{k-1}} \mathrm{Ker}\,(\partial^k) \to 0 \to 0 \to \dots$$

Предложение 10. *Существуют башни Постникова* $\mathrm{Po}_{\mathrm{Fil_{st}}\, X^\bullet}$ *и* $\mathrm{Po}_{\mathrm{Fil_{can}}\, X^\bullet}$ *такие, что*

$$T(\mathcal{H}, \mathrm{Fil_{st}}\, X^\bullet)_r^{pq} = \begin{cases} 0, & q \neq 0, \\ X^p, & q = 0,\ r = 1, \\ \mathcal{H}(X^\bullet[p]), & q = 0,\ r \geqslant 2, \end{cases}$$

$$T(\mathcal{H}, \mathrm{Fil_{can}}\, X^\bullet)_r^{pq} = \begin{cases} \mathcal{H}(X^\bullet[p]), & p = -(p+q), \\ 0, & p \neq -(p+q). \end{cases}$$

Доказательство. В первом случае, возьмём комплекс M_{-k} состоящим только из члена X^k на k-ом месте. Ясно, что $\mathcal{H}(M_{-k}[l]) = X^k$ при $l = k$, и 0 иначе. Осталось подставить M_{-k} в рис. 2.

Во втором случае, положим M_k равным $\mathrm{Ker}\,(\partial^k)$ в члене k и $\mathrm{Im}(\partial^{k-1})$ в члене $k-1$. При этом, $\mathcal{H}(M_k[l]) = 0$ при $l \neq k$ и $\mathcal{H}(M_k[k]) = \mathcal{H}(X^\bullet[k])$. □

Замечание 11. Для $\mathcal{H}$ и данных фильтраций выполнено условие (2.1.2) предложения 2 и условие (2.2.1) следствия 7(в). Отметим, что построенные $T(\mathcal{H},\cdot)$ в самом деле сходятся к $\mathcal{H}(X^{\bullet}[n])$, начиная со второго слоя.

3.2. Весовые структуры. В это параграфе мы предположим на $\underline{C}$ существование весовой структуры[2] и будем рассматривать согласованные с ней фильтрации (такие, как $\mathrm{Fil}_{\mathrm{st}}\,X^{\bullet}$, см. замечание 14).

Определение 12 ([1, определение 1.2.1])**.** Пусть $\underline{C}$ – триангулированная категория. Говорят, что пара подклассов $\underline{C}_{w\leqslant 0}, \underline{C}_{w\geqslant 0} \subset \mathrm{Obj}(\underline{C})$ определяет *весовую структуру*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

(1) $\underline{C}_{w\leqslant 0}, \underline{C}_{w\geqslant 0}$ замкнуты относительно взятия ретракций, т.е. выделения прямых слагаемых;
(2) $\underline{C}_{w\leqslant 0} \subset \underline{C}_{w\leqslant 0}[1]$ и $\underline{C}_{w\geqslant 0}[1] \subset \underline{C}_{w\geqslant 0}$;
(3) $\underline{C}_{w\leqslant 0} \perp \underline{C}_{w\geqslant 0}[1]$, т.е. $\underline{C}(X,Y)=0$ для любых $X \in \underline{C}_{w\leqslant 0}, \quad Y \in \underline{C}_{w\geqslant 0}[1]$;
(4) для любого $M \in \mathrm{Obj}\,\underline{C}$ существует выделенный треугольник
$$LM \to M \to RM \to LM[1],$$
где $LM \in \underline{C}_{w\leqslant 0}$, и $RM \in \underline{C}_{w\geqslant 0}[1]$.

Категория называется *весовой*, если она снабжена весовой структурой. При этом, $\underline{C}_{w\geqslant i}$ (соответственно $\underline{C}_{w\leqslant i}$) обозначает подкласс $\underline{C}_{w\geqslant 0}[i]$ (соответственно $\underline{C}_{w\leqslant 0}[i]$).

