Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 500, 2021 г.

А. В. Семенов, А. Д. Денисова

О ПОРОЖДАЮЩИХ МНОЖЕСТВАХ БЕСКОНЕЧНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

§1. Введение

Симметрическая группа $S(\Omega)$ (для произвольного бесконечного множества Ω) является "большой" группой, что означает трудность в изучении даже частных случаев и подгрупп. В частности, почти ничего не известно про системы порождающих множеств данной группы, равно как и про флаги подгрупп. Джордж Бергман доказал ряд утверждений про системы подмножеств, которые при некоторых (достаточно специальных) условиях порождают всю группу $S(\Omega)$ (см. например, леммы 1–4 в статье [1]), а также доказал, что в этой группе не существует бесконечных рядов собственных вложенных друг в друга подгрупп (теорема 5 там же). Также Манфред Дросте изучил классы слов и цепи подгрупп в симметрической группе бесконечного множества в цикле статей [6–8]. Однако большая часть результатов в приведенных статьях слишком абстрактна и не может быть применена на практике в силу чрезвычайно редкого выполнения условий его утверждений.

По-другому обстоят дела с классификацией более простых объектов: так, например, все нормальные подгруппы в $S(\Omega)$ классифицированы (см. §8 в [2]). Также известны результаты про "классические" объекты общей теории групп (см. [3] и [4]). Возникает закономерный вопрос: можно ли в этой чрезвычайно сложно устроенной и большой группе отвечать на конкретные вопросы – не слишком классические и не слишком абстрактные?

В настоящей статье был поставлен вопрос отыскания критериев порождения для некоторых специальных подмножеств $S(\Omega)$, связанных с орбитами действия группы на Ω. Про произвольные порождающие множества известно крайне мало, и более того, сформулировать четкие критерии того, является ли множество элементов порождающим для бесконечной симметрической группы, по-видимому, невозможно в

Ключевые слова: бесконечная симметрическая группа, порождающее множество, кардиналы.

Первый автор частично поддержан премией "Молодая математика России".

силу слишком больших размеров группы. Однако этот вопрос разрешим для некоторых специальных подсистем – в частности, нами были рассмотрены четыре серии множеств, содержащих перестановки, разбивающие Ω в определенные объединения собственных подмножеств (прямой аналог действия орбитами различной бесконечной длины в случае $\mathbb{Z}$). Основным результатом статьи является теорема 9 (раздел 5), доказывающая, что каждое множество из каждой такой серии является порождающим, если оно “достаточно большое” в некотором смысле.

В конце дается любопытный подход к исследованию аналогичных групп для случая счетного множества, где вместо собственных подмножеств можно использовать орбиты действия биекций на множестве, и доказывается результат, аналогичный (более общему) результату, сформулированному в теореме 9.

§2. Основные определения и известные факты

На протяжении всей статьи будут фиксированы бесконечное множество Ω, группа его биекций $S(\Omega)$ и кардинал мощности $|\Omega|$. Допуская вольность речи, под Ω мы будем обозначать как множество, так и его кардинал. Также под I_n будем понимать множество элементов порядка n в $S(\Omega)$.

Определение 1. Множество $U \subset \Omega$ называется *собственным для* $f \in S(\Omega)$, если $f(x) \in U$ для любого $x \in U$.

Определение 2. Через M_f обозначим множество всех подвижных элементов биекции $f \in S(\Omega)$.

Определение 3. Через $W_{\alpha,\beta}(\Omega)$ обозначим множество всех таких перестановок $f \in S(\Omega)$, что f разбивает M_f в дизъюнктное объединение не более чем α собственных для f подмножеств, каждое из которых по мощности не превосходит β.

Определение 4. Через $K_{\alpha,\beta}(\Omega)$ обозначим множество всех таких перестановок $f \in S(\Omega)$, что f разбивает M_f в дизъюнктное объединение α собственных для f подмножеств, каждое из которых по мощности не превосходит β.

