Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 500, 2021 г.

А. И. Генералов

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР ПОЛУДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА, X. АЛГЕБРА КОГОМОЛОГИЙ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ АЛГЕБР

Введение

Работа посвящена вычислению алгебры когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ для так называемого "исключительного" семейства локальных алгебр полудиэдрального типа. Напомним, что алгебры диэдрального, полудиэдрального икватернионного типов возникли в работах К. Эрдман при классификации групповых блоков, имеющих ручной типпредставления (см. [1]). Для этого "исключительного" семейства, возникающего в случае, когда основное поле имеет характеристику 2, ранее были вычислены группы когомологий Хохшильда (см. [2]).

Отметим, что в [3,4] была вычислена алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ для другого семейства локальных алгебр полудиэдрального типа, содержащего, в частности, групповые алгебры полудиэдральных групп над алгебраически замкнутым полем характеристики 2. Кроме того, когомологии Хохшильда исследовались для некоторых других семейств алгебр полудиэдрального типа, имеющих 2 или 3 простых модуля (см. [5–11]).

Для вычисления умножений в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ используется минимальная проективная (= свободная) резольвента для алгебр из рассматриваемого семейства, построенная в работе [2].

Кратко опишем структуру работы. В разделе 1 формулируются основные результаты работы, в разделе 2 приведены некоторые вспомогательные сведения, а доказательства основных результатов приведены в разделе 3.

Ключевые слова: локальные алгебры полудиэдрального типа, когомологии Хохшильда.

Автор благодарит грант РФФИ 20-01-00030 за поддержку.

§1. Формулировка основного результата

Пусть K – алгебраически замкнутое поле произвольной характеристики $p := \operatorname{char} K$. Для $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и $c, d \in K$ определим K-алгебру $R_{k,c,d} = K\langle X, Y\rangle/I$, где I – идеал свободной алгебры $K\langle X, Y\rangle$, порождённый элементами

$$X^2 - Y(XY)^{k-1} - c(XY)^k,\ Y^2 - d(XY)^k,\ (XY)^k - (YX)^k,\ X(YX)^k.$$

Образы элементов X, Y относительно канонического гомоморфизма из $K\langle X, Y\rangle$ в $R_{k,c,d}$ обозначаем через x и y соответственно. Алгебра $R_{k,c,d}$ – симметрическая локальная алгебра, имеющая ручной тип представления [1, III.1.2]; кроме того, в терминах [1, Ch.VIII] $R_{k,c,d}$ – алгебра полудиэдрального типа.

Алгебра $R_{k,c,d}$ допускает в качестве K-базиса множество

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_R = \{(xy)^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k\} \cup \{(yx)^i \mid 1 \leqslant i \leqslant k-1\}\\ \cup \{x(yx)^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\} \cup \{y(xy)^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\},\end{aligned} \tag{1.1}$$

состоящее из всех ненулевых путей колчана алгебры $R_{k,c,d}$ (он состоит из одной вершины и двух петель x и y).

Для нулевых значений параметров c и d алгебры $S_k := R_{k,0,0}$ составляют одну из серий локальных алгебр, входящую в классификацию из [1]. В случае, когда $p \neq 2$, этим исчерпываются все локальные алгебры полудиэдрального типа. Когомологии Хохшильда алгебр S_k (для любой характеристики p) были исследованы в работах [3, 4]. Отметим, что если G – полудиэдральная группа порядка 2^m, $m \geqslant 4$, а $p = 2$, то групповая алгебра KG изоморфна алгебре S_k для $k = 2^{m-2}$.

Но при $(c, d) \neq (0, 0)$ и $p = 2$ алгебры $R_{k,c,d}$ образуют ещё одну серию локальных алгебр из классификации К. Эрдман [1]. Отметим, что если $c \neq 0$, то можно считать, что $c = 1$.

Далее мы всюду предполагаем, что основное поле K имеет характеристику два.

В этом разделе мы приведём основной результат работы, а именно опишем мультипликативную структуру алгебры когомологий Хохшильда для рассматриваемых алгебр. Поскольку это описание зависит от значений параметров, входящих в определяющие соотношения алгебр из исследуемой серии, то мы сначала построим несколько вспомогательных градуированных K-алгебр.

Пусть

$$\mathcal{X}_1 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4, \widetilde{w}, z\}. \tag{1.2}$$

На алгебре $K[\mathcal{X}_1]$ введём градуировку так, что

$$\begin{aligned}
&\deg p_1 = \deg p_2 = \deg p_3 = \deg p_4 = 0,\\
&\deg u_1 = \deg u_2 = \deg u_3 = 1,\\
&\deg v_1 = \deg v_2 = \deg v_3 = \deg v_4 = 2,\\
&\deg \widetilde{w} = 3,\ \deg z = 4.
\end{aligned}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(k, c, d) = K[\mathcal{X}_1]/I_1$, где идеал I_1 порождён следующими элементами:

$$\left.\begin{aligned}
&p_1^k, p_2^2, p_3^2, p_4^2,\\
&p_i p_j \ \text{ для }\ 1 \leqslant i < j \leqslant 4;
\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

$$cp_1u_1 + d(p_2u_1 + p_1^{k-2}u_2), p_1^{k-1}u_2, \tag{1.4}$$

$$p_2u_2, p_3u_2, p_4u_2; \tag{1.5}$$

$$p_ju_3 \ \text{ для }\ 1 \leqslant j \leqslant 4, \tag{1.6}$$

$$u_1u_2, u_2^2, p_1^{k-1}v_4,\ u_2u_3, \tag{1.7}$$

$$u_1u_3 + cp_4v_1,\ u_3^2, \tag{1.8}$$

$$cp_1v_2 + dp_4v_1,\ p_4v_1 + p_2v_2, \tag{1.9}$$

$$p_4u_1^2 + p_1v_2,\ p_4u_1^2 + p_3v_3,\ p_4u_1^2 + p_2v_4, \tag{1.10}$$

$$p_1u_1^2,\ p_3u_1^2, \tag{1.11}$$

$$p_3v_2,\ p_4v_2,\ p_3v_4,\ p_4v_4, \tag{1.12}$$

$$p_1v_1,\ p_2v_1,\ p_3v_1,\ p_1v_3,\ p_2v_3,\ p_4v_3, \tag{1.13}$$

$$cu_1^3 + du_1v_1,\ p_1^2\widetilde{w} + u_2v_4, dp_2\widetilde{w} + u_1v_4, \tag{1.14}$$

$$u_1v_2 + p_1^{k-1}\widetilde{w} + cp_2\widetilde{w},\ p_4u_1^3, \tag{1.15}$$

$$p_3\widetilde{w},\ p_4\widetilde{w}, \tag{1.16}$$

$$u_2v_1,\ u_2v_2,\ u_2v_3, \tag{1.17}$$

$$u_3v_2,\ u_3v_3,\ u_3v_4, \tag{1.18}$$

$$v_2^2,\ v_3^2;\ v_iv_j \ \text{ при } i < j; \tag{1.19}$$

$$u_1^4, \tag{1.20}$$

$$u_1\widetilde{w} + (p_3 + cp_4)z, \tag{1.21}$$

$$v_4^2 + p_1^2 z, \tag{1.22}$$

$$u_1^2 v_j \text{ при } 1 \leqslant j \leqslant 4, \tag{1.23}$$

$$\text{при } \ c = 0 \ \ u_1 v_1; \tag{1.24}$$

$$u_2\widetilde{w}, \tag{1.25}$$

$$v_3\widetilde{w} + p_4 u_1 z,\ v_4\widetilde{w} + u_2 z,\ v_2\widetilde{w}, \tag{1.26}$$

$$(\widetilde{w})^2 + cp_4 u_1^2 z. \tag{1.27}$$

Кроме того, на алгебре $\mathcal{A}_1$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой алгебры $K[\mathcal{X}_1]$.

