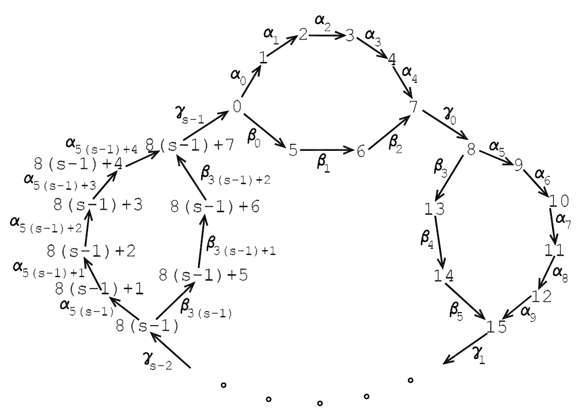
Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 500, 2021 г.

М. А. Качалова

КОЛЬЦО КОГОМОЛОГИЙ ХОХШИЛЬДА САМОИНЪЕКТИВНЫХ АЛГЕБР ДРЕВЕСНОГО ТИПА E_8

§1. Введение

Настоящая работа продолжает (и завершает) серию статей, посвящённых исследованию когомологий Хохшильда самоинъективных базисных алгебр над алгебраически замкнутым полем, имеющих конечный тип представления. Согласно классификации Ридтманн, стабильный AR-колчан такой алгебры описывается с помощью некоторого ассоциированного дерева, которое совпадает с одной из схем Дынкина A_n, D_n, E_6, E_7 или E_8 (см. [1]). Для алгебр типа A_n, D_n, E_6 и E_7 структура кольца когомологий Хохшильда полностью исследована и описана в [2–5] (тип A_n), [6–11] (тип D_n), [12, 13] (тип E_6), [14] (тип E_7). В данной статье мы изучим кольцо когомологий Хохшильда алгебр типа E_8. А именно, пусть $\mathcal{Q}_s$ ($s \in \mathbb{N}$) – следующий колчан:



Ключевые слова: когомологии Хохшильда, самоинъективные алгебры, бимодульная резольвента.

Тогда любая алгебра типа E_8 производно эквивалентна алгебре $R_s = K\left[\mathcal{Q}_s\right]/I$, где K – поле, а I – идеал в алгебре путей $K\left[\mathcal{Q}_s\right]$ колчана $\mathcal{Q}_s$, порождённый

а) всеми путями длины 7;

б) выражениями вида $\alpha^5 - \beta^3$, $\alpha\gamma\beta$, $\beta\gamma\alpha$, $\beta^i\gamma\beta^{4-i}$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$.

Замечание 1. Здесь и далее индексы вершин e_i лежат в $\mathbb{Z}_{8s}$, индексы стрелок α_i – в $\mathbb{Z}_{5s}$, β_i – в $\mathbb{Z}_{3s}$, а индексы γ_i в $\mathbb{Z}_s$.

Замечание 2. Мы будем часто опускать индексы у стрелок α_i, β_i и γ_i, поскольку значения нижних индексов ясны из контекста.

Данная статья посвящена изучению структуры кольца когомологий Хохшильда для алгебры R_s. Для этой алгебры мы получим описание кольца когомологий Хохшильда в терминах образующих с соотношениями. Заметим, что для исследования структуры кольца когомологий мы построим бимодульную резольвенту алгебры R_s, которая также представляет интерес как отдельный результат.

Замечание 3. Для нахождения матриц дифференциалов в бимодульной резольвенте и Ω-сдвигов выделенных элементов кольца когомологий мы написали программу, исходный код которой доступен по ссылке `https://github.com/pigmasha/e8`.

§2. Формулировка основного результата

Далее везде предполагается, что $n = 8$.

Пусть $\mathrm{HH}^t(R)$ – t-тая группа когомологий Хохшильда алгебры R с коэффициентами в R. Пусть ℓ – целая часть, а r – остаток от деления t на 29, m – целая часть от деления r на 2.

Рассмотрим случай $s > 1$. Для описания кольца когомологий Хохшильда алгебры R_s введём следующие условия на произвольную степень t:

(1) $r = 0$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(2) $r = 1$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(3) $r = 3$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \,\not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(4) $r = 4$, $m + 15\ell \equiv 1(s)$, $\ell \,\not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(5) $r = 5$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K = 3$;

(6) $r = 6$, $m + 15\ell \equiv 1(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K = 3$;

(7) $r = 7$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(8) $r = 8$, $m + 15\ell \equiv 1(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(9) $r = 9$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K = 5$;

(10) $r = 10$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K = 3$;

(11) $r = 10$, $m + 15\ell \equiv 1(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K = 5$;

(12) $r = 11$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K = 3$;

(13) $r = 12$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(14) $r = 13$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(15) $r = 15$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(16) $r = 16$, $m + 15\ell \equiv 1(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(17) $r = 17$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K = 3$;

(18) $r = 18$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K = 5$;

(19) $r = 18$, $m + 15\ell \equiv 1(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K = 3$;

(20) $r = 19$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K = 5$;

(21) $r = 20$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(22) $r = 21$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(23) $r = 22$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K = 3$;

(24) $r = 23$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$, $\operatorname{char} K = 3$;

(25) $r = 24$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(26) $r = 25$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(27) $r = 27$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(28) $r = 28$, $m + 15\ell \equiv 1(s)$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$.

Положим

$$M_0 = \frac{s}{\text{НОД}(s,15)}, \quad M = \begin{cases} 29M_0, & \text{если } \operatorname{char} K = 2 \text{ или } M_0 \vdots 2, \\ 58M_0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Замечание 4. В параграфе 3 мы покажем, что минимальный период бимодульной резольвенты R_s равен M.

Пусть $\{t_{1,i}, \dots, t_{\alpha_i,i}\}$ – множество всех степеней t, удовлетворяющих условиям i-го пункта из списка выше, и таких, что $0 \leqslant t_{j,i} < M$ $(j = 1, \dots, \alpha_i)$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{28} \left\{ X_{t_{j,i}}^{(i)} \right\}_{j=1}^{\alpha_i} \cup \{T\}$$

и на кольце многочленов $K[\mathcal{X}]$ введём градуировку такую, что

$$\deg X_{t_{j,i}}^{(i)} = t_{j,i} \text{ для всех } i = 1, \dots, 28 \text{ и } j = 1, \dots, \alpha_i, \qquad (\circ)$$
$$\deg T = M.$$

Замечание 5. Далее мы будем часто использовать упрощённое обозначение $X^{(i)}$ для $X_{t_{j,i}}^{(i)}$, поскольку значения нижних индексов ясны из контекста.

Обозначение.

$$\widetilde{X}^{(i)} = \begin{cases} X^{(i)}, & \text{если } \deg \widetilde{X}^{(i)} < \deg T, \\ TX^{(i)}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A} = K[\mathcal{X}]/I$, где I – идеал, порождённый однородными элементами, соответствующими следующим соотношениям:

$$X^{(2)}X^{(2)} = X^{(2)}X^{(4)} = X^{(2)}X^{(5)} = X^{(2)}X^{(6)} = X^{(2)}X^{(8)} = 0;$$
$$X^{(2)}X^{(9)} = X^{(2)}X^{(10)} = X^{(2)}X^{(11)} = X^{(2)}X^{(12)} = X^{(2)}X^{(14)} = 0;$$
$$X^{(2)}X^{(16)} = X^{(2)}X^{(17)} = X^{(2)}X^{(18)} = X^{(2)}X^{(19)} = X^{(2)}X^{(20)} = 0;$$
$$X^{(2)}X^{(22)} = X^{(2)}X^{(23)} = X^{(2)}X^{(24)} = X^{(2)}X^{(26)} = X^{(2)}X^{(28)} = 0;$$
$$X^{(2)}X^{(1)} = \widetilde{X}^{(2)}, \quad X^{(2)}X^{(3)} = \widetilde{X}^{(4)}, \quad X^{(2)}X^{(7)} = \widetilde{X}^{(8)};$$
$$X^{(2)}X^{(13)} = \widetilde{X}^{(14)}, \quad X^{(3)}X^{(15)} = \widetilde{X}^{(16)}, \quad X^{(3)}X^{(21)} = \widetilde{X}^{(22)};$$
$$X^{(3)}X^{(25)} = \widetilde{X}^{(26)}, \quad X^{(3)}X^{(27)} = \widetilde{X}^{(28)};$$

$$X^{(3)}X^{(3)} = \begin{cases} s\widetilde{X}^{(6)}, & \text{если } \operatorname{char} K = 3, \\ 0, & \text{в противном случае}; \end{cases} \tag{r1}$$

$$X^{(3)}X^{(7)} = \begin{cases} -2s\widetilde{X}^{(11)}, & \text{если } \operatorname{char} K = 5, \\ 0, & \text{в противном случае}; \end{cases} \tag{r2}$$

$$X^{(7)}X^{(13)} = \begin{cases} s\widetilde{X}^{(20)}, & \text{если } \operatorname{char} K = 5, \\ 0, & \text{в противном случае}; \end{cases} \tag{r3}$$

$$X^{(3)}X^{(15)} = \begin{cases} s\widetilde{X}^{(19)}, & \text{если } \operatorname{char} K = 3, \\ 0, & \text{в противном случае}; \end{cases} \tag{r4}$$

$$X^{(3)}X^{(21)} = \begin{cases} s\widetilde{X}^{(24)}, & \text{если } \operatorname{char} K = 3, \\ 0, & \text{в противном случае}; \end{cases} \tag{r5}$$

$$X^{(13)}X^{(27)} = \begin{cases} 2s\widetilde{X}^{(11)}, & \text{если } \operatorname{char} K = 5, \\ 0, & \text{в противном случае}; \end{cases} \tag{r6}$$

$$X^{(15)}X^{(21)} = \begin{cases} s\widetilde{X}^{(6)}, & \text{если } \operatorname{char} K = 3, \\ 0, & \text{в противном случае}; \end{cases} \tag{r7}$$

$$X^{(15)}X^{(25)} = \begin{cases} 2s\widetilde{X}^{(11)}, & \text{если } \operatorname{char} K = 5, \\ 0, & \text{в противном случае}; \end{cases} \tag{r8}$$

$$X^{(21)}X^{(21)} = \begin{cases} s\widetilde{X}^{(12)}, & \text{если } \operatorname{char} K = 3, \\ 0, & \text{в противном случае}; \end{cases} \tag{r9}$$

$$X^{(21)}X^{(27)} = \begin{cases} -s\widetilde{X}^{(19)}, & \text{если } \operatorname{char} K = 3, \\ 0, & \text{в противном случае}; \end{cases} \tag{r10}$$

$$X^{(25)}X^{(25)} = \begin{cases} s\widetilde{X}^{(20)}, & \text{если } \operatorname{char} K = 5, \\ 0, & \text{в противном случае}. \end{cases} \tag{r11}$$

Остальные соотношения опишем в виде таблиц (номера (r1)–(r11) в ячейках таблиц означают номер соотношения, в котором описано произведение соответствующих элементов).