Определение 5. Через $R_{\alpha,\beta}(\Omega)$ обозначим множество всех таких перестановок $f \in S(\Omega)$, что f разбивает M_f в дизъюнктное объединение не более чем α собственных для f подмножеств, каждое из которых по мощности равно β.

Определение 6. Через $S_{\alpha,\beta}(\Omega)$ обозначим множество всех таких перестановок $f \in S(\Omega)$, что f разбивает M_f в дизъюнктное объединение α собственных для f подмножеств, каждое из которых по мощности равно β.

Теорема 1 ([1], Теорема 5)**.** *Пусть Ω – бесконечное множество, и пусть дана цепь подгрупп $\{G_i\}_{i\in I} \leqslant S(\Omega)$. Если $|I| \leqslant |\Omega|$ и $\bigcup_{i\in I} G_i = S(\Omega)$, то $G_i = S(\Omega)$ начиная с некоторого места.*

Теорема 2 (Шраера–Улама, §8 в [2])**.** *Для любой нормальной подгруппы $H \leqslant S(\Omega)$ существует кардинал α такой, что $H = S_\alpha(\Omega) = \{f \in S(\Omega) \mid |M_f| \leqslant \alpha \leqslant \Omega\}$.*

§3. Исследование множества $W_{\alpha,\beta}(\Omega)$

Задача исследования минимальности для порождающих множеств заведомо обречена на провал в силу следующего несложного результата, прямо вытекающего из работ Бергмана.

Теорема 3. *У $S(\Omega)$ не существует минимального порождающего множества.*

Доказательство. Предположим противное: пусть такое множество существует, и обозначим его за S. Понятно, что S как минимум счетно. Тогда у него есть счетное подмножество $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. Возьмем $S_0 = S \setminus A, S_1 = S_0 \cup \{a_1\}$, и зададим $S_n = S_{n-1} \cup \{a_n\}$.

Заметим тогда, что $\langle S_0\rangle \subseteq \langle S_1\rangle \subseteq \langle S_2\rangle \subseteq \dots \subseteq S(\Omega)$, причем любое множество из цепочки не равно всей группе. Однако $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \langle S_i\rangle = S(\Omega)$, что противоречит предыдущей теореме, следовательно, у $S(\Omega)$ не существует наименьшего порождающего множества. $\square$

Однако, несмотря на этот результат, исследованию поддаются достаточно общие множества, связанные с орбитами действия группы на Ω, наибольшим из которых является $W_{\alpha,\beta}(\Omega)$.

Теорема 4. *При любых кардиналах α, β таких, что $\alpha \cdot \beta < \Omega$, множество $W_{\alpha,\beta}(\Omega)$ не будет порождающим для $S(\Omega)$.*

Доказательство. Фиксируем α, β – произвольные кардиналы, меньшие Ω. Фиксируем перестановку $f \in W_{\alpha,\beta}(\Omega)$. Тогда M_f представляется как объединение не более чем α собственных подмножеств, не превосходящих по мощности β. Кроме того, мощность M_f не превосходит $\alpha \cdot \beta = \max(\alpha, \beta)$, откуда следует, что $f \in S_{\max(\alpha,\beta)}(\Omega)$. Тогда $W_{\alpha,\beta}(\Omega) \subseteq S_{\max(\alpha,\beta)}(\Omega)$, которое не является порождающим множеством, поскольку $\max(\alpha, \beta) < \Omega$. □

Лемма 1. *Для любых кардиналов α, β, не превосходящих Ω, если выполнено неравенство $\alpha < \beta$, то $W_{\Omega,\alpha}(\Omega) \subseteq W_{\Omega,\beta}(\Omega)$.*

Доказательство. Фиксируем $\alpha < \beta$ и $f \in W_{\Omega,\alpha}(\Omega)$. Мощность каждого из собственных подмножеств f не превосходит α, а значит, и не превосходит β, а тогда $f \in W_{\Omega,\beta}(\Omega)$. □