Из последней аксиомы следует, что для любых $M \in \mathrm{Obj}\,\underline{C}$, $m \in \mathbb{Z}$ существует (не обязательно единственный) выделенный треугольник
$$w_{\leqslant m}M \to M \to w_{\geqslant m+1}M \to (w_{\leqslant m}M)[1],$$
где $w_{\leqslant m}M \in \underline{C}_{w\leqslant m}$, и $w_{\geqslant m+1}M \in \underline{C}_{w\geqslant m+1}$. Такое разложение называется *m-весовым*.

Объекты класса $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} \underline{C}_{w\geqslant i}$ (соответственно $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} \underline{C}_{w\leqslant j}$) называют *ограниченными снизу* (соответственно *сверху*).

Определение 13 ([1, определение 1.3.3])**.** Фильтрация Fil_M называется *весовой*, если морфизмы $h_i\colon M_{\leqslant i} \to M$ продолжаются до i-весовых

[2]Весовые структуры были открыты независимо D. Pauksztello([5]) и названы им co-t-структурами.

разложений. Соответствующую башню Постникова $\mathrm{Po}_{\mathrm{Fil}_M}$ также будем называть *весовой*.

Замечание 14. В гомотопической категории $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ можно ввести весовую структуру следующим образом ([1, замечание 1.2.3]). Пусть $\mathcal{K}(\mathcal{A})_{w^{\mathrm{st}}\leqslant 0}$ (соответственно $\mathcal{K}(\mathcal{A})_{w^{\mathrm{st}}\geqslant 0}$) – классы комплексов, чьи члены в отрицательных (соответственно положительных) степенях равны нулю, и изоморфных им. Для этой весовой структуры рассмотренная ранее фильтрация $\mathrm{Fil}_{\mathrm{st}}(X^\bullet)$ будет весовой.

Предложение 15 ([1, предложение 1.4.1])**.** (I) *Пусть $\underline{C}$ – весовая категория, $H\colon \underline{C} \to \mathcal{A}$ – гомологический функтор, $M \in \mathrm{Obj}(\underline{C})$. Тогда для любой весовой фильтрации Fil_M и весовой башни Постникова $\mathrm{Po}_{\mathrm{Fil}_M}$ существует спектральная последовательность $T_w(H,M)$ такая, что $E_1^{p,q} = H_{-q}(M^p)$, а граничные морфизмы $\partial_1^{p,q}$ определяются дифференциалами ассоциированного с $\mathrm{Po}_{\mathrm{Fil}_M}$ комплекса.*

Более того, пусть выполнено любое из следующих условий:

(1) *M ограничен, т.е. $M \in \underline{C}_{w\geqslant i} \cap \underline{C}_{w\leqslant j}$ для некоторых i, j;*
(2) *M ограничен снизу и существует j: $H(X) = 0$ для любого $X \in \underline{C}_{w\leqslant -j}$;*
(3) *M ограничен сверху и существует i: $H(X) = 0$ для любого $X \in \underline{C}_{w\geqslant i}$;*
(4) *для достаточно больших i, H переводит классы $\underline{C}_{w\geqslant i}$, $\underline{C}_{w\leqslant -i}$ в ноль;*

тогда $T_w(H,M)$ сходится к $H_{-p-q}(M)$.

(II) *Начиная со второго слоя $E_2^{p,q}$, $T_w(H,\cdot)$ функториально по M, в частности, не зависит от выбора весовой фильтрации.*

(III) *Для когомологического функтора $\widetilde{H}\colon \underline{C} \to \mathcal{A}$, $M \in \mathrm{Obj}(\underline{C})$, весовой фильтрации Fil_M и весовой башни Постникова $\mathrm{Po}_{\mathrm{Fil}_M}$ существует спектральная последовательность $T_w(\widetilde{H},M)$ такая, что $\widetilde{E}_1^{p,q} = \widetilde{H}^q(M^{-p})$, а граничные морфизмы определяются дифференциалами ассоциированного с $\mathrm{Po}_{\mathrm{Fil}_M}$ комплекса.*

Более того, при любом из предположений (1)–(4), $T_w(\widetilde{H},M)$ будет сходиться к $\widetilde{H}^{p+q}(M)$.