	$X^{(1)}$	$X^{(3)}$	$X^{(5)}$	$X^{(6)}$	$X^{(7)}$	$X^{(9)}$	$X^{(10)}$
$X^{(1)}$	$X^{(1)}$	$X^{(3)}$	$X^{(5)}$	$X^{(6)}$	$X^{(7)}$	$X^{(9)}$	$X^{(10)}$
$X^{(3)}$		(r1)	$sX^{(8)}$	0	(r2)	0	$-sX^{(14)}$
$X^{(5)}$			0	0	0	0	0
$X^{(6)}$				0	0	0	$-X^{(16)}$
$X^{(7)}$					0	$sX^{(16)}$	$-X^{(17)}$
$X^{(9)}$						0	0
$X^{(10)}$							0

	$X^{(11)}$	$X^{(12)}$	$X^{(13)}$	$X^{(15)}$	$X^{(17)}$	$X^{(18)}$	$X^{(19)}$
$X^{(1)}$	$X^{(11)}$	$X^{(12)}$	$X^{(13)}$	$X^{(15)}$	$X^{(17)}$	$X^{(18)}$	$X^{(19)}$
$X^{(3)}$	0	0	$X^{(15)}$	(r4)	0	$-2sX^{(22)}$	0
$X^{(5)}$	0	$X^{(16)}$	$X^{(17)}$	0	0	0	0
$X^{(6)}$	0	0	$X^{(19)}$	0	0	0	0
$X^{(7)}$	0	$X^{(19)}$	(r3)	0	0	$2sX^{(26)}$	0
$X^{(9)}$	0	0	$sX^{(22)}$	0	0	0	0
$X^{(10)}$	0	$-X^{(22)}$	$-X^{(23)}$	$sX^{(26)}$	0	0	$X^{(28)}$

	$X^{(20)}$	$X^{(21)}$	$X^{(23)}$	$X^{(24)}$	$X^{(25)}$	$X^{(27)}$
$X^{(1)}$	$X^{(20)}$	$X^{(21)}$	$X^{(23)}$	$X^{(24)}$	$X^{(25)}$	$X^{(27)}$
$X^{(3)}$	0	(r5)	$-sX^{(26)}$	0	$X^{(27)}$	0
$X^{(5)}$	0	$-sX^{(26)}$	0	$-X^{(28)}$	0	0
$X^{(6)}$	0	0	$-X^{(28)}$	0	0	0
$X^{(7)}$	0	$-X^{(27)}$	0	0	0	0
$X^{(9)}$	$-X^{(28)}$	0	0	0	$-sX^{(4)}$	0
$X^{(10)}$	0	$-sX^{(2)}$	0	$-X^{(4)}$	$X^{(5)}$	$sX^{(8)}$

	$X^{(11)}$	$X^{(12)}$	$X^{(13)}$	$X^{(15)}$	$X^{(17)}$	$X^{(18)}$	$X^{(19)}$
$X^{(11)}$	0	0	0	0	0	$-X^{(28)}$	0
$X^{(12)}$		0	$X^{(24)}$	0	$-X^{(28)}$	0	0
$X^{(13)}$			$-X^{(25)}$	$-X^{(27)}$	0	$-2sX^{(2)}$	0
$X^{(15)}$				0	0	$-2sX^{(4)}$	0
$X^{(17)}$					0	0	0
$X^{(18)}$						0	0
$X^{(19)}$							0

	$X^{(20)}$	$X^{(21)}$	$X^{(23)}$	$X^{(24)}$	$X^{(25)}$	$X^{(27)}$
$X^{(11)}$	0	0	0	0	0	0
$X^{(12)}$	0	0	$X^{(4)}$	0	$-X^{(6)}$	0
$X^{(13)}$	0	$X^{(3)}$	$X^{(5)}$	$X^{(6)}$	$-X^{(7)}$	(r6)
$X^{(15)}$	0	(r7)	$sX^{(8)}$	0	(r8)	0
$X^{(17)}$	0	$sX^{(8)}$	0	0	0	0
$X^{(18)}$	$-2X^{(8)}$	$-2X^{(9)}$	0	0	$2sX^{(14)}$	$2sX^{(16)}$
$X^{(19)}$	0	0	0	0	0	0

	$X^{(20)}$	$X^{(21)}$	$X^{(23)}$	$X^{(24)}$	$X^{(25)}$	$X^{(27)}$
$X^{(20)}$	0	$-2X^{(11)}$	0	0	0	0
$X^{(21)}$		(r9)	$sX^{(14)}$	0	$-X^{(15)}$	(r10)
$X^{(23)}$			0	$X^{(16)}$	$-X^{(17)}$	0
$X^{(24)}$				0	$-X^{(19)}$	0
$X^{(25)}$					(r11)	0
$X^{(27)}$						0

Теорема 1. *Пусть $s > 1$, $R = R_s$ – алгебра типа E_8. Тогда алгебра когомологий Хохшильда* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{A}$.*

Рассмотрим случай $s = 1$.

Введём множество

$$\mathcal{X}' = \mathcal{X} \cup \left\{X_0^{(29)}, X_0^{(30)}, X_0^{(31)}, X_0^{(32)}, X_0^{(33)}, X_0^{(34)}, X_0^{(35)}, X_0^{(36)}\right\}$$

и на кольце многочленов $K[\mathcal{X}']$ введём градуировку такую, что

$$\deg X_{t_{j,i}}^{(i)} = t_{j,i} \text{ для всех } i = 1, \dots, 28 \text{ и } j = 1, \dots, \alpha_i;$$
$$\deg T = M \text{ (аналогично } (\circ));$$
$$\deg X_0^{(i)} = 0 \text{ для всех } i = 29, \dots, 36.$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}' = K[\mathcal{X}']/I'$, где идеал I' порождён однородными элементами, соответствующими соотношениям, которые уже были описаны для случая $s > 1$, а также следующими соотношениями:

$$X^{(1)}X^{(i)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(i)}, & \text{если } t_1 = 0, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$
$$X^{(j)}X^{(i)} = 0, \quad j \in [2, 36], \quad i \in [29, 36],$$

где t_1 обозначает степень элемента $X^{(1)}$.

Теорема 2. *Пусть $s = 1$, $R = R_1$ – алгебра типа E_8. Тогда алгебра когомологий Хохшильда* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{A}'$.*

Замечание 6. Из описания колец $\mathrm{HH}^*(R)$ в теоремах 1 и 2 следует, в частности, что они коммутативны.

§3. Бимодульная резольвента

Будем строить минимальную проективную бимодульную резольвенту R в следующем виде:

$$\cdots \longrightarrow Q_3 \xrightarrow{d_2} Q_2 \xrightarrow{d_1} Q_1 \xrightarrow{d_0} Q_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0.$$

Пусть Λ – обёртывающая алгебра алгебры R. Тогда R–R-бимодули можно рассматривать как левые Λ-модули.

Обозначения.

(1) Через e_i, $i \in \mathbb{Z}_{8s} = \{0, 1, \dots, 8s-1\}$, обозначаем идемпотенты алгебры $K[\mathcal{Q}_s]$, соответствующие вершинам колчана $\mathcal{Q}_s$.

(2) Обозначим через $P_{i,j} = R(e_i \otimes e_j)R = \Lambda(e_i \otimes e_j)$, $i, j \in \mathbb{Z}_{8s}$. Заметим, что модули $P_{i,j}$, составляют полное множество (попарно неизоморфных) неразложимых проективных Λ-модулей.

(3) Для $a \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{N}$ через $(a)_t$ обозначим наименьший неотрицательный вычет a по модулю t (в частности, $0 \leqslant (a)_t \leqslant t-1$).