Лемма 2. *Для любых кардиналов α, β, если $\alpha < \beta$, выполняется следующее включение: $W_{\beta,\Omega}(\Omega) \subseteq W_{\alpha,\Omega}(\Omega)$.*

Доказательство. Фиксируем $\alpha < \beta$, и $f \in W_{\beta,\Omega}(\Omega)$. Понятно, что $M_f = \bigcup\limits_{\leqslant\beta} V_f$, где V_f – собственные подмножества f, по мощности не превосходящие Ω. Очевидно, что $\bigcup\limits_{\leqslant\beta} V_f$ также будет являться собственным для f и не превосходить по мощности Ω. Тогда, поскольку $1 \leqslant \alpha$, $f \in W_{\alpha,\Omega}(\Omega)$. □

Теорема 5 (Критерий порождения для $W_{\alpha,\beta}(\Omega)$)**.** *Множество $W_{\alpha,\beta}(\Omega)$ является порождающим тогда и только тогда, когда хотя бы один из кардиналов α, β совпадает с Ω.*

Доказательство. Пусть $W_{\alpha,\beta}(\Omega)$ порождает $S(\Omega)$. Покажем, что это так только в том случае, когда $\alpha = \Omega$ или $\beta = \Omega$. Предположим противное: пусть $\alpha, \beta < \Omega$. Тогда $W_{\alpha,\beta}(\Omega)$ не может быть порождающим множеством по теореме 4.

Пусть $\alpha = \Omega$ или $\beta = \Omega$. Тогда из лемм 1 и 2 следует, что $I_2 = W_{\Omega,2}(\Omega) \subseteq W_{\alpha,\beta}(\Omega)$, и, как будет показано в теореме 8, I_2 является порождающим множеством. Тогда

$$S(\Omega) = \langle I_2 \rangle \subseteq \langle W_{\alpha,\beta}(\Omega) \rangle \subseteq S(\Omega),$$

и все множества $W_{\alpha,\beta}(\Omega)$ являются порождающими. □

§4. Исследование $S_{\alpha,\beta}(\Omega)$

Теперь исследуем самое маленькое из множеств, связанных с орбитами действия $S(\Omega)$ на Ω.

Лемма 3. *Для любых кардиналов α, β, если $\alpha < \beta$, выполняется следующее включение: $S_{\beta,\Omega}(\Omega) \subseteq S_{\alpha,\Omega}(\Omega)$.*

Доказательство. Фиксируем α и β, и $f \in S_{\beta,\Omega}(\Omega)$. Понятно, что $M_f = \bigcup\limits_{\beta} V_f$, где V_f – собственные подмножества f, по мощности равные Ω. Поскольку $\alpha < \beta$, существует такой кардинал γ, что $\beta = \alpha + \sum\limits_{\gamma} \alpha$. Тогда M_f может быть представлено как $(\bigcup\limits_{\alpha} V_f) \cup (\bigcup\limits_{\sum\limits_{\gamma} \alpha} V_f)$, т.е. как объединение α собственных для f подмножеств мощности Ω (поскольку объединение $\gamma < \Omega$ собственных для f подмножеств мощности Ω по мощности также будет совпадать с Ω), из чего следует, что $f \in S_{\alpha,\Omega}(\Omega)$. □

Лемма 4. *Для любых бесконечных кардиналов α, β таких, что $\alpha < \beta$ выполнено включение $S_{\Omega,\alpha}(\Omega) \subseteq S_{\Omega,\beta}(\Omega)$.*

Доказательство. Фиксируем $\alpha < \beta$ и $f \in S_{\Omega,\alpha}(\Omega)$. Тогда $M_f = \bigcup\limits_{\Omega} V_f$, где каждое множество V_f – собственное для f мощности α. Так как $\alpha < \beta < \Omega$, можно записать $\Omega = \alpha \cdot \beta \cdot \Omega$ и тогда $M_f = \bigcup\limits_{\Omega}(\bigcup\limits_{\beta} V_f)$, где мощность каждого V_f равняется α, и $\bigcup\limits_{\beta} V_f$ – собственное для f мощности β. Тогда $f \in S_{\Omega,\beta}(\Omega)$ по определению. □