Доказательство. (I) Существование $T_w(H,M)$ – в точности предложение 2. Предположим, выполнено некоторое из условий (1)–(4). Как доказано в [1, предложение 1.3.4.10], если M ограничен (соответственно сверху, соответственно снизу), то существует ограниченная (соответственно сверху, соответственно снизу) весовая фильтрация M. Докажем, что для неё и функтора H выполняется условие (2.1.2) предложения 2.

Рассмотрим произвольное i-весовое разложение

$$M_{\leqslant i} \xrightarrow{h_i} M \to M_{\geqslant i+1} \to M_{\leqslant i}[1].$$

По определению, $M_{\leqslant i} \in \underline{C}_{w\leqslant i}$, $M_{w\geqslant i+1} \in \underline{C}_{\geqslant i+1}$, и имеется длинная точная последовательность

$$\cdots \to H(M_{\geqslant i+1}[n-1]) \to H(M_{\leqslant i}[n]) \xrightarrow{H(h_i[n])} H(M[n]) \to H(M_{\geqslant i+1}[n]) \to \ldots . \tag{3.2.1}$$

Если для достаточно больших r верно $H(X)=0$ для всех $X \in \underline{C}_{w\geqslant r}$, рассмотрим $i \geqslant n-r$. Получаем, что $M_{\geqslant i+1}[n-1] \in \underline{C}_{w\geqslant r}$, и, тем более, $M_{\geqslant i+1}[n] \in \underline{C}_{w\geqslant r}$. Таким образом, из точной последовательности (3.2.1) получаем, что $H(h_i[n])$ – изоморфизм при $i \geqslant n-r$.

Если же $H(X)=0$ для каждого $X \in \underline{C}_{w\leqslant -r}$ то, в частности, $H(M_{\leqslant -i}[n])=0$ для $i \geqslant r+n$. Таким образом, в силу предложения 3, из условий (1)–(4) следует условие (2.1.2) для ограниченной соответствующим образом фильтрации.

Наконец, пункт (II) гарантирует, что и для исходной $\mathrm{Po}_{\mathrm{Fil}_M}, T_w(H,M)$ тоже сходится к $H_{-p-q}(M)$.

(II) Доказательство можно найти в [2, теорема 2.2.4.IV].

(III) Достаточно рассмотреть функтор $\widetilde{H}$ как гомологический в категорию $\mathcal{A}^{op}$, воспользоваться пунктом (I) и провести рассуждения, аналогичные доказательству следствия 4. □

Приложение

Проясним смысл (1.2.1) для произвольной абелевой категории $\mathcal{A}$. Пусть, как и прежде, дана точная последовательность

$$D \xrightarrow{i} D \xrightarrow{j} E \xrightarrow{k} D \xrightarrow{i} D. \tag{3.2.2}$$

Расмотрим $\operatorname{Im} jk = \operatorname{Coker}(\operatorname{Ker} jk) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} jk)$. Поскольку $(jk)^2 = j(kj)k = 0$, существует морфизм $\lambda\colon \operatorname{Coker} jk \to E$ такой, что $jk = \lambda\delta$

(рис. 3(a)). При этом, $jk\alpha_2 = \lambda(\delta\alpha_2) = 0$, поэтому существует единственный морфизм $f\colon \operatorname{Im} jk \to \operatorname{Ker} jk$ такой, что $\alpha_2 = \varepsilon f$. Положим $E' = \operatorname{Coker} f$, $D' = \operatorname{Im} i$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, two heads, "\alpha_1"'] \arrow[rr, bend left, "jk"] & \operatorname{Im} jk \arrow[r, hook, "\alpha_2"'] \arrow[d, dashed, "f"'] & E \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "\delta"] & D \arrow[r, "j"] & E \\
& \operatorname{Ker} jk \arrow[ur, "\varepsilon"'] & & \operatorname{Coker} jk \arrow[ur, dashed, "\lambda"] &
\end{tikzcd}$$

(a) построение f;