Далее, рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1', u_2', u_3, v_1, v_2, v_3, v_4, w, z\}. \tag{1.28}$$

На алгебре $K[\mathcal{X}_2]$ введем градуировку так, что

$$\left.\begin{aligned} &\deg p_1 = \deg p_2 = \deg p_3 = \deg p_4 = 0,\\ &\deg u_1' = \deg u_2' = \deg u_3 = 1,\\ &\deg v_1 = \deg v_2 = \deg v_3 = \deg v_4 = 2,\\ &\deg w = 3,\ \deg z = 4. \end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_2 = K[\mathcal{X}_2]/I_2$, где идеал I_2 порождён элементами вида (1.3), (1.6), (1.8), (1.12), (1.13), (1.18), (1.19), (1.22), а также следующими элементами(при этом в записи некоторых из них используется константа θ_n основного поля K ($n \in \mathbb{N}$), определённая формулой

$$\theta_n := \sum_{i=1}^{n} i\ ): \tag{1.30}$$

$$p_1 u_1' + (dp_2 + cp_1)u_2',\ p_2 u_1' + p_1^{k-1} u_2',$$

$$p_1^{k-1} v_4 + dp_4 v_1 + cp_3 v_3,\ p_4(u_1')^2 + p_1 v_2,\ p_4(u_1')^2 + p_3 v_3,\ p_4(u_1')^2 + p_2 v_4,$$

$$p_1(u_1')^2,\ p_3(u_1')^2,$$

$$u_1' u_2' + \theta_{k-1}(cdp_4 v_1 + c^2 p_3 v_3),$$

$$(u_1')^3 + du_2' v_1,\ u_1' v_2 + p_1^{k-1} w,\ u_2' v_2 + p_2 w,$$

$$u_1' v_4 + u_2'(dv_2 + cv_4),\ u_2' v_4 + p_1 w,$$

$$u_1' v_1,\ u_2' v_3,$$

$p_3w,\ p_4w,$

$(u_1')^2v_j$ при $2 \leqslant j \leqslant 4,$

$u_1'w,\ u_2'w,$

$v_2w + p_2u_2'z,\ v_4w + p_1u_2'z,\ v_3w,$

$w^2 + (d\theta_{k+1}p_4v_1 + c\theta_{k-1}p_3v_3)z.$

Кроме того, на алгебре $\mathcal{A}_2$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой алгебры $K[\mathcal{X}_2]$.

Теперь рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_3 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_0, u_1, u_2, v_2, v_3, v_4, w_0, w_1, z\}. \tag{1.31}$$

На алгебре $K[\mathcal{X}_3]$ введём градуировку так, что

$$\begin{gathered}\deg p_1 = \deg p_2 = \deg p_3 = \deg p_4 = 0,\\ \deg u_0 = \deg u_1 = \deg u_2 = 1,\\ \deg v_2 = \deg v_3 = \deg v_4 = 2,\\ \deg w_0 = \deg w_1 = 3,\ \deg z = 4.\end{gathered}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_3 = K[\mathcal{X}_3]/I_3$, где идеал I_3 порождён элементами вида (1.3), (1.5), (1.7), (1.12), (1.19), (1.22), а также следующими элементами:

$p_1u_0 + p_3u_1,\ p_3u_0 + p_1^{k-2}u_2,$

$p_2u_1 + (p_3 + cp_4)u_0,\ p_1u_1;$

$u_0u_2,\ p_4u_1^2,\ p_4u_0u_1,$

$p_1v_2,\ p_2v_4,\ p_jv_3$ для $1 \leqslant j \leqslant 4;$

$u_0v_3 + p_3w_0,\ u_0v_3 + p_1^{k-1}w_1,\ p_2w_1 + p_4w_0,$

$p_3w_1,\ p_4w_1,$

$u_1u_0^2 + cu_0v_2 + cp_2w_0,\ u_0u_1^2,\ u_1^3,$

$u_0v_4 + u_1v_3,\ u_0v_4 + p_1w_0,\ u_2v_4 + p_1^2w_1,$

$u_1v_2 + (p_1^{k-1} + cp_2)w_1,$

$u_1v_4,\ u_2v_2,\ u_2v_3,$

$u_1w_1 + (p_3 + cp_4)z,\ u_1w_0 + cu_0w_1 + cp_2z + p_1^{k-1}z;$

$v_2w_0 + u_0^2w_1,\ v_3w_0 + p_1^{k-2}u_2z,$

$$v_4w_0+p_3u_1z,\ v_3w_1+p_4u_1z,\ v_4w_1+u_2z,\ v_2w_1;$$
$$w_0^2+(1+c^3p_4)u_0^2z,$$
$$w_0w_1+v_2z,\ w_1^2.$$

На алгебре $\mathcal{A}_3$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K[\mathcal{X}_3]$.

Теперь рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_4=\{p_1,p_2,p_3,p_4,u_0,u_1',u_2',v_2,v_3,v_4,w_0,w_1,z\}. \tag{1.32}$$

На алгебре $K[\mathcal{X}_4]$ введём градуировку так, что

$$\left.\begin{aligned}&\deg p_1=\deg p_2=\deg p_3=\deg p_4=0,\\ &\deg u_0=\deg u_1'=\deg u_2'=1,\\ &\deg v_2=\deg v_3=\deg v_4=2,\\ &\deg w_0=\deg w_1=3,\ \deg z=4.\end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_4=K[\mathcal{X}_4]/I_4$, где идеал I_4 порождён элементами вида (1.3), (1.12) (1.19), (1.22), а также следующими элементами, (вновь в записи некоторых из них используется константа θ_n (см. (1.30)):

$$p_3u_0+p_2u_1',\ p_3u_0+p_1^{k-1}u_2',\ p_1u_1'+cp_1u_2',$$
$$p_3u_1'+p_1u_0,\ p_2u_2'+p_4u_0,\ p_3u_2',\ p_4u_2';$$
$$u_1'u_2'+c^2\theta_{k-1}p_3v_3,$$
$$p_1v_2+p_3v_3,\ p_1v_2+p_2v_4,\ p_1v_2+p_4(u_1')^2,$$
$$u_0u_1',\ p_2v_2+p_4u_0^2,\ (u_2')^2+c\theta_{k-1}p_3v_3,$$
$$p_1^{k-1}v_4+cp_3v_3,$$
$$p_1v_3,\ p_2v_3,\ p_4v_3,$$
$$u_1'v_4+u_2'v_3,\ u_1'v_4+p_1w_1,\ u_0v_4+p_1w_0,$$
$$u_0v_3+p_1^{k-2}u_2'v_3,\ u_0v_3+p_3w_0,\ u_0v_3+u_1'v_2,\ (u_1')^3,$$
$$u_0v_2+u_0^2u_2'+p_2w_0,\ p_2w_1+p_4w_0,\ p_2w_1+u_2'v_2,$$
$$u_2'v_4,\ u_1'v_3,\ p_3w_1,\ p_4w_1,$$
$$u_2'w_0+u_0w_1,\ u_1'w_0,\ u_1'w_1,\ u_2'w_1,$$
$$v_2w_0+u_0^2w_1+p_2u_0z,\ v_3w_0+p_1^{k-1}u_2'z,$$
$$v_2w_1+p_4u_0z,\ v_4w_0+(cp_1^{k-1}u_2'+p_1u_0)z,$$

$$v_4w_1 + p_1u_2'z,\ v_3w_1;$$
$$w_0^2 + (1 + c^3p_4)u_0^2z,\ w_0w_1 + u_0u_2'z,\ w_1^2 + c\theta_{k-1}p_3v_3z.$$

Кроме того, на алгебре $\mathcal{A}_4$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой алгебры $K[\mathcal{X}_4]$.