Теорема 6. *Для любого натурального $n \geqslant 2$ имеем $\langle I_n \rangle \subseteq \langle S_{\Omega,n}(\Omega) \rangle$.*

Доказательство. Для того, чтобы доказать включение, достаточно показать, что любая перестановка порядка n представляется конечной композицией перестановок из $S_{\Omega,n}(\Omega)$.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и $f \in I_n$. Рассмотрим два случая: когда $|M_f| = \Omega$ и когда $|M_f| < \Omega$.

В первом случае $f \in S_{\Omega,n}(\Omega)$ по определению (M_f разбивается на Ω собственных подмножеств мощности n).

Во втором случае возьмем $g_1 \in S_{\Omega,n}(\Omega)$ такую, что $g_1|_{M_f} = f$. Из того, что $|M_f| < \Omega$, следует, что $|M_{g_1} \setminus M_f| = \Omega$. Тогда $M_{g_1} \setminus M_f$ представляется в виде дизъюнктного объединения собственных подмножеств мощности n. Тогда функция g_2 такая, что $g_2|_{M_{g_1}} \setminus M_f = g_1^{-1}$

и $g_{2_{|M_f}} = \mathrm{id}_\Omega$ также будет принадлежать $S_{\Omega,n}(\Omega)$. Очевидно, что в композиции g_1 и g_2 будут давать f. Тогда $f \in \langle S_{\Omega,n}\rangle$. □

Лемма 5. *Для каждого бесконечного кардинала α справедливо включение $S_{\Omega,2}(\Omega) \subseteq S_{\Omega,\alpha}(\Omega)$.*

Доказательство. Фиксируем $f \in S_{\Omega,2}(\Omega)$. Тогда $M_f = \bigcup\limits_{\Omega} V_f$, где каждое множество V_f – собственное мощности 2. Так как $2 < \alpha < \Omega$, можно записать $\Omega = \Omega \cdot (\alpha \cdot 2)$, откуда следует, что $M_f = \bigcup\limits_{\Omega}(\bigcup\limits_{\alpha} V_f)$, где мощность каждого V_f равняется 2, и $\bigcup\limits_{\alpha} V_f$ – собственное подмножество мощности α. Тогда $f \in S_{\Omega,\alpha}(\Omega)$ по определению. □

Теорема 7 (Критерий порождения для $S_{\alpha,\beta}(\Omega)$)**.** *Множество $S_{\alpha,\beta}(\Omega)$ является порождающим тогда и только тогда, когда один из кардиналов α или β совпадает с Ω.*

Доказательство. Пусть $S_{\alpha,\beta}(\Omega)$ порождает $S(\Omega)$. Покажем, что тогда $\alpha = \Omega$ или $\beta = \Omega$. Предположим противное: пусть $\alpha, \beta < \Omega$. Тогда $S_{\alpha,\beta}(\Omega) \subseteq W_{\alpha,\beta}(\Omega)$, которое не может быть порождающим множеством по теореме 4.

Из леммы 5 и теоремы 6 следует, что $\langle I_2\rangle \subseteq \langle S_{\Omega,2}(\Omega)\rangle \subseteq \langle S_{\Omega,\beta}(\Omega)\rangle$ для любого бесконечного β, и, как будет показано в теореме 8, I_2 является порождающим множеством – значит, для бесконечного β множество $S_{\Omega,\beta}(\Omega)$ является порождающим. Кроме того, по лемме 4 все множества типа $S_{\alpha,\Omega}(\Omega)$ также будут порождающими, поскольку $S_{\Omega,\Omega}(\Omega) \subseteq S_{\alpha,\Omega}(\Omega)$.