Пусть $R = R_s$. Определим автоморфизм $\sigma\colon R \to R$, действующий следующим образом:

$$\sigma(e_i) = e_{i+15n}, \qquad \sigma(\gamma_i) = -\gamma_{i+15},$$

$$\sigma(\alpha_i) = \begin{cases} \alpha_{i+15\cdot 5}, & (i)_5 = 4, \\ -\alpha_{i+15\cdot 5}, & (i)_5 \neq 4, \end{cases} \qquad \sigma(\beta_i) = \begin{cases} \beta_{i+15\cdot 3}, & (i)_3 = 0, \\ -\beta_{i+15\cdot 3}, & (i)_3 \neq 0. \end{cases}$$

Введём вспомогательные функции $f\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ и $f\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, действующие следующим образом:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y, \end{cases} \qquad f(x, y_1, y_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } y_1 \leqslant x \leqslant y_2, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Введём Q_r ($r \leqslant 28$). Напомним, что для степени r через m обозначаем целую часть от деления r на 2. Положим

$$Q_{2m} = \bigoplus_{r=0}^{s-1} Q'_{2m,r}, \quad 0 \leqslant m \leqslant 14,$$

$$Q_{2m+1} = \bigoplus_{r=0}^{s-1} Q'_{2m+1,r}, \quad 0 \leqslant m \leqslant 13.$$

$$\begin{aligned} Q'_{2m,r} = &\left(\bigoplus_{i=0}^{f(m,2,11)+f(m,4,9)} P_{b_0(r,m,i),8r} \right) \\ &\oplus \bigoplus_{j=0}^{3} \bigoplus_{i=0}^{f(m+j,5)+f(m+j,7,10)+f(m+j,12)} P_{b_1(r,m,i,j),8r+j+1} \\ &\oplus \bigoplus_{j=0}^{1} \bigoplus_{i=0}^{f(m+j,3,12)+f(m+j,5,10)} P_{b_2(r,m,i,j),8r+j+5} \\ &\oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{f(m,3,12)+f(m,5,10)} P_{b_3(r,m,i),8r+7} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} b_0(r,m,i) = {}& 8(r+m) - f(i,0)(f(m,1,10) + f(m,13)) \\ & - f(i,1)(f(m,4) + f(m,11)) \\ & - f(i,2)(f(m,6) + f(m,8)), \\ b_1(r,m,i,j) = {}& 8(r+m) + m + j + 1 \\ & - f(i,0)(5f(m+j,6,9) + 9f(m+j,10,12) \\ & + 8f(m+j,13) + 14f(m+j,14,17)) \\ & - f(i,1)(5f(m+j,5) + 3f(m+j,7,8) + 9f(m+j,9) \\ & + 5f(m+j,10) + 8f(m+j,12)), \\ b_2(r,m,i,j) = {}& 8(r+m) + m + j - 1 + 6f(m+j,0,1) \\ & + f(i,0)(f(m+j,5) - 3f(m+j,6) - 5f(m+j,8,9) \\ & - 3f(m+j,10) - 8f(m+j,11,15)) \\ & + f(i,1)(3f(m+j,3,4) + f(m+j,6) - 3f(m+j,7,8) \\ & - 2f(m+j,9) - 5f(m+j,10,12)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- f(i,2)(3f(m+j,5) + 5f(m+j,7) + 2f(m+j,8)\\
&+ 3f(m+j,9) + 8f(m+j,10)),\\
b_3(r,m,i) = {}& 8(r+m+1) - f(i,0)(f(m,0) + f(m,2,11) + f(m,14))\\
&- f(i,1)(f(m,5) + f(m,12))\\
&- f(i,2)(f(m,7) + f(m,9));
\end{aligned}
$$

$$
Q'_{2m+1,r} = \left(\bigoplus_{i=0}^{f(m,0,12)+f(m,2,10)+f(m,3,9)+f(m,5)+f(m,7)} P_{b_4(r,m,i),8r} \right)
\oplus \bigoplus_{j=0}^{3} \bigoplus_{i=0}^{f(m+j,8)} P_{b_5(r,m,i,j),8r+j+1} \oplus \bigoplus_{j=0}^{1} \bigoplus_{i=0}^{f(m+j,4,10)} P_{b_6(r,m,i,j),7r+j+5}
\oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{f(m,1,13)+f(m,3,11)+f(m,4,10)+f(m,6)+f(m,8)} P_{b_7(r,m,i),8r+7} \right),
$$

где

$$
\begin{aligned}
b_4(r,m,i) = {}& 8(r+m) + f(i,0)(2 - f(m,0) + 3f(m,2)\\
&+ 3f(m,4) + f(m,7) + f(m,9)\\
&+ f(m,11) + 2f(m,12) + 5f(m,13) + 6f(m,14))\\
&+ f(i,1)(6 - f(m,0) - 3f(m,2) - 2f(m,3) - 3f(m,4)\\
&- 3f(m,6) - 2f(m,8) - 2f(m,10) - f(m,11))\\
&+ f(i,2)(6 - 5f(m,2) - 2f(m,5) - 2f(m,7) - 5f(m,9))\\
&+ f(i,3)(5 - 4f(m,4,5) - 4f(m,7)) + 5f(i,4),\\
b_5(r,m,i,j) = {}& 8(r+m) + 7 - 5f(m+j,0) - 4f(m+j,1)\\
&- 3f(m+j,2) + f(m+j,4) + f(m+j,6) + f(m+j,9)\\
&+ f(m+j,11) + f(m+j,13) + 2f(m+j,14)\\
&+ 3f(m+j,15) + 4f(m+j,16) + f(i,1)f(m+j,8),\\
b_6(r,m,i,j) = {}& 8(r+m) + 7 - f(m+j,0) + f(m+j,2)\\
&+ f(m+j,8) + f(m+j,11) + f(m+j,13) + 6f(m+j,14)\\
&+ f(i,1)(1 - 2f(m+j,8)),\\
b_7(r,m,i) = {}& 8(r+m+1) + f(i,0)(2 - 2f(m,0) - f(m,1)\\
&+ 3f(m,3) + 3f(m,5) + f(m,8) + f(m,10)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&+ f(m,12) + 2f(m,13) + 5f(m,14)) \\
&+ f(i,1)(6 - f(m,1) - 3f(m,3) - 2f(m,4) - 3f(m,5) \\
&- 3f(m,7) - 2f(m,9) - 2f(m,11) - f(m,12)) \\
&+ f(i,2)(6 - 5f(m,3) - 2f(m,6) - 2f(m,8) - 5f(m,10)) \\
&+ f(i,3)(5 - 4f(m,5,6) - 4f(m,8)) + 5f(i,4).
\end{aligned}$$

Теорема 3. *Пусть $R = R_s$ – алгебра типа E_8. Тогда минимальная проективная резольвента Λ-модуля R имеет вид*:

$$\cdots \longrightarrow Q_3 \xrightarrow{d_2} Q_2 \xrightarrow{d_1} Q_1 \xrightarrow{d_0} Q_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0, \qquad (+)$$

где ε – отображение умножения ($\varepsilon(a \otimes b) = ab$); Q_r ($r \leqslant 28$) описаны выше, d_r ($r \leqslant 28$) описаны в [17]; *далее $Q_{29\ell+r}$, где $\ell \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant r \leqslant 28$, получается из Q_r заменой каждого прямого слагаемого $P_{i,j}$ на $P_{\sigma^\ell(i),j}$, соответственно (здесь $\sigma(i) = j$, если $\sigma(e_i) = e_j$), а дифференциал $d_{29\ell+r}$ получается из d_r применением σ^ℓ ко всем левым компонентам тензоров из соответствующей матрицы.*

Для доказательства того, что члены резольвенты Q_i имеют указанный вид, введём проективные накрытия $P_i = Re_i$ простых R-модулей S_i, соответствующих вершинам колчана $\mathcal{Q}_s$. Найдём минимальные проективные резольвенты простых R-модулей S_i.

Обозначение. Для R-модуля M через $\Omega^m(M)$ обозначим его m-ую сизигию.

Замечание 7. В дальнейшем гомоморфизм умножения справа на путь w также обозначаем через w.

Лемма 4. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля S_{8r} имеет вид*

$$\cdots \longrightarrow P_{8(r+12)+7} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}} P_{8(r+12)+4} \oplus P_{8(r+m)+6} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^4 & \beta^2 \end{pmatrix}} P_{8(r+12)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \gamma\alpha^2 \\ -\gamma\beta^2 \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+11)+3} \oplus P_{8(r+11)+5} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^3 & \beta \\ -\alpha^3\gamma & 0 \end{pmatrix}} P_{8(r+11)} \oplus P_{8(r+10)+7} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \gamma\alpha^3 & 0 \\ \gamma\alpha & \alpha \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+10)+2} \oplus P_{8(r+10)+4} \oplus P_{8(r+10)+6} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^2\gamma & 0 & 0 \\ -\alpha^2 & \alpha^4 & \beta^2 \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+9)+7} \oplus P_{8(r+10)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^2 & \gamma\alpha^2 \\ -\beta & 0 \\ -\alpha^4 & 0 \\ -\beta^2 & -\gamma\beta^2 \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+9)+3} \oplus P_{8(r+9)+6} \oplus P_{8(r+9)+1} \oplus P_{8(r+9)+5} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^3\gamma & \beta^2\gamma & 0 & 0 \\ \alpha^3 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & -\beta^2 & \alpha & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+8)+7} \oplus P_{8(r+9)} \oplus P_{8(r+9)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 & 0 \\ -\alpha & \gamma\alpha & 0 \\ \beta & 0 & \gamma\beta \\ \beta^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+8)+2} \oplus P_{8(r+8)+4} \oplus P_{8(r+8)+6} \oplus P_{8(r+8)+5} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^2\gamma & \alpha^4\gamma & 0 & 0 \\ -\alpha^2 & 0 & 0 & \beta \\ -\alpha^2\gamma & 0 & \beta^2\gamma & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+7)+7} \oplus P_{8(r+8)} \oplus P_{8(r+7)+7} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^2 & \gamma\alpha^2 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma\alpha & \alpha \\ -\alpha^4 & 0 & 0 \\ -\beta^2 & 0 & -\beta^2 \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+7)+3} \oplus P_{8(r+7)+6} \oplus P_{8(r+7)+4} \oplus P_{8(r+7)+1} \oplus P_{8(r+7)+5} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^3\gamma & \beta^2\gamma & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^3 & 0 & \alpha^4 & 0 & \beta \\ 0 & -\beta^2 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+6)+7} \oplus P_{8(r+7)} \oplus P_{8(r+7)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 & 0 \\ -\alpha^2 & \gamma\alpha^2 & 0 \\ \beta & 0 & \gamma\beta \\ \beta^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+6)+2} \oplus P_{8(r+6)+3} \oplus P_{8(r+6)+6} \oplus P_{8(r+6)+5} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^2\gamma & \alpha^3\gamma & 0 & 0 \\ -\alpha^2 & 0 & 0 & \beta \\ -\alpha^2\gamma & 0 & \beta^2\gamma & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+5)+7} \oplus P_{8(r+6)} \oplus P_{8(r+5)+7} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^3 & \gamma\alpha^3 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma\alpha & \alpha \\ -\alpha^4 & 0 & 0 \\ -\beta^2 & 0 & -\beta^2 \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+5)+2} \oplus P_{8(r+5)+6} \oplus P_{8(r+5)+4} \oplus P_{8(r+5)+1} \oplus P_{8(r+5)+5} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^2\gamma & \beta^2\gamma & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^2 & 0 & \alpha^4 & 0 & \beta \\ 0 & -\beta^2 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+4)+7} \oplus P_{8(r+5)} \oplus P_{8(r+5)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta^2 & 0 & 0 \\ -\alpha^2 & \gamma\alpha^2 & 0 \\ \beta & 0 & \gamma\beta \\ -\alpha^4 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+4)+5} \oplus P_{8(r+4)+3} \oplus P_{8(r+4)+6} \oplus P_{8(r+4)+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta\gamma & \alpha^3\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \beta^2\gamma & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+3)+7} \oplus P_{8(r+3)+7} \oplus P_{8(r+4)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ -\beta & 0 & \gamma\beta \\ -\beta^2 & -\beta^2 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+3)+2} \oplus P_{8(r+3)+4} \oplus P_{8(r+3)+6} \oplus P_{8(r+3)+5} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^2\gamma & 0 & \beta^2\gamma & 0 \\ \alpha^2 & \alpha^4 & 0 & \beta \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+2)+7} \oplus P_{8(r+3)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta^2 & 0 \\ -\alpha^2 & \gamma\alpha^2 \\ -\alpha^4 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+2)+5} \oplus P_{8(r+2)+3} \oplus P_{8(r+2)+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta\gamma & \alpha^3\gamma & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+1)+7} \oplus P_{8(r+2)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 \\ -\beta & \gamma\beta \end{pmatrix}} P_{8(r+1)+2} \oplus P_{8(r+1)+6} \xrightarrow{(\alpha^2\gamma\ \ \beta^2\gamma)}$$