Далее, рассмотрим множество $\mathcal{X}_5$, совпадающее с множеством $\mathcal{X}_2$ (см. (1.28)), а на алгебре $K[\mathcal{X}_5]$ вводим ту же градуировку, что и в (1.29). Затем определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_5 = K[\mathcal{X}_5]/I_5$, где идеал I_5 порождён элементами вида

$$p_ip_j \ \text{ для всех } i, j \in \{1, 2, 3, 4\};$$
$$p_1u_1' + (dp_2 + cp_1)u_2',\ p_2u_1' + p_1u_2',$$
$$p_ju_3 \ \text{ для } \ 1 \leqslant j \leqslant 4,\ p_3u_2',\ p_4u_2',$$
$$p_1v_4 + dp_4v_1 + cp_3v_3,\ u_3^2,$$
$$p_3v_1 + p_1v_2,\ p_3v_1 + p_3v_3,\ p_3v_1 + p_2v_4,\ p_3v_1 + u_1'u_3,\ p_3v_1 + p_4(u_1')^2,$$
$$p_2v_2 + p_4v_1,\ p_2v_2 + u_2'u_3,\ p_3(u_1')^2,$$
$$u_1'u_2' + cdp_4v_1 + c^2p_3v_1,\ (u_2')^2 + cp_3v_1,$$
$$u_1'v_4 + u_2'(dv_2 + cv_4),\ u_2'v_4 + u_1'v_2, u_2'v_4 + p_1w,$$
$$u_1'v_1 + u_1'v_3,\ p_2w + u_2'v_2,$$
$$(u_1')^3 + du_2'v_1,\ p_3w,\ p_4w,$$
$$v_2^2,\ v_3^2,\ v_4^2;\ v_iv_j \ \text{ при } i < j;$$
$$u_1'w,\ u_2'w,$$
$$v_2w + p_2u_2'z,\ v_4w + p_1u_2'z,\ v_3w,$$
$$w^2 + cp_3v_3z.$$

Кроме того, на алгебре $\mathcal{A}_5$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K[\mathcal{X}_5]$.

Далее, рассмотрим множество $\mathcal{X}_6$, совпадающее с множеством $\mathcal{X}_4$ (см. (1.32)), а на алгебре $K[\mathcal{X}_6]$ вводим ту же градуировку, что и в (1.33). Затем определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_6 = K[\mathcal{X}_6]/I_6$, где идеал I_6 порождён элементами вида

$$p_ip_j \ \text{ для всех } i, j \in \{1, 2, 3, 4\};$$
$$p_1u_1' + cp_3u_0,\ p_2u_1' + p_3u_0,\ p_2u_1' + p_1u_2',$$
$$p_3u_1' + p_1u_0,\ p_2u_2' + p_4u_0,\ p_3u_2',\ p_4u_2';$$

$$
\begin{aligned}
&p_1v_2+p_3v_3,\ p_1v_2+p_2v_4,\ p_1v_2+c^{-1}p_1v_4,\ p_1v_2+c^{-1}(u_2')^2,\\
&p_1v_2+c^{-1}u_1'u_2',\ p_1v_2+p_4(u_1')^2,\\
&p_2v_2+p_4u_0^2,\ p_3v_2,\ p_4v_2,\\
&p_1v_3,\ p_2v_3,\ p_4v_3,\ p_3v_4,\ p_4v_4,\ u_0u_1';\\
&u_0v_3+u_1'v_2,\ u_0v_3+c^{-1}u_1'v_4,\ u_0v_3+u_2'v_4,\ u_0v_3+p_3w_0,\ u_0v_3+p_1w_1,\\
&u_0v_4+u_1'v_3,\ u_0v_4+p_1w_0,\ (u_1')^3,\ u_2'v_3,\\
&p_2w_0+u_0v_2+u_0^2u_2',\\
&p_2w_1+p_4w_0,\ p_2w_1+u_2'v_2,\ p_3w_1,\ p_4w_1;\\
&v_iv_j\ \text{ для всех } i,j\in\{2,3,4\},\\
&u_2'w_0+u_0w_1,\ u_1'w_0,\ u_1'w_1,\ u_2'w_1,\\
&v_2w_0+u_0^2w_1+p_2u_0z,\ v_3w_0+v_4w_1,\ v_3w_0+p_1u_2'z,\\
&v_2w_1+p_4u_0z,\ v_4w_0+p_1u_0z,\ v_3w_1,\\
&w_0^2+(1+c^3p_4)u_0^2z,\ w_0w_1+u_0u_2'z,\ w_1^2+cp_3v_3z.
\end{aligned}
$$

Кроме того, на алгебре $\mathcal{A}_6$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K[\mathcal{X}_6]$.

Основной результат работы – следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть* $\operatorname{char} K = 2$, *и пусть* $R = R_{k,c,d}$, *где* $k \geqslant 2$, c, $d \in K$, $(c,d) \neq (0,0)$.

(1) *Если k нечётно и $d \neq 0$, то алгебра когомологий Хохшильда* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре* $\mathcal{A}_1$.

(2) *Если k чётно, $k > 2$ и $d \neq 0$, то* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_2$ *как градуированные K-алгебры.*

(3) *Если k нечётно и $d = 0$, то* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_3$ *как градуированные K-алгебры.*

(4) *Если k чётно, $k > 2$ и $d = 0$ то* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_4$ *как градуированные K-алгебры.*

(5) *Если $k = 2$ и $d \neq 0$ то* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_5$ *как градуированные K-алгебры.*

(6) *Если $k = 2$ и $d = 0$ то* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_6$ *как градуированные K-алгебры.*

§2. Предварительные сведения

Пусть $R = R_{k,c,d}$, где $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $(c,d) \neq (0,0)$, и пусть $\Lambda := R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ – обёртывающая алгебра алгебры R. Пусть $\mu\colon Q_\bullet \to R$ – минимальная Λ-проективная резольвента бимодуля R, построенная в [2]. Напомним, что в комплексе $Q_\bullet$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} &Q_0 = \Lambda, \quad Q_1 = Q_2 = Q_3 = \Lambda^2, \\ &Q_n = \Lambda^2 \oplus Q_{n-4} \ \text{ при } \ n \geqslant 4; \end{aligned} \tag{2.1}$$

описание дифференциалов d_n^Q в $Q_\bullet$ более громоздкое, и за ним мы отсылаем читателя к статье [2]. При этом разложения модулей $Q_n = \Lambda^{t_n}$, относительно которых дифференциалы d_n^Q описываются с помощью матриц, приведённых в [2], будут зафиксированы на протяжении всей статьи; назовём эти разложения *стандартными*. Мы используем и другие обозначения из [2], в частности, полагаем

$$\widetilde{y} := y + dx(yx)^{k-1},$$

а также

$$\delta^n := \mathrm{Hom}_\Lambda(d_n^Q, R).$$

Рассмотрим подкомплекс $X_\bullet$ комплекса $Q_\bullet$, такой, что

$$\left.\begin{array}{l} \text{при} \quad n \geqslant 4 \qquad X_n = \Lambda^2 \\ \text{– это первые два прямых слагаемых в разложении } Q_n \text{ из (2.1),} \\ \text{а для } \ 0 \leqslant n \leqslant 3 \qquad X_n = Q_n. \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

Справедливо следующее утверждение (см. [2, предложение 3.2]).