При β, совпадающем с натуральным числом, по теореме 6 $\langle I_\beta\rangle \subseteq \langle S_{\Omega,\beta}(\Omega)\rangle$, и, как будет показано в теореме 9, I_β является порождающим множеством. Отсюда следует, что для конечного β множество $S_{\Omega,\beta}(\Omega)$ также является порождающим. □

§5. Основной результат

Теорема 8. *Для любого натурального n выполняется равенство $\langle I_n\rangle = S(\Omega)$.*

Доказательство. Заметим, что нормальное замыкание I_n совпадает с подгруппой, порожденной I_n:

$$\bar{I}_n = \langle I_n^{S(\Omega)}\rangle = \langle\{gsg^{-1} \mid s \in I_n\},\ g \in S(\Omega)\rangle = \langle I_n\rangle.$$

Предположим, что $\langle I_n \rangle$ не совпадает с $S(\Omega)$. Тогда по теореме Шраера-Улама существует такой кардинал $\alpha < \Omega$, что $\langle I_n \rangle = S_\alpha(\Omega)$, однако в I_n существует перестановка, двигающая все элементы Ω, чего по определению не может быть в $S_\alpha(\Omega)$. □

Теорема 9. *Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Ни одно из множеств* $W_{\alpha,\beta}(\Omega), R_{\alpha,\beta}(\Omega), K_{\alpha,\beta}(\Omega), S_{\alpha,\beta}(\Omega)$ *не является порождающим для любых* α, β *таких, что* $\alpha \cdot \beta < \Omega$.

(2) *Множества* $W_{\alpha,\Omega}(\Omega), R_{\alpha,\Omega}(\Omega), K_{\alpha,\Omega}(\Omega), S_{\alpha,\Omega}(\Omega)$ *являются порождающими для любого* $\alpha \leqslant \Omega$.

(3) *Множества* $W_{\Omega,\beta}(\Omega), R_{\Omega,\beta}(\Omega), K_{\Omega,\beta}(\Omega), S_{\Omega,\beta}(\Omega)$ *являются порождающими для любого* $\beta \leqslant \Omega$.

Доказательство. Фиксируем кардиналы α, β. Заметим, что по определению

$$S_{\alpha,\beta}(\Omega) \subseteq K_{\alpha,\beta}(\Omega) \subseteq W_{\alpha,\beta}(\Omega) \text{ и } S_{\alpha,\beta}(\Omega) \subseteq R_{\alpha,\beta}(\Omega) \subseteq W_{\alpha,\beta}(\Omega).$$

Тогда первое утверждение следует из теоремы 4, а второе и третье – из теоремы 7. □

§6. Частный случай $\Omega = \mathbb{Z}$

Случай счетного множества интересен тем, что вместо описанных множеств перестановок, которые работают с собственными подмножествами, можно брать перестановки, которые разбивают Ω в *циклы*. Это усиление наших определений, как будет показано далее, и требует отдельного исследования. Имеет смысл рассматривать орбиты (циклы) $\mathcal{O}_f(x) = \{f^k(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}$, и определить три множества:

(1) Множество локально-конечных перестановок $LF = \{f \in S(\Omega) \mid$ для любого $x \in \Omega$ орбита $\mathcal{O}_f(x)$ конечна$\}$. Типичный пример такой перестановки: ..(12)(34)(56)..

(2) Множество кольцевых перестановок $R = \{f \in S(\Omega) \mid$ множество орбит f конечно$\}$. Типичный пример такой перестановки: $f(n) = n + 1$.

(3) Множество диких перестановок $W = \{f \in S(\Omega) \mid$ у f бесконечно много бесконечных орбит$\}$. Типичный пример такой перестановки достигается разбиением $\mathbb{Z}$ в счетное количество счетных подмножеств.

В дальнейшем в этом параграфе мы будем рассматривать произвольное счетное множество Ω.

Лемма 6. $R \subseteq \langle LF \rangle$.