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Im} jk \arrow[r, hook, dashed, "f"] \arrow[d, hook, shift left, "\alpha_2"] & \operatorname{Ker} jk \arrow[r, dashed, "c"] \arrow[dl, hook, "\varepsilon"'] & \operatorname{Coker} f = E' \arrow[dl, dashed, "\widetilde{k}"'] \arrow[d, dotted, shift left, "k'"] \\
& E \arrow[u, two heads, shift left, "\alpha_1"] \arrow[r, shift left, "k"] \arrow[dl, "jk"'] & D \arrow[l, shift left, "j"] \arrow[u, dashed, "\widetilde{j}"] \arrow[r, two heads, shift left, "\beta_1"] \arrow[loop below, "i"] & \operatorname{Im} i = D' \arrow[l, hook, shift left, "\beta_2"] \arrow[u, dotted, shift left, "j'"] \arrow[loop below, dotted, "i'"] \\
E & & &
\end{tikzcd}$$

(b) построение i', j', k'.

Рис. 3. Построение производной пары.

Построим соответствующие морфизмы i', j', k' (рис. 3(b)). Рассмотрим каноническое разложение морфизма i: $D \xrightarrow{\beta_1} \operatorname{Im} i \xrightarrow{\beta_2} D$ и положим $i' = \beta_1\beta_2\colon D' \to D'$.

Далее, заметим, что $k\varepsilon f = 0$, поскольку $kj = 0$. Значит, существует морфизм $\widetilde{k}\colon \operatorname{Coker} f \to D$ такой, что $\widetilde{k}c = k\varepsilon$. При этом, $j\widetilde{k}c = (jk)\varepsilon = 0$, откуда $j\widetilde{k} = 0$, т.к. c – эпиморфизм. Поскольку $\operatorname{Im} i = \operatorname{Ker} j$, существует единственный морфизм $k'\colon E' \to D'$ такой, что $\widetilde{k} = \beta_2 k'$.

Наконец, определим морфизм j'. Поскольку $(jk)j = 0$, существует морфизм $\widetilde{j}$ такой, что $j = \varepsilon\widetilde{j}$. При этом, $\varepsilon\widetilde{j}k = jk = \varepsilon f\alpha_1$, следовательно, $\widetilde{j}k = f\alpha_1$, т.к. ε – мономорфизм. Заметим, что $c\widetilde{j}k = cf\alpha_1 = 0$, причём $D' = \operatorname{Im} i = \operatorname{Coker}(\operatorname{Ker} i) = \operatorname{Coker} k$ в силу точности последовательности (3.2.2). Значит, существует единственный морфизм $j'\colon D' \to E'$ такой, что $j'\beta_1 = c\widetilde{j}$.

Таким образом, мы получили последовательность

$$D' \xrightarrow{i'} D' \xrightarrow{j'} E' \xrightarrow{k'} D' \xrightarrow{i'} D'.$$

Точность этой последовательности легко проверяется.

Список литературы

1. M. V. Bondarko, *On weight complexes, pure functors, and detecting weights.* — J. Algebra, **574** (2021), 617–668.
2. M. V. Bondarko, *Weight structures vs. t-structures; weight filtrations, spectral sequences, and complexes (for motives and in general).* — J. K-theory, **6(3)** (2010), 387–504.
3. С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, *Методы гомологической алгебры: Т.* 1. *Введение в теорию когомологий и производные категории.* — Наука, М. (1988).
4. C.A. Weibel, *An introduction to homological algebra.* Cambridge University Press (1994).
5. D. Pauksztello, *Compact cochain objects in triangulated categories and co-t-structures.* — Centr. Europ. J. Math., **6(1)** (2008), 25–42.

Shamov S. V. On spectral sequences for Postnikov towers.

In this paper we construct a natural spectral sequence corresponding to a Postnikov tower (system) along with a (co)homological functor from a triangulated category. We apply the results to some classical filtrations in the homotopy category $K(A)$. In triangulated categories endowed with weight structures, we constuct weight spectral sequences (as defined by M. V. Bondarko), with some additional properties.

Санкт-Петербургский
Государственный университет
E-mail: shamov_st_n@mail.ru

Поступило 20 апреля 2021 г.