$$\longrightarrow P_{8r+7} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^4 \\ -\beta^2 \end{pmatrix}} P_{8r+1} \oplus P_{8r+5} \xrightarrow{(\alpha\ \ \beta)} P_{8r} \longrightarrow S_{8r} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^{27}(S_{8r}) \simeq S_{8(r+13)+7}$.

Лемма 5. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля* S_{8r+1} *имеет вид*

$$\cdots \longrightarrow P_{8r+2} \xrightarrow{\alpha} P_{8r+1} \longrightarrow S_{8r+1} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^{2}(S_{8r+1}) \simeq S_{8(r+1)+2}$.

Лемма 6. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля* S_{8r+2} *имеет вид*

$$\cdots \longrightarrow P_{8r+3} \xrightarrow{\alpha} P_{8r+2} \longrightarrow S_{8r+2} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^{2}(S_{8r+2}) \simeq S_{8(r+1)+3}$.

Лемма 7. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля* S_{8r+3} *имеет вид*

$$\cdots \longrightarrow P_{8r+4} \xrightarrow{\alpha} P_{8r+3} \longrightarrow S_{8r+3} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^{2}(S_{8r+3}) \simeq S_{8(r+1)+4}$.

Лемма 8. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля* S_{8r+4} *имеет вид*

$$\cdots \longrightarrow P_{8(r+11)+1} \xrightarrow{\alpha} P_{8(r+11)} \xrightarrow{\gamma\beta} P_{8(r+10)+6} \xrightarrow{\beta^2\gamma} P_{8(r+9)+7} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta^2 \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+9)+4} \oplus P_{8(r+9)+5} \xrightarrow{(\alpha^4\ \ \beta)} P_{8(r+9)} \xrightarrow{\gamma\alpha^2} P_{8(r+8)+3} \xrightarrow{\alpha^3\gamma} P_{8(r+7)+7} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^3 \\ -\beta \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+7)+2} \oplus P_{8(r+7)+6} \xrightarrow{(\alpha^2\ \ \beta^2)} P_{8(r+7)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \gamma\beta^2 \\ -\gamma\alpha^4 \end{pmatrix}} P_{8(r+6)+5} \oplus P_{8(r+6)+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta\gamma & 0 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+5)+7} \oplus P_{8(r+6)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ -\beta & \gamma\beta \end{pmatrix}} P_{8(r+5)+4} \oplus P_{8(r+5)+6} \xrightarrow{(\alpha^4\gamma\ \ \beta^2\gamma)} P_{8(r+4)+7} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha^2 \\ -\beta^2 \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+4)+3} \oplus P_{8(r+4)+5} \xrightarrow{(\alpha^3\ \ \beta)} P_{8(r+4)} \xrightarrow{\gamma\alpha^3} P_{8(r+3)+2} \xrightarrow{\alpha^2\gamma} P_{8(r+2)+7} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha^4 \end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+2)+6} \oplus P_{8(r+2)+1} \xrightarrow{(\beta^2\ \ \alpha)} P_{8(r+2)} \xrightarrow{\gamma\beta^2}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+1)+5} \xrightarrow{\beta\gamma} P_{8r+7} \xrightarrow{\alpha} P_{8r+4} \longrightarrow S_{8r+4} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^{23}(S_{8r+4}) \simeq S_{8(r+12)+1}$.

Лемма 9. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля* S_{8r+5} *имеет вид*

$$\cdots \longrightarrow P_{8r+6} \xrightarrow{\beta} P_{8r+5} \longrightarrow S_{8r+5} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^{2}(S_{8r+5}) \simeq S_{8(r+1)+6}$.

Лемма 10. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля* S_{8r+6} *имеет вид*

$$\cdots \longrightarrow P_{8(r+13)+5} \xrightarrow{\beta} P_{8(r+13)} \xrightarrow{\gamma\alpha} P_{8(r+12)+4} \xrightarrow{\alpha^4\gamma}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+11)+7} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha^2\\ -\beta\end{pmatrix}} P_{8(r+11)+3} \oplus P_{8(r+11)+6} \xrightarrow{(\alpha^3\ \beta^2)} P_{8(r+11)} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\gamma\alpha^3\\ -\gamma\beta^2\end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+10)+2} \oplus P_{8(r+10)+5} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha^2\gamma & 0\\ \alpha^2 & \beta\end{pmatrix}} P_{8(r+9)+7} \oplus P_{8(r+10)} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\beta & 0\\ -\alpha & \gamma\alpha\\ -\alpha^4 & 0\end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+9)+6} \oplus P_{8(r+9)+4} \oplus P_{8(r+9)+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\beta^2\gamma & \alpha^4\gamma & 0\\ \beta^2 & 0 & \alpha\end{pmatrix}} P_{8(r+8)+7} \oplus P_{8(r+9)} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha^2 & 0\\ -\beta & \gamma\beta\\ -\beta^2 & 0\end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+8)+3} \oplus P_{8(r+8)+6} \oplus P_{8(r+8)+5} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha^3 & 0 & \beta\\ \alpha^3\gamma & \beta^2\gamma & 0\end{pmatrix}} P_{8(r+8)} \oplus P_{8(r+7)+7} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\gamma\alpha^3 & 0\\ -\gamma\alpha & \alpha\\ 0 & -\beta^2\end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+7)+2} \oplus P_{8(r+7)+4} \oplus P_{8(r+7)+5} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha^2\gamma & 0 & 0\\ \alpha^2 & \alpha^4 & \beta\end{pmatrix}} P_{8(r+6)+7} \oplus P_{8(r+7)} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\beta & 0\\ -\alpha^2 & \gamma\alpha^2\\ -\alpha^4 & 0\end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+6)+6} \oplus P_{8(r+6)+3} \oplus P_{8(r+6)+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\beta^2\gamma & \alpha^3\gamma & 0\\ \beta^2 & 0 & \alpha\end{pmatrix}} P_{8(r+5)+7} \oplus P_{8(r+6)} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha^3 & 0\\ -\beta & \gamma\beta\\ -\beta^2 & 0\end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+5)+2} \oplus P_{8(r+5)+6} \oplus P_{8(r+5)+5} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha^2\gamma & \beta^2\gamma & 0\\ \alpha^2 & 0 & \beta\end{pmatrix}} P_{8(r+4)+7} \oplus P_{8(r+5)} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\beta^2 & 0\\ -\alpha & \gamma\alpha\\ -\alpha^4 & 0\end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+4)+5} \oplus P_{8(r+4)+4} \oplus P_{8(r+4)+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\beta\gamma & \alpha^4\gamma & 0\\ \beta & 0 & \alpha\end{pmatrix}} P_{8(r+3)+7} \oplus P_{8(r+4)} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha^2 & 0\\ -\beta & \gamma\beta\end{pmatrix}}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+3)+3} \oplus P_{8(r+3)+6} \xrightarrow{(\alpha^3\gamma\ \beta^2\gamma)} P_{8(r+2)+7} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\alpha^3\\ -\beta^2\end{pmatrix}} P_{8(r+2)+2} \oplus P_{8(r+2)+5} \xrightarrow{(\alpha^2\ \beta)}$$

$$\longrightarrow P_{8(r+2)} \xrightarrow{\gamma\alpha^4} P_{8(r+1)+1} \xrightarrow{\alpha\gamma} P_{8r+7} \xrightarrow{\beta} P_{8r+6} \longrightarrow S_{8r+6} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^{27}(S_{8r+6}) \simeq S_{8(r+14)+5}$.

Лемма 11. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля* S_{8r+7} *имеет вид*

$$\cdots \longrightarrow P_{8(r+1)} \xrightarrow{\gamma} P_{8r+7} \longrightarrow S_{8r+7} \longrightarrow 0.$$

При этом $\Omega^2(S_{8r+7}) \simeq S_{8(r+2)}$.

Доказательство. Доказательства лемм состоят из прямой проверки точности указанных последовательностей и не представляют труда. $\square$

Нам потребуется лемма Хаппеля (см. [15]), уточнённая в [3].

Лемма 12 (Happel). *Пусть*

$$\cdots \to Q_m \to Q_{m-1} \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to R \to 0$$

– минимальная проективная бимодульная резольвента R. *Тогда*

$$Q_m \cong \bigoplus_{i,j} P_{i,j}^{\dim \operatorname{Ext}_R^m(S_j, S_i)}.$$

Доказательство теоремы 3. То, что элементы Q_i имеют указанный вид, непосредственно следует из лемм 4 – 11 и леммы Хаппеля.