Предложение 2.1. *Имеет место короткая точная последовательность комплексов*

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{i} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} Q_\bullet[-4] \to 0, \tag{2.3}$$

расщепляющаяся в каждой степени.

Отметим также, что из [1, III.14] вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.2. *Пространство* $\mathrm{HH}^0(R)$ *допускает в качестве* K*-базиса множество*

$$\{1, xy{+}yx, (xy)^2{+}(yx)^2, \ldots, (xy)^{k-1}{+}(yx)^{k-1}, x(yx)^{k-1}, y(xy)^{k-1}, (xy)^k\}.$$

При исследовании групп когомологий Хохшильда более высоких степеней мы будем накладывать дополнительные ограничения на параметры k, c, d, а именно, мы будем различать случаи, когда k чётно или нечётно, а также когда $d \neq 0$ или $d = 0$.

Хотя размерности групп $\mathrm{HH}^i(R)$, $i > 0$, были вычислены в [2], нам необходимо получить явное описание базисов (над K) этих групп. Для этого мы будем сначала указывать базисы пространств $\operatorname{Ker} \delta^i$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Это описание базисов получается аналогично доказательству [13, предложение 4.4], а именно, мы записываем элементы из R как линейные комбинации элементов базиса (1.1), и, подставляя их в формулы для δ^i, получаем системы линейных уравнений для нахождения коэффициентов таких линейных комбинаций. Детали этих вычислений мы оставляем читателю.

Предложение 2.3. *Предположим, что k нечётно, а $d \neq 0$. Тогда*

(а) *пространство $\operatorname{Ker} \delta^1$ имеет в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\big((xy)^i + (yx)^i, 0\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.4}$$

$$\big(y(xy)^i, 0\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.5}$$

$$\big(0, (xy)^i + (yx)^i\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.6}$$

$$\big(0, x(yx)^i\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.7}$$

$$\big(d(xy)^{k-1} + cy, 1 + cx\big),\ \big(x(yx)^{k-1}, 0\big),\ \big((xy)^k, 0\big), \tag{2.8}$$

$$\big(0, y(xy)^{k-1}\big),\ \big(0, (xy)^k\big); \tag{2.9}$$

(б) *пространство $\operatorname{Ker} \delta^2$ имеет в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\big((xy)^i + (yx)^i, 0\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.10}$$

$$\big(d(xy)^{i+1}, y(xy)^i + c(xy)^{i+1}\big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-2, \tag{2.11}$$

$$\big(y(xy)^i, 0\big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.12}$$

$$\big(0, (xy)^i + (yx)^i\big) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.13}$$

$$\big(0, x(yx)^i\big) \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.14}$$

$$\big(1, 0\big),\ \big(x(yx)^{k-1}, 0\big),\ \big((xy)^k, 0\big), \tag{2.15}$$

$$\big(0, 1\big),\ \big(0, y(xy)^{k-1}\big),\ \big(0, (xy)^k\big); \tag{2.16}$$

(в) *пространство* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\big((xy)^i + (yx)^i, 0\big) \ \text{для} \ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.17}$$

$$\big(d(yx)^i, (xy)^i + (yx)^i\big) \ \text{для} \ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.18}$$

$$\big(y(xy)^i, 0\big) \ \text{для} \ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.19}$$

$$\big(0, y(xy)^i\big) \ \text{для} \ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.20}$$

$$\big(y, x(yx)^{k-1}\big), \ \big(dy, y\big), \ \big(x(yx)^{k-1}, 0\big), \tag{2.21}$$

$$\big((xy)^k, 0\big), \ \big(0, (xy)^k\big). \tag{2.22}$$

Следствие 2.4. *Предположим, что* k *нечётно, а* $d \neq 0$. *Тогда*

(а) *пространство* $\mathrm{HH}^1(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\big(y(xy)^i, 0\big) \ \text{для} \ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.23}$$

$$\big(d(xy)^{k-1} + cy, 1 + cx\big), \ \big(x(yx)^{k-1}, 0\big), \ \big((xy)^k, 0\big), \tag{2.24}$$

$$\big(0, y(xy)^{k-1}\big), \ \big(0, (xy)^k\big); \tag{2.25}$$

(б) *пространство* $\mathrm{HH}^2(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\big(d(xy)^{i+1}, y(xy)^i + c(xy)^{i+1}\big) \ \text{для} \ 0 \leqslant i \leqslant k-2, \tag{2.26}$$

$$\big(1, 0\big), \ \big(y, 0\big), \tag{2.27}$$

$$\big(0, 1\big), \ \big(0, x\big), \ \big(0, (xy)^k\big); \tag{2.28}$$

(в) *пространство* $\mathrm{HH}^3(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\big(0, y(xy)^i\big) \ \text{для} \ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.29}$$

$$\big(dyx, xy + yx\big), \ \big(y, x(yx)^{k-1}\big), \ \big(0, \widetilde{y}\big), \tag{2.30}$$

$$\big(x(yx)^{k-1}, 0\big), \ \big(0, (xy)^k\big). \tag{2.31}$$

Доказательство. Утверждение непосредственно вытекает из предложения 2.3 и описания базисов для $\operatorname{Im}\delta^i$, $0 \leqslant i \leqslant 2$, в [2]. □

Предложение 2.5. *Предположим, что* k *чётно, а* $d \neq 0$. *Тогда*

(а) *для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *надо в множестве, указанном в предложении* 2.3, *пункт* (а), *элемент* $\big(d(xy)^{k-1} + cy, 1 +$

$cx\big)$ *из* (2.8) *заменить на элемент* $\big(d(xy)^{k-1}, 1+cx\big)$, *а также присоединить к этому множеству элемент* $\big(y, 0\big)$;

(б) *пространство* $\operatorname{Ker}\delta^2$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, указанное в предложении* 2.3, *пункт* (б);

(в) *для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *надо в множестве, указанном в предложении* 2.3, *пункт* (в), *элемент* $\big(dy, y\big)$ *из* (2.21) *заменить на элемент* $\big(0, y\big)$.

Следствие 2.6. *Предположим, что* k *чётно, а* $d \neq 0$. *Тогда*

(а) *для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^1(R)$ *надо к множеству, указанному в следствии* 2.4, *пункт* (а), *присоединить элемент* $\big(y, 0\big)$;

(б) *для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^2(R)$ *надо к множеству, указанному в следствии* 2.4, *пункт* (б), *присоединить элемент* $\big((xy)^k, 0\big)$;

(в) *для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^3(R)$ *надо в множестве, указанном в следствии* 2.4, *пункт* (в), *элемент* $\big(0, \widetilde{y}\big)$ *из* (2.30) *заменить на элемент* $\big(0, y\big)$.