Доказательство. Докажем, что конечной композицией локально-конечных функций можно получить бесконечный цикл. Заметим, что кольцевые функции содержат в себе конечное количество циклов (конечных или бесконечных). Если можно получить бесконечный цикл как конечную композицию локально-конечных функций, то любая кольцевая функция принадлежит $\langle LF \rangle$.

Рассмотрим кольцевую функцию f, состоящую из одного бесконечного цикла. Занумеруем целыми числами элементы в нем, и тогда f можно записать следующим образом:

$$f = (\dots f^{-2}(x_0), f^{-1}(x_0), x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots)$$

Рассмотрим две локально-конечные функции $f_1, f_2 \colon \Omega \longrightarrow \Omega$, такие, что

$$f_1(f^n(x_0)) = f^{-n-1}(x_0) \text{ и } f_2(f^n(x_0)) = f^{-n}(x_0) \text{ для целого } n,$$

а вне определяемого цикла функции действуют тождественно.

Докажем, что $f^n(x_0)$ перейдет под влиянием композиции $f_1 f_2$ в $f^{n+1}(x_0)$ при любом целом n.

Фиксируем $n \in \mathbb{Z}$. Применим к $f^n(x_0)$ композицию $f_1 f_2$:

$$f_2(f_1(f^n(x_0))) = f_2(f^{-n-1}(x_0)) = f^{n+1}(x_0).$$

Таким образом, любая кольцевая функция может быть представлена конечной композицией локально-конечных функций. □

Лемма 7. $I_2 \subseteq \langle R \rangle$.

Доказательство. Фиксируем $f \in I_2$. Докажем, что $f \in \langle R \rangle$.

Рассмотрим два случая – когда f состоит из бесконечного числа транспозиций и когда f состоит из конечного количества транспозиций.

В первом случае представим f следующим образом:

$$f = (x_1^1, x_1^2)(x_2^1, x_2^2)(x_3^1, x_3^2)(x_4^1, x_4^2) \dots$$

Заметим, что, не умаляя общности, можно считать, что у f нет орбит длины 1 – в противном случае в определенную ниже функцию g_1 нужно добавить один цикл, состоящий из всех неподвижных элементов перестановки f, а в g_2 необходимо добавить обратный к этому циклу. Теперь определим две кольцевые функции g_1, g_2:

$$g_1 = (\dots x_4^2, x_3^1, x_2^2, x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_4^1, x_3^2, \dots),$$
$$g_2 = (\dots x_3^2, x_4^2, x_1^2, x_2^2, x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, \dots).$$

Нетрудно заметить, что в композиции g_1 и g_2 дают требуемую функцию f, состоящую из бесконечного количества транспозиций.

Во втором случае для получения f достаточно получить функцию g_1, состоящую из бесконечного числа транспозиций, в множество орбит которой включено множество орбит f, и функцию g_2, для которой выполняются следующие равенства: $M_{g_1} \setminus M_{g_2} = M_f, M_{g_2} \bigcup M_f = M_{g_1}$. Очевидно, что в композиции g_1 и g_2 дают f, таким образом, f может быть получена конечной композицией кольцевых функций. $\square$

Лемма 8. $LF \subseteq \langle W \rangle$.

Доказательство. Фиксируем $f \in LF$, причем пусть сначала f не финитна. Докажем, что $f \in \langle W \rangle$.

Рассмотрим два случая: когда $\Omega \setminus M_f$ конечно и когда $\Omega \setminus M_f$ бесконечно. В первом случае f можно получить композицией четырех диких функций. Для этого поймем, как можно получить один конечный цикл $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Возьмем два бесконечных цикла: цикл

$$(\dots a_{-1}, a_0, , x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots)$$