Как доказано в [16], для доказательства точности последовательности (+) в членах Q_m ($m \leqslant 16$) достаточно показать, что $d_m d_{m+1} = 0$. Это соотношение проверяется прямыми вычислениями произведений соответствующих матриц.

Из точности в члене Q_{29} следует, что $\Omega^{29}({}_\Lambda R) \simeq {}_1R_\sigma$, где $\Omega^{29}({}_\Lambda R) = \operatorname{Im} d_{28}$ – 29-я сизигия модуля R, а ${}_1R_\sigma$ – скрученный бимодуль. Следовательно, в членах Q_t ($t > 29$) точность также имеет место. $\square$

Напомним, что для R-бимодуля M *скрученным бимодулем* назовем линейное пространство M, на котором левое и правое действия алгебры R (обозначаемые звездочкой) заданы следующим образом:

$$r * m * s = \lambda(r) \cdot m \cdot \mu(s) \text{ для } r, s \in R \text{ и } m \in M,$$

где λ, μ – некоторые автоморфизмы алгебры R. Такой скрученный бимодуль обозначаем через ${}_\lambda M_\mu$.

Следствие 13. *Имеет место изоморфизм* $\Omega^{29}({}_\Lambda R) \simeq {}_1R_\sigma$.

Из предыдущего непосредственно вытекают следующие два утверждения.

Предложение 14. *Автоморфизм* σ *имеет конечный порядок, причём*

(1) *если* $\operatorname{char} K = 2$, *то порядок* σ *равен* $\frac{s}{\text{НОД}(s,15)}$;

(2) *если* $\operatorname{char} K \neq 2$, *то порядок* σ *равен* $\frac{s}{\text{НОД}(s,15)}$, *если* $\frac{s}{\text{НОД}(s,15)}$ *чётно, и* $\frac{2s}{\text{НОД}(s,15)}$ *в противном случае.*

Предложение 15. *Минимальный период бимодульной резольвенты R равен* $29 \operatorname{ord} \sigma$.

§4. Аддитивная структура алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$

Предложение 16 (Размерности групп гомоморфизмов, $s > 1$). *Пусть $s > 1$ и $R = R_s$ – алгебра типа E_8. Далее, $deg \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ℓ – целая часть, а r – остаток от деления deg на 29.*

(1) *Если $r \in \{0, 14, 28\}$, то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = \begin{cases} 8s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s) \text{ или } m + 15\ell \equiv 1(s), \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(2) *Если $r \in \{1, 27\}$, то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = \begin{cases} 9s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s), \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(3) *Если $r = 2$, то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = \begin{cases} 5s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 1(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(4) *Если $r \in \{3, 25\}$, то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = \begin{cases} 10s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(5) *Если $r = 4$, то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = \begin{cases} 4s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 5s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 1(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(6) *Если $r \in \{5, 23\}$, то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = \begin{cases} 11s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(7) *Если* $r = 6$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = \begin{cases} 6s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 7s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 1(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(8) *Если* $r \in \{7, 21\}$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = \begin{cases} 14s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(9) *Если* $r = 8$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = \begin{cases} 4s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 8s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 1(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(10) *Если* $r \in \{9, 19\}$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = \begin{cases} 16s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(11) *Если* $r = 10$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = \begin{cases} 11s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 12s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 1(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(12) *Если* $r \in \{11, 13, 15, 17\}$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = \begin{cases} 18s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(13) *Если* $r = 12$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = \begin{cases} 10s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 7s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 1(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(14) *Если* $r = 16$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = \begin{cases} 7s, & \textit{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 10s, & \textit{если } m + 15\ell \equiv 1(s); \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(15) *Если* $r = 18$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = \begin{cases} 12s, & \textit{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 11s, & \textit{если } m + 15\ell \equiv 1(s); \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(16) *Если* $r = 20$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = \begin{cases} 8s, & \textit{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 4s, & \textit{если } m + 15\ell \equiv 1(s); \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(17) *Если* $r = 22$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = \begin{cases} 7s, & \textit{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 6s, & \textit{если } m + 15\ell \equiv 1(s); \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(18) *Если* $r = 24$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = \begin{cases} 5s, & \textit{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 4s, & \textit{если } m + 15\ell \equiv 1(s); \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(19) *Если* $r = 26$, *то*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = \begin{cases} s, & \textit{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 5s, & \textit{если } m + 15\ell \equiv 1(s); \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Размерность $\dim_K \operatorname{Hom}_\Lambda(P_{i,j}, R)$ равна количеству линейно независимых ненулевых путей колчана $\mathcal{Q}_s$, ведущих из j-ой вершины в i-ую, и доказательство состоит в последовательном рассмотрении случаев $r = 0$, $r = 1$ и т. д. □

Предложение 17 (Размерности групп гомоморфизмов, $s = 1$)**.** *Пусть $R = R_1$ – алгебра типа E_8. Далее, $deg \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ℓ – целая часть, а r – остаток от деления deg на* 29.

(1) *Если $r \in \{0, 9, 14, 19, 28\}$, то* $\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = 16$.
(2) *Если $r \in \{1, 4, 24, 27\}$, то* $\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = 9$.
(3) *Если $r \in \{2, 26\}$, то* $\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = 6$.
(4) *Если $r \in \{3, 25\}$, то* $\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = 10$.
(5) *Если $r \in \{5, 23\}$, то* $\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = 11$.
(6) *Если $r \in \{6, 22\}$, то* $\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = 13$.
(7) *Если $r \in \{7, 21\}$, то* $\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = 14$.
(8) *Если $r \in \{8, 20\}$, то* $\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = 12$.
(9) *Если $r \in \{10, 18\}$, то* $\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = 23$.
(10) *Если $r \in \{11, 13, 15, 17\}$, то* $\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = 18$.
(11) *Если $r \in \{12, 16\}$, то* $\dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) = 17$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предложения 16. □

Предложение 18 (Размерности групп кограниц)**.** *Пусть $R = R_s$ – алгебра типа E_8, и пусть*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_0, R) \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_1, R) \xrightarrow{\delta^1} \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_2, R) \xrightarrow{\delta^2} \dots \qquad (\times)$$

комплекс, полученный применением функтора $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, R)$ к минимальной проективной бимодульной резольвенте (+) *алгебры R.*

Рассмотрим группы кограниц $\mathrm{Im}\delta^{deg}$ комплекса $(\times)$. *Пусть ℓ – целая часть, а r – остаток от деления deg на* 29, *m – целая часть от деления r на* 2. *Тогда выполнено следующее.*

(1) *Если $r \in \{0, 7, 20, 27\}$, то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^{deg} = \begin{cases} 8s - 1, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s),\ \ell + m \ \vdots\ 2 \text{ or } \operatorname{char} K = 2; \\ 8s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s),\ \ell + m \ \not\vdots\ 2,\ \operatorname{char} K \neq 2; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(2) *Если $r \in \{1, 26\}$, то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^{deg} = \begin{cases} s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(3) *Если* $r \in \{2, 25\}$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^{deg} = \begin{cases} 5s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(4) *Если* $r \in \{3, 24\}$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^{deg} = \begin{cases} 5s - 1, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s),\ \ell + m \ \vdots\ 2 \text{ or } \mathrm{char}\, K = 2; \\ 5s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s),\ \ell + m \not\vdots\ 2,\ \mathrm{char}\, K \neq 2; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(5) *Если* $r \in \{4, 8, 19, 23\}$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^{deg} = \begin{cases} 4s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(6) *Если* $r \in \{5, 22\}$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^{deg} = \begin{cases} 7s - 1, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s),\ \ell + m \ \vdots\ 2 \text{ и } \mathrm{char}\, K = 3; \\ 7s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s),\ \ell + m \not\vdots\ 2 \text{ or } \mathrm{char}\, K \neq 3; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(7) *Если* $r \in \{6, 21\}$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^{deg} = \begin{cases} 6s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(8) *Если* $r \in \{9, 18\}$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^{deg} = \begin{cases} 12s - 1, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s),\ \ell + m \ \vdots\ 2 \text{ и } \mathrm{char}\, K = 5; \\ 12s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s),\ \ell + m \not\vdots\ 2 \text{ or } \mathrm{char}\, K \neq 5; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(9) *Если* $r \in \{10, 17\}$, *то*

$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^{deg} = \begin{cases} 11s - 1, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s),\ \ell + m \ \vdots\ 2 \text{ и } \mathrm{char}\, K = 3; \\ 11s, & \text{если } m + 15\ell \equiv 0(s),\ \ell + m \not\vdots\ 2 \text{ or } \mathrm{char}\, K \neq 3; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(10) *Если* $r \in \{11, 16\}$, *то*
$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^{deg} = \begin{cases} 7s, & \textit{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(11) *Если* $r \in \{12, 15\}$, *то*
$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^{deg} = \begin{cases} 10s-1, & \textit{если } m+15\ell\equiv 0(s),\ \ell+m \,\vdots\, 2 \textit{ or } \mathrm{char}\, K = 2; \\ 10s, & \textit{если } m+15\ell\equiv 0(s),\ \ell+m \not\vdots\, 2,\ \mathrm{char}\, K \neq 2; \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(12) *Если* $r \in \{13, 14, 28\}$, *то*
$$\dim_K \mathrm{Im}\delta^{deg} = \begin{cases} 8s, & \textit{если } m + 15\ell \equiv 0(s); \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Доказательство техническое и состоит в построении матриц образа, исходя из описания матриц дифференциалов, и последующем вычислении ранга матрицы образа. □

Теорема 19 (Аддитивная структура, $s > 1$)**.** *Пусть* $s > 1$ *и* $R = R_s$ – *алгебра типа* E_8. *Далее,* $deg \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ℓ – *целая часть, а* r – *остаток от деления* deg *на* 29, m – *целая часть от деления* r *на* 2. *Тогда* $\dim_K \mathrm{HH}^{deg}(R) = 1$, *если выполнено одно из следующих условий*:

(1) $r \in \{0, 1, 3, 7, 12, 13, 15, 20, 21, 24, 25, 27\}$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$,
$\ell + m \,\vdots\, 2$ *или* $\mathrm{char}\, K = 2$;

(2) $r \in \{0, 4, 8, 16, 28\}$, $m + 15\ell \equiv 1(s)$, $\ell + m \not\vdots\, 2$ *или* $\mathrm{char}\, K = 2$;

(3) $r \in \{5, 10, 11, 17, 22, 23\}$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell + m \,\vdots\, 2$, $\mathrm{char}\, K = 3$;

(4) $r \in \{6, 18\}$, $m + 15\ell \equiv 1(s)$, $\ell + m \not\vdots\, 2$, $\mathrm{char}\, K = 3$;

(5) $r \in \{9, 18, 19\}$, $m + 15\ell \equiv 0(s)$, $\ell + m \,\vdots\, 2$, $\mathrm{char}\, K = 5$;

(6) $r = 10$, $m + 15\ell \equiv 1(s)$, $\ell + m \not\vdots\, 2$, $\mathrm{char}\, K = 3$.