Доказательство. Вновь утверждение следствия вытекает из описания базисов для $\operatorname{Im}\delta^i$, $0 \leqslant i \leqslant 2$, в [2], а также из предложения 2.5. $\square$

Предложение 2.7. *Предположим, что* k *нечётно, а* $d = 0$. *Тогда*

(а) *для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *надо к множеству, указанному в предложении* 2.3, *пункт* (а), *присоединить элемент* $\big(1, y(xy)^{k-2} + c(xy)^{k-1}\big)$;

(б) *для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^2$ *надо в множестве, указанном в предложении* 2.3, *пункт* (б), *элемент* $\big(d(yx)^{k-1}, c(xy)^{k-1} + y(xy)^{k-2}\big)$ *из* (2.11) *заменить на элемент* $\big(0, y(xy)^{k-2}\big)$, *а элемент* $\big(0, (xy)^{k-1} + (yx)^{k-1}\big)$ *из* (2.13) *заменить на пару элементов* $\big(0, (xy)^{k-1}\big)$, $\big(0, (yx)^{k-1}\big)$;

(в) *для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *надо в множестве, указанном в предложении* 2.3, *пункт* (в), *элемент* $\big(y, x(yx)^{k-1}\big)$ *из* (2.21) *заменить на элемент* $\big(0, x(yx)^{k-1}\big)$, *а также присоединить элементы*

$$(1, 0),\ (y, 0),\ (0, 1).$$

Следствие 2.8. *Предположим, что* k *нечётно, а* $d = 0$. *Тогда* (а) *для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^1(R)$ *надо к множеству, указанному в следствии* 2.4*, пункт* (а)*, присоединить элемент* $\big(1, y(xy)^{k-2} + c(xy)^{k-1}\big)$;

(б) *для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^2(R)$ *надо в множестве, указанном в следствии* 2.4*, пункт* (б)*, элемент* $\big(d(yx)^{k-1}, c(xy)^{k-1} + y(xy)^{k-2}\big)$ *из* (2.26) *заменить на пару элементов* $\big(0, y(xy)^{k-2}\big)$, $\big(0, (xy)^{k-1}\big)$*, а также элемент* $\big(0, (xy)^k\big)$ *из* (2.28) *заменить на пару элементов* $\big(x(yx)^{k-1}, 0\big), \big((xy)^k, 0\big)$;

(в) *для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^3(R)$ *надо в множестве, указанном в следствии* 2.4*, пункт* (в)*, элемент* $\big(y, x(yx)^{k-1}\big)$ *из* (2.30) *заменить на пару элементов* $(y, 0)$*,* $\big(0, x(yx)^{k-1}\big)$*, а также присоединить элементы*

$$(1, 0),\ (x(yx)^{k-1}, 0),\ (0, 1).$$

Доказательство. Вновь утверждение вытекает из предложения 2.7 (а также из описания базисов для $\operatorname{Im}\delta^i$, $0 \leqslant i \leqslant 2$, в [2]). □

Предложение 2.9. *Предположим, что* k *чётно, а* $d = 0$*. Тогда*

(а) *для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *надо к множеству, указанному в предложении* 2.5*, пункт* (а)*, присоединить элемент* $\big(1, y(xy)^{k-2} + c(xy)^{k-1}\big)$;

(б) *пространство* $\operatorname{Ker}\delta^2$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, указанное в предложении* 2.7*, пункт* (б);

(в) *пространство* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, указанное в предложении* 2.7*, пункт* (в).

Следствие 2.10. *Предположим, что* k *чётно, а* $d = 0$*. Тогда*

(а) *для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^1(R)$ *надо в множестве, указанном в следствии* 2.8*, пункт* (а)*, элемент* $\big(cy, 1 + cx\big)$ *заменить на пару элементов*

$$\big(y, 0\big),\ \big(0, 1 + cx\big);$$

(б) *для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^2(R)$ *надо к множеству, указанному в следствии* 2.8*, пункт* (б)*, добавить элемент* $\big(0, (xy)^k\big)$;

(в) *пространство* $\mathrm{HH}^3(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, указанное в следствии* 2.8*, пункт* (в).

Доказательство. Утверждение вытекает из предложения 2.9 (а также из описания базисов для $\operatorname{Im}\delta^i$, $0 \leqslant i \leqslant 2$, в [2]). □

Следующее утверждение непосредственно вытекает из предыдущих результатов, но отметим, что оно было получено также в [2], и мы его приводим для удобства читателя.

Следствие 2.11. (I) *Пусть $d \neq 0$. Тогда:*

(Ia) $$\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} k+5, & \text{если } k \text{ чётно}, \\ k+4, & \text{если } k \text{ нечётно}; \end{cases}$$

(Ib) $$\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = k+4.$$

(II) *Пусть $d = 0$. Тогда:*

(IIa) $$\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+6, & \text{если } k \text{ чётно}, \\ k+5, & \text{если } k \text{ нечётно}; \end{cases}$$

(IIb) $$\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} k+7, & \text{если } k \text{ чётно}, \\ k+6, & \text{если } k \text{ нечётно}; \end{cases}$$

(IIc) $$\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = k+8.$$

Замечание 2.12. Короткая точная последовательность (2.3) индуцирует длинную когомологическую последовательность, в которой связывающие гомоморфизмы, начиная с некоторого места, равны нулю (см. доказательство предложения 4.10 в [2]), и тогда при $n \geqslant 4$

$$\mathrm{HH}^n(R) \simeq \mathrm{HH}^{n-4}(R) \oplus \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)$$

для $\mathcal{X}^\bullet = \mathrm{Hom}_\Lambda(X_\bullet, R)$ (где $X_\bullet$ описано в (2.2)).

Замечание 2.13. Из вида дифференциалов d_n^Q (см. [2]) легко усматривается, что при $n \geqslant 4$ для коцикла

$$f = (r_1, \dots, r_{t_n}) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R) (\simeq R^{t_n})$$

(т.е. $\delta^n(f) = 0$) его “отрезки”

$$(r_1, r_2) \in \mathcal{X}^n \simeq R^2 \quad \text{и} \quad (r_3, \dots, r_{t_n}) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n-4}, R)$$

также являются коциклами в соответствующих комплексах. С учётом следствий 2.4–2.10 (и предложения 2.2) это наблюдение позволяет выписывать представители для когомологических классов, образующих базисы в группах $\mathrm{HH}^n(R)$ при $n \geqslant 4$.

Замечание 2.14. В дальнейшем для n-коцикла $x \in \operatorname{Ker} \delta^n$ его когомологический класс $\operatorname{cl} x \in \mathrm{HH}^n(R)$ будем обозначать также через x.

§3. Образующие и соотношения

Мы сейчас кратко опишем интерпретацию произведения Йонеды в алгебре $\mathrm{HH}^*(R) = \bigoplus_{m\geqslant 0}\mathrm{Ext}^m_\Lambda(R,R)$, использованную ранее в [12]. Пусть $\mu\colon Q_\bullet \to R$ – минимальная Λ-проективная резольвента (см.раздел 2). Рассмотрим комплекс

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) = \big(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R), \delta^n\big);$$

как и ранее, δ^n – дифференциалы, индуцированные дифференциалами резольвенты $Q_\bullet$. Тогда для коциклов $f\in\mathrm{Ker}\,\delta^n$ и $g\in\mathrm{Ker}\,\delta^t$ имеем $\mathrm{cl}\,g\cdot\mathrm{cl}\,f = \mathrm{cl}\,(\mu\mathrm{T}^0(g)\mathrm{T}^t(f))$, где $\mathrm{T}^i(h)$ обозначает i-ю трансляцию коцикла h. В дальнейшем мы будем описывать трансляции $\mathrm{T}^i(h)$ $(i\geqslant 0)$ с помощью матриц, соответствующих стандартным разложениям модулей Q_n.

Сейчас мы переходим к вычислению мультипликативной структуры алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ для алгебр из рассматриваемой серии. Эта структура существенно зависит от того, чётно или нет k, равно или не равно нулю d. При этом случай $k=2$ также приходится рассматривать отдельно.