и цикл

$$(\dots, a_2, a_1, x_n, a_0, a_{-1}, \dots),$$

где a_i – это некоторые элементы вне цикла, причем понятно, что таких элементов должно быть бесконечно много. Занумеруем циклы длины хотя бы 2 из f целыми числами (это всегда можно сделать, потому что все орбиты конечны, а значит, их количество бесконечно, причем f не финитна, поэтому циклов длины хотя бы 2 также бесконечно много) и построим функции g_1, g_2, которыми будем обрабатывать все нечетные циклы. Понятно, что в четных циклах счетное количество элементов, и это множество [элементов] можно разбить дизъюнктно на бесконечное количество бесконечных множеств. Для нечетного цикла $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно зафиксировать одно из таких [бесконечных] множеств и брать a_i-ые для конструкции, описанной выше, из этого множества. Функции g_1 и g_2 будут состоять из полученных циклов

$(\dots a_{-1}, a_0, , x_1, x_2, \dots, x_n, a_1, a_2, \dots)$ и $(\dots, a_2, a_1, x_n, a_0, a_{-1}, \dots)$ соответственно.
Далее аналогично строим функции h_1, h_2, которые будут "обслуживать" все четные циклы, используя в качестве a_i-ых элементы из нечетных циклов. Очевидно, что все построенные функции – дикие, потому как они содержат бесконечно много циклов (по одному на каждую орбиту, которых бесконечно много) и все эти циклы счетной длины по построению. Таким образом, мы построили четыре дикие функции, такие, что

$$f = h_1 h_2 g_1 g_2.$$

Во втором же случае f можно получить композицией двух диких функций: так как $\Omega \setminus M_f$ бесконечно, a_i-е можно брать не из циклов, а из этого множества.

Когда f конечна, алгоритм получения циклов аналогичен, однако, поскольку циклов длины больше 2 – конечное количество, функции g_1, g_2, дающие в композиции f, будут кольцевыми. Для того, чтобы они были дикими, нужно добавить бесконечное количество циклов, состоящих из элементов $\Omega \setminus M_f$ в g_1 и все обратные к ним в g_2. □

Теорема 10. *Пусть Ω счетное. Тогда каждое из множеств LF, R и W является порождающим множеством для группы $S(\Omega)$.*

Доказательство. Как мы знаем из предыдущих лемм, $\langle I_2 \rangle \subseteq \langle R \rangle \subseteq \langle LF \rangle \subseteq \langle W \rangle \subseteq S(\Omega)$, и вместе с тем $\langle I_2 \rangle = S(\Omega)$ согласно теореме 8, из чего следует нужный нам результат. □

Список литературы

1. G. M. Bergman, *Generating infinite symmetric groups.* — Bull. London Math. Soc. **38** (2006), 429–440.
2. J. D. Dixon and B. M. Mortimer, *Permutation Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer (1988).
3. F. Galvin, *Generating countable sets of permutations.* — J. London Math. Soc. (2) **51** (1995), 230–242.
4. H. Macpherson and P. M. Neumann, *Subgroups of Infinite Symmetric Groups*, J. London Math. Soc. (1990), pp. 64–84.
5. G. Moran, *Conjugacy classes whose square is an infinite symmetric group.* — Trans. Amer. Math. Soc. **316** (1989), 493–522.
6. M. Droste and W. Ch. Holland, *Generating automorphism groups of chains.* — Forum Mathematicum, Volume 17: Issue 4 (2005), 699–710.
7. M. Droste, *Classes of universal words for the infinite symmetric groups.* — Algebra Universalis 20 (1985) 205–216.

8. M. Droste and R. Gobel, *Uncountable cofinalities of permutation groups.* — J. London Math. Soc. (2) **71** (2005), 335–344.

Semenov A. V., Denisova A. On generating sets of infinite symmetric group.

It was shown that in a group of bijections of an infinite set some families of subsets, related to the cardinality of some eigenspaces, are generating. Besides, we derived a criterion for generating by sets of this kind.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
С.-Петербургский государственный университет,
14 линия В.О., д. 29Б,
199178, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: asemenov.spb.56@gmail.com

Поступило 8 апреля 2021 г.

ЧоУ ОиДО Лаборатория непрерывного
математического образования
наб. Обводного канала, д. 143,
190005, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: leo.denisova@gmail.com