Во всех остальных случаях $\dim_K \mathrm{HH}^{deg}(R) = 0$.

Доказательство. Так как
$$\dim_K \mathrm{HH}^{deg}(R) = \dim_K \mathrm{Ker}\delta^{deg} - \dim_K \mathrm{Im}\delta^{deg-1},$$
а
$$\dim_K \mathrm{Ker}\delta^{deg} = \dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{deg}, R) - \dim_K \mathrm{Im}\delta^{deg},$$

утверждения теоремы легко выводится из предложений 16 – 18. □

Теорема 20 (Аддитивная структура, $s = 1$)**.** *Пусть $R = R_1$ – алгебра типа E_8. Далее, $deg \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ℓ – целая часть, а r – остаток от деления deg на 29. Тогда*
(*а*) $\dim_K \mathrm{HH}^{deg}(R) = 8$, *если* $deg = 0$;
(*б*) $\dim_K \mathrm{HH}^{deg}(R) = 1$, *если выполнено одно из следующих условий*:
(1) $r \in \{0, 1, 3, 7, 12, 13, 15, 20, 21, 24, 25, 27\}$,

$deg > 0$, $\ell + m \,\vdots\, 2$ *или* $\mathrm{char}\, K = 2$,

(2) $r \in \{0, 4, 8, 16, 28\}$, $\ell + m \not\vdots\, 2$ *или* $\mathrm{char}\, K = 2$,

(3) $r \in \{5, 10, 11, 17, 22, 23\}$, $\ell + m \,\vdots\, 2$, $\mathrm{char}\, K = 3$,

(4) $r \in \{6, 18\}$, $\ell + m \not\vdots\, 2$, $\mathrm{char}\, K = 3$,

(5) $r \in \{9, 18, 19\}$, $\ell + m \,\vdots\, 2$, $\mathrm{char}\, K = 5$,

(6) $r = 10$, $\ell + m \not\vdots\, 2$, $\mathrm{char}\, K = 3$;
(*в*) *во всех остальных случаях* $\dim_K \mathrm{HH}^{deg}(R) = 0$.

§5. Образующие алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$

Для $s > 1$ введём множество образующих $Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)}, \dots Y_t^{(28)}$, таких что $\deg Y_t^{(i)} = t$, $0 \leqslant t < 29 \,\mathrm{ord}\, \sigma$ и t удовлетворяет условиям (i)-го пункта (см. список в §2). Для $s = 1$ введём множество образующих $Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)}, \dots Y_t^{(36)}$, таких что $\deg Y_t^{(i)} = t$, $0 \leqslant t < 29 \,\mathrm{ord}\, \sigma$ и t удовлетворяет условиям (i)-го пункта списков (см. §2), если $i \leqslant 28$, и $t = 0$, если $i > 28$. Для образующей $Q_t \to R$ опишем отображение $Q_t \to Q_0$ в виде матрицы. Соответствующая образующая будет композицией этого отображения с отображением умножения $Q_t \to Q_0 \xrightarrow{\varepsilon} R$.

Обозначения.
(1) Для степени t элемента из множества образующих представим t в виде $t = 29\ell + r$ $(0 \leqslant r \leqslant 28)$.
(2) Для j-й колонки обозначим через j_2 целую часть от деления j на s.

(1) $Y_t^{(1)}$ – матрица размера $(8s \times 8s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{8j+j_2} \otimes e_{8j+j_2}, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(2) $Y_t^{(2)}$ – матрица размера $(8s \times 9s)$ с двумя ненулевыми элементами:

$$y_{0,0} = w_{0\to 1} \otimes e_0 \text{ и } y_{0,s} = w_{0\to 5} \otimes e_0.$$

(3) $Y_t^{(3)}$ – матрица размера $(8s \times 10s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{8j\to 8j+2} \otimes e_{8j}, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{8j\to 8j+6} \otimes e_{8j}, & \text{если } i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 5s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $5s \leqslant j < 6s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{8j+4\to 8(j+1)} \otimes e_{8j+4}, & \text{если } i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 8s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $8s \leqslant j < 9s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{8j+7\to 8(j+1)+1} \otimes e_{8j+7}, & \text{если } i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $9s \leqslant j < 10s$, то $y_{ij} = 0$.

(4) $Y_t^{(4)}$ – матрица размера $(8s \times 11s)$ с единственным ненулевым элементом

$$y_{0,0} = w_{0\to 7} \otimes e_0.$$

(5) $Y_t^{(5)}$ – матрица размера $(8s \times 11s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < 3s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} (1-2f(j_2,2))w_{8j\to 8j+5-2j_2} \otimes e_{8j}, & \text{если } i=(j)_s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 5s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $5s \leqslant j < 8s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j_2+1} w_{8j+j_2-2\to 8(j+1)-f(j_2,6)} \otimes e_{8j+j_2-2}, & \text{если } i=j-2s; \\ 0, \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $8s \leqslant j < 11s$, то $y_{ij} = 0$.

(6) $Y_t^{(6)}$ – матрица размера $(8s \times 13s)$ с единственным ненулевым элементом

$$y_{0,0} = w_{0\to 7} \otimes e_0.$$

(7) $Y_t^{(7)}$ – матрица размера $(8s \times 14s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид:

Если $0 \leqslant j < s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $s \leqslant j < 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{8j\to 8j+4} \otimes e_{8j}, & \text{если } i=j-s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 3s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $3s \leqslant j < 4s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{8j\to 8j+5} \otimes e_{8j}, & \text{если } i=j-3s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 9s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $9s \leqslant j < 10s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{8j+6\to 8j+7} \otimes e_{8j+6}, & \text{если } i=j-3s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $10s \leqslant j < 11s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $11s \leqslant j < 12s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{8j+7\to 8(j+1)+5} \otimes e_{8j+7}, & \text{если } i=j-4s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $12s \leqslant j < 14s$, то $y_{ij} = 0$.

(8) $Y_t^{(8)}$ – матрица размера $(8s \times 16s)$ с единственным ненулевым элементом
$$y_{0,0} = -w_{0\to 7} \otimes e_0.$$

(9) $Y_t^{(9)}$ – матрица размера $(8s \times 16s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид.

Если $0 \leqslant j < 3s$, то
$$y_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j_2+1} w_{8j\to 8j+3j_2+5f(j_2,0)} \otimes e_{8j}, & \text{если } i = (j)_s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 5s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $5s \leqslant j < 8s$, то
$$y_{ij} = \begin{cases} (1 + f(j_2, 6)) w_{8j+j_2-3\to 8j+7+f(j_2,6)} \otimes e_{8j+j_2-3}, & \text{если } i = j - 3s; \\ 0, \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $8s \leqslant j < 9s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $9s \leqslant j < 10s$, то
$$y_{ij} = \begin{cases} w_{8j+5\to 8(j+1)} \otimes e_{8j+5}, & \text{если } i = j - 4s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $10s \leqslant j < 12s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $12s \leqslant j < 14s$, то
$$y_{ij} = \begin{cases} (1 + 2f(j_2, 13)) w_{8j+7\to 8(j+1)+2(j_2-11)} \otimes e_{8j+7}, & \text{если } i = 7s + (j)_s; \\ 0, \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $14s \leqslant j < 16s$, то $y_{ij} = 0$.

(10) $Y_t^{(10)}$ – матрица размера $(8s \times 19s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид.

Если $0 \leqslant j < s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $s \leqslant j < 3s$, то
$$y_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j_2+1} e_{8j} \otimes e_{8j}, & \text{если } i = (j)_s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 4s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $4s \leqslant j < 7s$, то
$$y_{ij} = \begin{cases} (-1 + 2f(j_2, 4)) e_{8j+j_2-3} \otimes e_{8j+j_2-3}, & \text{если } i = j - 3s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $7s \leqslant j < 8s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $8s \leqslant j < 9s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -e_{8j+4} \otimes e_{8j+4}, & \text{если } i = j - 4s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $9s \leqslant j < 10s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $10s \leqslant j < 11s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{8j+5} \otimes e_{8j+5}, & \text{если } i = j - 5s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $11s \leqslant j < 14s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $14s \leqslant j < 15s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{8j+6} \otimes e_{8j+6}, & \text{если } i = j - 8s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $15s \leqslant j < 16s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $16s \leqslant j < 19s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j_2} w_{8j+7 \to 8j+7+f(j_2,18)} \otimes e_{8j+7}, & \text{если } i = 7s + (j)_s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(11) $Y_t^{(11)}$ – матрица размера $(8s \times 19s)$ с двумя ненулевыми элементами:

$$y_{0,s} = w_{0\to 8} \otimes e_0 \text{ и } y_{0,2s} = w_{0\to 8} \otimes e_0.$$