Случай 1. Предположим сначала, что k нечётно и $d\neq 0$. Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

– степени 0 : $$\begin{cases} p_1 := xy+yx,\ p_2 := x(yx)^{k-1}, \\ p_3 := y(xy)^{k-1},\ p_4 := (xy)^k; \end{cases} \tag{3.1}$$

– степени 1 : $$\begin{cases} u_1 := (cy + d(xy)^{k-1}, 1+cx), \\ u_2 := (yxy, 0),\ u_3 := (x(yx)^{k-1}, 0); \end{cases} \tag{3.2}$$

– степени 2 : $$\begin{cases} v_1 := (1,0),\ v_2 := (y,0),\ v_3 := (0,x), \\ v_4 := (dyx, y+cxy); \end{cases} \tag{3.3}$$

– степени 3 : $$\widetilde{w} := (0,\widetilde{y}); \tag{3.4}$$

– степени 4 : $$z := (0,0,1). \tag{3.5}$$

Предложение 3.1. *Предположим, что k нечётно и $d\neq 0$. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_1 = \{p_1,p_2,p_3,p_4,u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3,v_4,\widetilde{w},z\} \tag{3.6}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются следующие соотношения*:

$$\left.\begin{aligned} &p_1^k = p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = 0,\\ &p_ip_j = 0 \ \ \textit{для} \ \ 1 \leqslant i < j \leqslant 4; \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

$$cp_1u_1 = d(p_2u_1 + p_1^{k-2}u_2),\ p_1^{k-1}u_2 = 0, \tag{3.8}$$
$$p_2u_2 = p_3u_2 = p_4u_2 = 0; \tag{3.9}$$
$$p_ju_3 = 0 \ \ \textit{для} \ \ 1 \leqslant j \leqslant 4; \tag{3.10}$$
$$u_1u_2 = u_2^2 = p_1^{k-1}v_4 = u_2u_3 = 0, \tag{3.11}$$
$$u_1u_3 = cp_4v_1,\ u_3^2 = 0; \tag{3.12}$$
$$cp_1v_2 = dp_4v_1,\ p_4v_1 = p_2v_2, \tag{3.13}$$
$$p_4u_1^2 = p_1v_2 = p_3v_3 = p_2v_4, \tag{3.14}$$
$$p_1u_1^2 = p_3u_1^2 = 0, \tag{3.15}$$
$$p_3v_2 = p_4v_2 = p_3v_4 = p_4v_4 = 0, \tag{3.16}$$
$$p_1v_1 = p_2v_1 = p_3v_1 = p_1v_3 = p_2v_3 = p_4v_3 = 0, \tag{3.17}$$
$$cu_1^3 = du_1v_1,\ p_1^2\widetilde{w} = u_2v_4, dp_2\widetilde{w} = u_1v_4, \tag{3.18}$$
$$u_1v_2 = p_1^{k-1}\widetilde{w} + cp_2\widetilde{w},\ p_4u_1^3 = 0, \tag{3.19}$$
$$p_3\widetilde{w} = p_4\widetilde{w} = 0, \tag{3.20}$$
$$u_2v_1 = u_2v_2 = u_2v_3 = 0, \tag{3.21}$$
$$u_3v_2 = u_3v_3 = u_3v_4 = 0, \tag{3.22}$$
$$v_2^2 = v_3^2 = 0;\ v_iv_j = 0 \ \ \textit{при} \ \ i < j; \tag{3.23}$$
$$u_1^4 = 0, \tag{3.24}$$
$$u_1\widetilde{w} = (p_3 + cp_4)z, \tag{3.25}$$
$$v_4^2 = p_1^2z, \tag{3.26}$$
$$u_1^2v_j = 0 \,\textit{при}\, 1 \leqslant j \leqslant 4, \tag{3.27}$$
$$\textit{при} \ \ c = 0 \ \ u_1v_1 = 0; \tag{3.28}$$
$$u_2\widetilde{w} = 0, \tag{3.29}$$
$$v_3\widetilde{w} = p_4u_1z,\ v_4\widetilde{w} = u_2z,\ v_2\widetilde{w} = 0; \tag{3.30}$$
$$(\widetilde{w})^2 = cp_4u_1^2z. \tag{3.31}$$

Доказательство. Соотношения (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), (3.14), (3.16), (3.17), (3.20) проверяются непосредственно. Для доказательства остальных соотношений необходимо вычислить трансляции подходящих порядков для элементов из $\mathcal{Y}_1$, имеющих положительную степень.

Из предложения 2.1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Для любого* $i \geqslant 0$ *проекция на прямое слагаемое* $\pi_{i+4} : Q_{i+4} = X_{i+4} \oplus Q_i \to Q_i$ *является* i*-ой трансляцией* $\mathrm{T}^i(z)$ *коцикла* z.

Необходимые трансляции остальных элементов из $\mathcal{Y}_1$, имеющих степень больше нуля, представлены в следующей лемме.

Лемма 3.3. *В качестве трансляций элементов из* $\mathcal{Y}_1 \setminus \{z\}$*, имеющих положительную степень, можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами*:

$$\mathrm{T}^0(u_1) = \big(cy \otimes 1 + d(xy)^{k-1} \otimes 1, 1 \otimes 1 + cx \otimes 1\big),$$
$$\mathrm{T}^1(u_1) = \begin{pmatrix} * & * \\ d\sum\limits_{i=0}^{k-2} y(xy)^i \otimes y(xy)^{k-2-i} & * \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^1(u_1))_{11} &= cd\sum_{i=0}^{k-1} x(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i} + d\sum_{i=0}^{k-1} (yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i} \\
&\quad + d\sum_{i=0}^{k-3} x(yx)^i \otimes y(xy)^{k-2-i} + cy \otimes 1, \\
(\mathrm{T}^1(u_1))_{12} &= c\sum_{i=0}^{k-1} (yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i} + c\sum_{i=1}^{k-1} (xy)^i \otimes (xy)^{k-1-i} \\
&\quad + c^2\sum_{i=0}^{k-1} x(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-2} (yx)^i \otimes y(xy)^{k-2-i} \\
&\quad + dx(yx)^{k-1} \otimes (xy)^{k-2}, \\
(\mathrm{T}^1(u_1))_{22} &= 1 \otimes 1 + cx \otimes 1 + d(yx)^{k-2} \otimes y(xy)^{k-1} \\
&\quad + d(xy)^{k-1} \otimes y(xy)^{k-2} + dy(xy)^{k-1} \otimes (xy)^{k-2};
\end{aligned}$$

$$\mathrm{T}^2(u_1) = \begin{pmatrix} 1\otimes 1 & (yx)^{3k-5}\otimes y \\ 0 & x\otimes 1 + 1\otimes x + y\otimes y(xy)^{k-2} \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{T}^3(u_1) = \begin{pmatrix} 1\otimes 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1\otimes 1 & * \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^3(u_1))_{23} = \sum_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes x(yx)^{k-2-i} + (yx)^{k-1}\otimes y(xy)^{k-2} + y(xy)^{k-2}\otimes (xy)^{k-1};$$

$$\mathrm{T}^0(u_2) = \big(yxy\otimes 1, 0\big),$$
$$\mathrm{T}^1(u_2) = \begin{pmatrix} yxy\otimes 1 + d\sum\limits_{i=2}^{k-1}(i-1)x(yx)^i\otimes (xy)^{k-i} & * \\ d\sum\limits_{i=2}^{k-1}(i-1)(xy)^i\otimes y(xy)^{k-i} & * \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(u_2))_{12} = \sum_{i=1}^{k-2} i(yx)^{i+1}\otimes (xy)^{k-1-i} + c\sum_{i=1}^{k-2} ix(yx)^{i+1}\otimes (xy)^{k-1-i},$$
$$(\mathrm{T}^1(u_2))_{22} = \sum_{i=1}^{k-2} iy(xy)^{i}\otimes y(xy)^{k-1-i} + c\sum_{i=1}^{k-2} i(xy)^{i+1}\otimes y(xy)^{k-1-i},$$