(12) $Y_t^{(12)}$ – матрица размера $(8s \times 18s)$ со следующими ненулевыми элементами:

$$\begin{aligned}
y_{(-5)_s,(-5)_s} &= w_{8j\to 8j+2} \otimes e_{8j}, \\
y_{(-4)_s,(-4)_s} &= -w_{8j\to 8j+2} \otimes e_{8j}, \\
y_{(-3)_s,(-3)_s} &= w_{8j\to 8j+2} \otimes e_{8j}, \\
y_{(-2)_s,(-2)_s} &= -w_{8j\to 8j+2} \otimes e_{8j}, \\
y_{(-6)_s,s+(-6)_s} &= -w_{8j\to 8j+6} \otimes e_{8j}, \\
y_{(-2)_s,s+(-2)_s} &= w_{8j\to 8j+6} \otimes e_{8j}, \\
y_{2s+(-5)_s,6s+(-5)_s} &= -w_{8j+2\to 8(j+1)} \otimes e_{8j+2}, \\
y_{2s+(-4)_s,6s+(-4)_s} &= w_{8j+2\to 8(j+1)} \otimes e_{8j+2}, \\
y_{2s+(-3)_s,6s+(-3)_s} &= -w_{8j+2\to 8(j+1)} \otimes e_{8j+2}, \\
y_{3s+(-6)_s,7s+(-6)_s} &= -w_{8j+3\to 8j+7} \otimes e_{8j+3},
\end{aligned}$$

$$y_{3s+(-5)_s,7s+(-5)_s} = w_{8j+3\to 8j+7} \otimes e_{8j+3},$$
$$y_{3s+(-4)_s,7s+(-4)_s} = -w_{8j+3\to 8j+7} \otimes e_{8j+3},$$
$$y_{3s+(-3)_s,7s+(-3)_s} = w_{8j+3\to 8j+7} \otimes e_{8j+3},$$
$$y_{4s+(-2)_s,8s+(-2)_s} = -w_{8j+4\to 8j+7} \otimes e_{8j+4},$$
$$y_{5s+(-6)_s,10s+(-6)_s} = w_{8j+5\to 8j+7} \otimes e_{8j+5},$$
$$y_{5s+(-5)_s,10s+(-5)_s} = -w_{8j+5\to 8j+7} \otimes e_{8j+5},$$
$$y_{5s+(-4)_s,10s+(-4)_s} = w_{8j+5\to 8j+7} \otimes e_{8j+5},$$
$$y_{5s+(-3)_s,10s+(-3)_s} = -w_{8j+5\to 8j+7} \otimes e_{8j+5},$$
$$y_{5s+(-2)_s,10s+(-2)_s} = -w_{8j+5\to 8j+7} \otimes e_{8j+5}.$$

(13) $Y_t^{(13)}$ – матрица размера $(8s\times 19s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид.

Если $0 \leqslant j < s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $s \leqslant j < 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{8j} \otimes e_{8j}, & \text{если } i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 3s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $3s \leqslant j < 5s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{8j+j_2-2\to 8j+j_2-1} \otimes e_{8j+j_2-2}, & \text{если } i = j - 2s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 6s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $6s \leqslant j < 7s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{8j+3\to 8j+4} \otimes e_{8j+3}, & \text{если } i = j - 3s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $7s \leqslant j < 11s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $11s \leqslant j < 12s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{8j+5\to 8j+6} \otimes e_{8j+5}, & \text{если } i = j - 6s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $12s \leqslant j < 14s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j_2+1} e_{8j+j_2-7} \otimes e_{8j+j_2-7}, & \text{если } i = j - 7s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $14s \leqslant j < 16s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $16s \leqslant j < 17s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{8j+7} \otimes e_{8j+7}, & \text{если } i = j - 9s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $17s \leqslant j < 18s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $18s \leqslant j < 19s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{8j+7\to 8(j+1)} \otimes e_{8j+7}, & \text{если } i = j - 11s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(14) $Y_t^{(14)}$ – матрица размера $(8s \times 18s)$ со следующими ненулевыми элементами:

$$\begin{aligned} y_{(-3)_s, s+(-3)_s} &= w_{8j\to 8j+3} \otimes e_{8j}, \\ y_{s+(-3)_s, 4s+(-3)_s} &= -w_{8j+1\to 8j+8} \otimes e_{8j+1}, \\ y_{5s+(-3)_s, 9s+(-3)_s} &= w_{8j+5\to 8j+7} \otimes e_{8j+5}, \\ y_{7s+(-4)_s, 14s+(-4)_s} &= w_{8j+7\to 8(j+1)+6} \otimes e_{8j+7}. \end{aligned}$$

(15) $Y_t^{(15)}$ – матрица размера $(8s \times 18s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид.

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{8j\to 8j+3} \otimes e_{8j}, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 8s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $8s \leqslant j < 9s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{8j+3\to 8(j+1)} \otimes e_{8j+3}, & \text{если } i = j - 5s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $9s \leqslant j < 10s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $10s \leqslant j < 11s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{8j+5\to 8j+7} \otimes e_{8j+5}, & \text{если } i = j - 5s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $11s \leqslant j < 14s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $14s \leqslant j < 15s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{8j+7\to 8(j+1)+2} \otimes e_{8j+7}, & \text{если } i = j - 7s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $15s \leqslant j < 18s$, то $y_{ij} = 0$.

(16) $Y_t^{(16)}$ – матрица размера $(8s \times 19s)$ с единственным ненулевым элементом

$$y_{0,0} = w_{0\to 8} \otimes e_0.$$

(17) $Y_t^{(17)}$ – матрица размера $(8s \times 18s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид.

Если $0 \leqslant j < s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $s \leqslant j < 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{8j\to 8j+4} \otimes e_{8j}, & \text{если } i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 3s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $3s \leqslant j < 4s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{8j\to 8j+5} \otimes e_{8j}, & \text{если } i = j - 3s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 7s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $7s \leqslant j < 8s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{8j+3\to 8j+7} \otimes e_{8j+3}, & \text{если } i = j - 4s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $8s \leqslant j < 9s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $9s \leqslant j < 10s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{8j+5\to 8(j+1)} \otimes e_{8j+5}, & \text{если } i = j - 4s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $10s \leqslant j < 13s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $13s \leqslant j < 14s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{8j+7\to 8(j+1)+3} \otimes e_{8j+7}, & \text{если } i = j - 6s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $14s \leqslant j < 18s$, то $y_{ij} = 0$.

(18) $Y_t^{(18)}$ – матрица размера $(8s \times 19s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид.

Если $0 \leqslant j < s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $s \leqslant j < 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{8j} \otimes e_{8j}, & \text{если } i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 3s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} 2e_{8j} \otimes e_{8j}, & \text{если } i = j - 2s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 4s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $4s \leqslant j < 6s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} 2(-1)^{j_2+1} e_{8j+j_2-3} \otimes e_{8j+j_2-3}, & \text{если } i = j - 3s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 7s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $7s \leqslant j < 9s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} 2e_{8j+j_2-4} \otimes e_{8j+j_2-4}, & \text{если } i = j - 4s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $9s \leqslant j < 11s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $11s \leqslant j < 12s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} 2w_{8j+5 \to 8j+6} \otimes e_{8j+5}, & \text{если } i = j - 6s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $12s \leqslant j < 14s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j_2+1} e_{8j+j_2-7} \otimes e_{8j+j_2-7}, & \text{если } i = j - 7s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $14s \leqslant j < 16s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $16s \leqslant j < 17s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{8j+7} \otimes e_{8j+7}, & \text{если } i = j - 9s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $17s \leqslant j < 18s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $18s \leqslant j < 19s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} 2e_{8j+7} \otimes e_{8j+7}, & \text{если } i = j - 11s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(19) $Y_t^{(19)}$ – матрица размера $(8s \times 19s)$ с единственным ненулевым элементом

$$y_{0,0} = w_{0\to 8} \otimes e_0.$$

(20) $Y_t^{(20)}$ – матрица размера $(8s \times 16s)$ со следующими ненулевыми элементами:

$$\begin{aligned} y_{(-3)_s, s+(-3)_s} &= -w_{8j\to 8j+6} \otimes e_{8j}, \\ y_{(-2)_s, s+(-2)_s} &= -w_{8j\to 8j+6} \otimes e_{8j}, \\ y_{s+(-4)_s, 4s+(-4)_s} &= -w_{8j+1\to 8(j+1)} \otimes e_{8j+1}, \\ y_{2s+(-3)_s, 5s+(-3)_s} &= w_{8j+2\to 8j+7} \otimes e_{8j+2}, \\ y_{2s+(-2)_s, 5s+(-2)_s} &= w_{8j+2\to 8j+7} \otimes e_{8j+2}, \\ y_{5s+(-4)_s, 9s+(-4)_s} &= w_{8j+5\to 8(j+1)} \otimes e_{8j+5}. \end{aligned}$$

(21) $Y_t^{(21)}$ – матрица размера $(8s \times 16s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид.

Если $0 \leqslant j < s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $s \leqslant j < 3s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j_2+1} w_{8j+j_2-1\to 8j+2(j_2-1)} \otimes e_{8j+j_2-1}, & \text{если } i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $3s \leqslant j < 4s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $4s \leqslant j < 6s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{8j+j_2-2\to 8j+j_2-1} \otimes e_{8j+j_2-2}, & \text{если } i = j - 2s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $6s \leqslant j < 8s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $8s \leqslant j < 9s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{8j+5\to 8j+6} \otimes e_{8j+5}, & \text{если } i = j - 3s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $9s \leqslant j < 13s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $13s \leqslant j < 15s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j_2+1} w_{8j+7 \to 8j+j_2-6} \otimes e_{8j+7}, & \text{если } i = 7s + (j)_s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $15s \leqslant j < 16s$, то $y_{ij} = 0$.

(22) $Y_t^{(22)}$ – матрица размера $(8s \times 14s)$ со следующими ненулевыми элементами:

$$\begin{aligned} y_{3s+(-7)_s, 5s+(-7)_s} &= -w_{8j+3 \to 8j+7} \otimes e_{8j+3}, \\ y_{3s+(-6)_s, 5s+(-6)_s} &= w_{8j+3 \to 8j+7} \otimes e_{8j+3}, \\ y_{3s+(-5)_s, 5s+(-5)_s} &= -w_{8j+3 \to 8j+7} \otimes e_{8j+3}, \\ y_{5s+(-7)_s, 7s+(-7)_s} &= -w_{8j+5 \to 8j+7} \otimes e_{8j+5}, \\ y_{5s+(-6)_s, 7s+(-6)_s} &= w_{8j+5 \to 8j+7} \otimes e_{8j+5}, \\ y_{5s+(-5)_s, 7s+(-5)_s} &= -w_{8j+5 \to 8j+7} \otimes e_{8j+5}. \end{aligned}$$

(23) $Y_t^{(23)}$ – матрица размера $(8s \times 13s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид.