$$\mathrm{T}^2(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1\otimes (xy)^{k-1} + 1\otimes (yx)^{k-1} \\ 0 & y\otimes 1 + 1\otimes y \end{pmatrix};$$
$$\mathrm{T}^0(u_3) = \big(x(yx)^{k-1}\otimes 1, 0\big),$$
$$\mathrm{T}^1(u_3) = \begin{pmatrix} x(yx)^{k-1}\otimes 1 & 0 \\ 0 & x(yx)^{k-1}\otimes y(xy)^{k-2} \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(v_1) = \big(1\otimes 1, 0\big), \quad \mathrm{T}^1(v_1) = \begin{pmatrix} 1\otimes 1 & \sum\limits_{i=0}^{k-2} x(yx)^i\otimes x(yx)^{k-2-i} \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(v_1))_{22} = \sum_{i=0}^{k-1} (xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i} + c^2 y(xy)^{k-2} \otimes (xy)^k + c^3 (xy)^{k-1} \otimes (xy)^k;$$

$$\mathrm{T}^2(v_1) = \begin{pmatrix} 1\otimes 1 & * & 0 \\ 0 & * & (xy)^{k-1}\otimes (yx)^{k-1} \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^2(v_1))_{12} = c^2 (yx)^{k-1} \otimes x(yx)^{k-1} + c^2 x(yx)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1},$$

$$(\mathrm{T}^2(v_1))_{22} = x\otimes 1 + 1\otimes x + cx\otimes x + cx^2\otimes 1 + c^2\cdot 1\otimes (xy)^k + c^2 x\otimes y(xy)^{k-1} + c^3 yx\otimes x(yx)^{k-1};$$

$$\mathrm{T}^0(v_2) = \big(y\otimes 1, 0\big), \quad \mathrm{T}^1(v_2) = \begin{pmatrix} y\otimes 1 & * \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1} y(xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i} \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(v_2))_{12} = \sum_{i=1}^{k-1} (yx)^i \otimes x(yx)^{k-1-i} + c^2 (yx)^{k-1} \otimes (xy)^k + c^3 x(yx)^{k-1} \otimes (xy)^k;$$

$$\mathrm{T}^2(v_2) = \begin{pmatrix} y\otimes 1 & \rho + c^2 x^2 \otimes x(yx)^{k-1} & 0 \\ d^2 (xy)^k \otimes y(xy)^{k-2} & * & * \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^2(v_2))_{22} = 1\otimes xy + x\otimes y + cx\otimes xy + cx^2\otimes y + d(xy)^k \otimes y(xy)^{k-2} + dx(yx)^{k-1}\otimes x,$$

$$(\mathrm{T}^2(v_2))_{23} = y(xy)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1} + y(xy)^{k-1} \otimes (yx)^{k-1};$$

$$\mathrm{T}^0(v_3) = \big(0, x\otimes 1\big), \quad \mathrm{T}^1(v_3) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ dx\otimes y + cdy(xy)^{k-1}\otimes y & * \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(v_3))_{12} = dx(yx)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1} + d(xy)^k \otimes x(yx)^{k-2},$$

$$(\mathrm{T}^1(v_3))_{22} = yx\otimes 1 + x\otimes y + cx^2\otimes y + dx\otimes x(yx)^{k-1} + d(xy)^k \otimes y(xy)^{k-2} + cd(xy)^k \otimes (yx)^{k-1};$$

$\mathrm{T}^2(v_3)$ – *это* 2×3-*матрица, в которой*

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^2(v_3))_{11} &= dx^2 \otimes 1 + d(yx)^{k-1} \otimes y + cdx(yx)^{k-1} \otimes y \\
&\quad + d^2 x(yx)^{k-2} \otimes (xy)^k, \\
(\mathrm{T}^2(v_3))_{12} &= dx(yx)^{k-2} \otimes (xy)^k + dx(yx)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1}, \\
(\mathrm{T}^2(v_3))_{13} &= x(yx)^{k-2} \otimes (xy)^k + x(yx)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1} \\
&\quad + (yx)^{k-1} \otimes x(yx)^{k-1}, \\
(\mathrm{T}^2(v_3))_{21} &= c^2 d^2 y(xy)^{k-1} \otimes (xy)^k + d^2 \sum_{i=0}^{k-1} (xy)^i \otimes (xy)^{k-i}, \\
(\mathrm{T}^2(v_3))_{22} &= d \sum_{i=1}^{k} (xy)^i \otimes (xy)^{k-i} + d \sum_{i=1}^{k-1} y(xy)^{i-1} \otimes x(yx)^{k-i} \\
&\quad + dx \otimes y(xy)^{k-1} + c^2 d(xy)^k \otimes y(xy)^{k-1}, \\
(\mathrm{T}^2(v_3))_{23} &= \sum_{i=1}^{k} y(xy)^{i-1} \otimes x(yx)^{k-i} + \sum_{i=1}^{k-1} (xy)^i \otimes (xy)^{k-i} \\
&\quad + x \otimes y(xy)^{k-1} + (yx)^{k-1} \otimes xy \\
&\quad + cyx \otimes x(yx)^{k-1} + c^2 (xy)^k \otimes y(xy)^{k-1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}^0(v_4) &= \big(dyx \otimes 1, y \otimes 1 + cxy \otimes 1\big), \\
\mathrm{T}^1(v_4) &= \begin{pmatrix} dx \otimes y & * \\ dy \otimes y + d^2 \cdot 1 \otimes (xy)^k & * \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^1(v_4))_{12} &= yx \otimes 1 + xy \otimes 1 + dx \otimes x(yx)^{k-1} + cd(xy)^k \otimes (xy)^{k-1}, \\
(\mathrm{T}^1(v_4))_{22} &= y \otimes y + d(xy)^k \otimes 1 + dy \otimes x(yx)^{k-1} + d \cdot 1 \otimes (xy)^k \\
&\quad + c^2 d(xy)^k \otimes y(xy)^{k-1};
\end{aligned}$$

$$\mathrm{T}^2(v_4) = \begin{pmatrix} dxy \otimes 1 & * & 0 \\ d^3 (xy)^{k-1} \otimes (xy)^k & * & * \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^2(v_4))_{12} &= yx \otimes 1 + xy \otimes 1 + cd(xy)^k \otimes (xy)^{k-1},\\
(\mathrm{T}^2(v_4))_{22} &= dyx \otimes x + d^2(xy)^{k-1} \otimes (xy)^k + d^2(xy)^k \otimes (yx)^{k-1},\\
(\mathrm{T}^2(v_4))_{23} &= xyx \otimes 1 + yx \otimes x + xy \otimes x + y \otimes y(xy)^{k-1}\\
&\quad + cxyx \otimes x + dx(yx)^{k-1} \otimes y(xy)^{k-1},
\end{aligned}$$