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{8j} \otimes e_{8j}, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 2s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $2s \leqslant j < 4s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{8j+j_2-1 \to 8j+j_2+1} \otimes e_{8j+j_2-1}, & \text{если } i = j - s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $4s \leqslant j < 8s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $8s \leqslant j < 9s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -e_{8j+5} \otimes e_{8j+5}, & \text{если } i = j - 3s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $9s \leqslant j < 10s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $10s \leqslant j < 12s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{8j+j_2-4} \otimes e_{8j+j_2-4}, & \text{если } i = j - 4s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $12s \leqslant j < 13s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{8j+7\to 8(j+1)} \otimes e_{8j+7}, & \text{если } i = j - 5s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(24) $Y_t^{(24)}$ – матрица размера $(8s \times 11s)$ со следующими ненулевыми элементами:

$$\begin{aligned} y_{6s+(-2)_s,7s+(-2)_s} &= w_{8j+6\to 8j+7} \otimes e_{8j+6}, \\ y_{6s+(-3)_s,7s+(-3)_s} &= w_{8j+6\to 8j+7} \otimes e_{8j+6}, \\ y_{7s+(-4)_s,9s+(-4)_s} &= w_{8j+7\to 8(j+1)+4} \otimes e_{8j+7}, \\ y_{7s+(-3)_s,9s+(-3)_s} &= w_{8j+7\to 8(j+1)+4} \otimes e_{8j+7}. \end{aligned}$$

(25) $Y_t^{(25)}$ – матрица размера $(8s \times 11s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид.

Если $0 \leqslant j < s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} e_{8j} \otimes e_{8j}, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $s \leqslant j < 2s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{8j+1\to 8j+4} \otimes e_{8j+1}, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2s \leqslant j < 7s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $7s \leqslant j < 8s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{8j+5\to 8j+6} \otimes e_{8j+5}, & \text{если } i = j - 2s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $8s \leqslant j < 10s$, то $y_{ij} = 0$.

Если $10s \leqslant j < 11s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -e_{8j+7} \otimes e_{8j+7}, & \text{если } i = j - 3s; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(26) $Y_t^{(26)}$ – матрица размера $(8s \times 10s)$ с двумя ненулевыми элементами

$$y_{0,0} = w_{0\to 4} \otimes e_0 \text{ и } y_{0,s} = w_{0\to 6} \otimes e_0.$$

(27) $Y_t^{(27)}$ – матрица размера $(8s \times 9s)$, элементы y_{ij} которой имеют следующий вид.

Если $0 \leqslant j < 5s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} w_{8j+j_2 \to 8j+7+j_2} \otimes e_{8j+j_2}, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $5s \leqslant j < 7s$, то $y_{ij} = 0$.
Если $7s \leqslant j < 8s$, то

$$y_{ij} = \begin{cases} -w_{8j+7 \to 8(j+1)+4} \otimes e_{8j+7}, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $8s \leqslant j < 9s$, то $y_{ij} = 0$.

(28) $Y_t^{(28)}$ – матрица размера $(8s \times 8s)$ с единственным ненулевым элементом

$$y_{0,0} = -w_{0 \to 8} \otimes e_0.$$

(29) $Y_t^{(29)}$ – матрица размера $(8s \times 8s)$ с единственным ненулевым элементом

$$y_{0,0} = w_{0 \to 8} \otimes e_0.$$

(30) $Y_t^{(30)}$ – матрица размера $(8s \times 8s)$ с единственным ненулевым элементом

$$y_{1,1} = w_{1 \to 9} \otimes e_1.$$

(31) $Y_t^{(31)}$ – матрица размера $(8s \times 8s)$ с единственным ненулевым элементом

$$y_{2,2} = w_{2 \to 10} \otimes e_2.$$

(32) $Y_t^{(32)}$ – матрица размера $(8s \times 8s)$ с единственным ненулевым элементом

$$y_{3,3} = w_{3 \to 11} \otimes e_3.$$

(33) $Y_t^{(33)}$ – матрица размера $(8s \times 8s)$ с единственным ненулевым элементом

$$y_{4,4} = w_{4 \to 12} \otimes e_4.$$

(34) $Y_t^{(34)}$ – матрица размера $(8s \times 8s)$ с единственным ненулевым элементом

$$y_{5,5} = w_{5 \to 13} \otimes e_5.$$

(35) $Y_t^{(35)}$ – матрица размера $(8s \times 8s)$ с единственным ненулевым элементом

$$y_{6,6} = w_{6 \to 14} \otimes e_6.$$

(36) $Y_t^{(36)}$ – матрица размера $(8s \times 8s)$ с единственным ненулевым элементом

$$y_{7,7} = w_{7\to 15} \otimes e_7.$$

§6. Произведения в $\mathrm{HH}^*(R)$

Пусть $Q_\bullet \to R$ – минимальная проективная бимодульная резольвента алгебры R, построенная в параграфе 3. Любой коцикл $f \in \mathrm{Ker}\delta^s$ поднимается (однозначно с точностью до гомотопии) до цепного отображения комплексов $\{\varphi_i : Q_{s+i} \to Q_i\}_{i\geqslant 0}$. Гомоморфизм φ_i назовём *i-ым сдвигом* коцикла f и будем обозначать через $\Omega^i(f)$. Для коциклов $f_1 \in \mathrm{Ker}\delta^{s_1}$ и $f_2 \in \mathrm{Ker}\delta^{s_2}$ имеем

$$\mathrm{cl} f_2 \cdot \mathrm{cl} f_1 = \mathrm{cl}(\Omega^0(f_2)\Omega^{s_2}(f_1)). \qquad (*)$$

Описания Ω-сдвигов образующих элементов $Y_t^{(i)}$ громоздкие и не включены в данную статью. С ними можно ознакомиться в препринте [17]. Из описания элементов $Y_t^{(i)}$ и их Ω-сдвигов мы можем найти произведения элементов, пользуясь формулой $(*)$. Произведения всех элементов, кроме $Y^{(4)}$, $Y^{(8)}$, $Y^{(14)}$, $Y^{(16)}$, $Y^{(22)}$, $Y^{(26)}$ и $Y^{(28)}$, находятся путём прямых вычислений (более подробно см. [17]). Завершает описание произведений следующая лемма.

Лемма 21.

(а) *Пусть $Y^{(4)}$ – произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы $Y^{(2)}$ и $Y^{(3)}$ такие, что $Y^{(4)} = Y^{(2)}Y^{(3)}$.*

(б) *Пусть $Y^{(8)}$ – произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы $Y^{(2)}$ и $Y^{(7)}$ такие, что $Y^{(8)} = Y^{(2)}Y^{(7)}$.*

(в) *Пусть $Y^{(14)}$ – произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы $Y^{(2)}$ и $Y^{(13)}$ такие, что $Y^{(14)} = Y^{(2)}Y^{(13)}$.*

(г) *Пусть $Y^{(16)}$ – произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы $Y^{(2)}$ и $Y^{(15)}$ такие, что $Y^{(16)} = Y^{(2)}Y^{(15)}$.*

(д) *Пусть $Y^{(22)}$ – произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы $Y^{(2)}$ и $Y^{(21)}$ такие, что $Y^{(22)} = Y^{(2)}Y^{(21)}$.*

(е) *Пусть* $Y^{(26)}$ *– произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы* $Y^{(2)}$ *и* $Y^{(25)}$ *такие, что* $Y^{(26)} = Y^{(2)}Y^{(25)}$.

(ж) *Пусть* $Y^{(28)}$ *– произвольный элемент соответствующего типа из множества образующих. Тогда существуют элементы* $Y^{(2)}$ *и* $Y^{(27)}$ *такие, что* $Y^{(28)} = Y^{(2)}Y^{(27)}$.

Доказательство. Степень 1 есть степень типа 2, для любого s. Остается использовать соотношения для типа (2). □

Используя образующие $Y^{(i)}$ в качестве элементов $X^{(i)}$, введённых в §3, получаем искомое описание структуры кольца когомологий Хохшильда.

Список литературы

1. C. Riedtmann, *Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück.* — Comment. Math. Helv., **55** (1980), 199–224.
2. K. Erdmann, T. Holm, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class* A_n. — Forum Math., **11** (1999), 177–201.
3. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 36–66.
4. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 173–200.
5. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 210–246.
6. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 121–182.
7. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. II. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **365** (2009), 63–121.
8. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. III. — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2011), 100–128.
9. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда нестандартных самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 48–99.
10. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. IV. — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 100–118.
11. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. V. — Зап. научн. семин. ПОМИ **394** (2011), 140–173.
12. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* E_6. — Зап. научн. семин. ПОМИ **423** (2014), 205–243.
13. М. А. Качалова, *Кольцо когомологий Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* E_6. *II.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **478** (2019), 128–171.

14. М. А. Качалова, *Кольцо когомологий Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа E_7*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **484** (2019), 86–114.
15. D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras.* — Lect. Notes Math., 1989, 1404, 108–126.
16. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, С. О. Иванов, *О построении бимодульных резольвент с помощью леммы Хаппеля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 61–70.
17. M. Kachalova, *Hochschild cohomology rings for self-injective algebras of tree classes E_7 and E_8*. — https://arxiv.org/abs/1910.03043.

Kachalova M. A. Hochschild cohomology ring for self-injective algebras of tree class E_8.

The Hochschild cohomology ring for self-injective algebras of tree class E_8 with finite representation type is described in terms of generators and relations.

ООО Яндекс.Технологии,
ул. Льва Толстого, 16,
119021 Москва, Россия
E-mail: mashakachalova@mail.ru

Поступило 9 марта 2021 г.