$$\mathrm{T}^0(\widetilde{w}) = \big(0, \widetilde{y} \otimes 1\big),$$

$\mathrm{T}^1(\widetilde{w})$ – *это* 2×3*-матрица, в которой*

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^1(\widetilde{w}))_{11} &= d\widetilde{y} \otimes 1 + d^2 \sum_{i=1}^{k-2} ix(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i},\\
(\mathrm{T}^1(\widetilde{w}))_{12} &= \widetilde{y} \otimes 1 + d \sum_{i=1}^{k-2} ix(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i}\\
&\quad + d \sum_{i=1}^{k-2} i(yx)^{i+1} \otimes x(yx)^{k-2-i} + cdy(xy)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1},\\
(\mathrm{T}^1(\widetilde{w}))_{13} &= \sum_{i=1}^{k-2} ix(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i} + \sum_{i=1}^{k-2} i(yx)^i \otimes x(yx)^{k-1-i} +\\
&\quad + cy(xy)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1},\\
(\mathrm{T}^1(\widetilde{w}))_{21} &= d^2 \sum_{i=1}^{k-2} i(xy)^i \otimes y(xy)^{k-1-i},\\
(\mathrm{T}^1(\widetilde{w}))_{22} &= d \sum_{i=1}^{k-2} i(xy)^i \otimes y(xy)^{k-1-i} + d \sum_{i=1}^{k-2} iy(xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i},\\
(\mathrm{T}^1(\widetilde{w}))_{23} &= \sum_{i=1}^{k-2} i(xy)^i \otimes y(xy)^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} (i+1)y(xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i}\\
&\quad + dx(yx)^{k-1} \otimes (yx)^{k-1};
\end{aligned}$$

$$\mathrm{T}^2(\widetilde{w}) = \begin{pmatrix} 0 & * & 0 & 0\\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^2(\widetilde{w}))_{12} &= 1\otimes\widetilde{y} + c^3dx(yx)^{k-1}\otimes(xy)^k,\\
(\mathrm{T}^2(\widetilde{w}))_{23} &= yx\otimes 1 + y\otimes x + cyx\otimes x + dx\otimes x(yx)^{k-1}\\
&\quad + dy(xy)^{k-1}\otimes(yx)^{k-1} + d(xy)^{k-1}\otimes y(xy)^{k-1}\\
&\quad + cd(xy)^k\otimes(yx)^{k-1},\\
(\mathrm{T}^2(\widetilde{w})))_{24} &= y(xy)^{k-1}\otimes 1 + c(xy)^k\otimes 1 + cy(xy)^{k-1}\otimes x\\
&\quad + c^2(xy)^k\otimes x;
\end{aligned}$$

$$\mathrm{T}^3(\widetilde{w}) = \begin{pmatrix} 0 & * & 0 & 0\\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^3(\widetilde{w}))_{12} = 1\otimes\widetilde{y} + c^3dx(yx)^{k-1}\otimes(xy)^k,$$

$$(\mathrm{T}^3(\widetilde{w}))_{23} = 1\otimes\widetilde{y} + d\sum_{i=1}^{k-2} ix(yx)^i\otimes(xy)^{k-1-i} + c^2dx(yx)^{k-1}\otimes y(xy)^{k-1},$$

$$(\mathrm{T}^3(\widetilde{w}))_{24} = \sum_{i=1}^{k-2} i(yx)^i\otimes(xy)^{k-1-i} + c\sum_{i=1}^{k-2} ix(yx)^i\otimes(xy)^{k-1-i}.$$

Доказательство леммы состоит в прямой проверке соотношений $\mu\mathrm{T}^0(b) = b$, $d_{i-1}\mathrm{T}^i(b) = \mathrm{T}^{i-1}(b)d_{i+\deg b-1}$ $(i > 0)$ для $b \in \mathcal{Y}_1 \setminus \{z\}$ с $\deg b > 0$.

Теперь доказательство предложения 3.1 завершается с помощью прямых вычислений с матрицами, приведёнными в лемме 3.3, и эту проверку мы предоставляем проделать читателю. □

Замечание 3.4. Для дальнейшего важно заметить, что формулы для трансляций элементов u_3, v_1, v_4 (см. лемму 3.3) остаются справедливыми для любого чётного k (при $d \neq 0$), а трансляции элемента v_2 справедливы для чётных k, бóльших 2 (для тех случаев, когда эти элементы включаются в множество образующих алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$).

Предложение 3.5. *Для любого* $\ell \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
v_1^\ell &= \big(1, \mathrm{O}\big) \in \mathrm{HH}^{2\ell}(R),\\
v_1^\ell u_3 &= \big(x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}\big) \in \mathrm{HH}^{2\ell+1}(R),
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} v_1^{\ell-1}u_3\widetilde{w} &= \big(0, (xy)^k, \mathrm{O}\,\big) \in \mathrm{HH}^{2\ell+2}(R), \\ v_1^{\ell-1}\widetilde{w} &= \big(0, \widetilde{y}, \mathrm{O}\,\big) \in \mathrm{HH}^{2\ell+1}(R). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Замечание 3.6. Ввиду данного в [2, лемма 4.11] описания базисов для групп $\mathrm{H}^{2\ell}(\mathcal{X}^\bullet)$ (при $\ell \geqslant 2$) элементы

$$\big(1, \mathrm{O}_{r+1}\,\big), \big(0, (xy)^k, \mathrm{O}_r\,\big) \tag{3.34}$$

(для подходящего r) образуют базис образа $\mathrm{H}^{2\ell}(\mathcal{X}^\bullet)$ в группе $\mathrm{HH}^{2\ell}(R)$ (см. замечание 2.12). Аналогично элементы

$$\big(0, \widetilde{y}, \mathrm{O}_r\,\big), \big(x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_{r+1}\,\big) \tag{3.35}$$

образуют базис образа $\mathrm{H}^{2\ell+1}(\mathcal{X}^\bullet)$ в группе $\mathrm{HH}^{2\ell+1}(R)$.

Доказательство предложения 3.5. 1) Простая проверка (с учетом леммы 3.3) показывает, что $v_1^2 = \big(1, \mathrm{O}_2\,\big)$. Далее, в предположении, что $v_1^\ell = \big(1, \mathrm{O}\,\big)$ $(\ell \geqslant 2)$, находим следующие трансляции этого элемента:

$$\mathrm{T}^0(v_1^\ell) = \big(1 \otimes 1, \mathrm{O}\,\big),$$

$$\mathrm{T}^1(v_1^\ell) = \begin{pmatrix} 1 \otimes 1 & \sum\limits_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes x(yx)^{k-2-i} & \mathrm{O} \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1} (xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i} + c^3(xy)^{k-1} \otimes (xy)^k & \mathrm{O} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(v_1^\ell) = \begin{pmatrix} 1 \otimes 1 & c^3x(yx)^{k-1} \otimes x(yx)^{k-1} & 0 & \mathrm{O} \\ 0 & * & (xy)^{k-1} \otimes (yx)^{k-1} & \mathrm{O} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} (\mathrm{T}^2(v_1^\ell))_{22} &= x \otimes 1 + 1 \otimes x + cx \otimes x + cx^2 \otimes 1 \\ &\quad + c^2x^2 \otimes x + c^2x^3 \otimes 1 + c^3y(xy)^{k-1} \otimes y(xy)^{k-1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$v_1^{\ell+1} = \mu \mathrm{T}^0(v_1)\mathrm{T}^2(v_1^\ell) = \big(1, \mathrm{O}\,\big).$$

2) Непосредственно проверяется, что $v_1u_3 = \big(x(yx)^{k-1}, 0\big)$. Далее, в предположении, что $v_1^\ell u_3 = \big(x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}\,\big)$ $(\ell \geqslant 0)$, находим следующие

трансляции:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}^0(v_1^\ell u_3) = \big(x(yx)^{k-1}\otimes 1, \mathrm{O}\,\big),\\
&\mathrm{T}^1(v_1^\ell u_3) = \begin{pmatrix} x(yx)^{k-1}\otimes 1 & 0 & \mathrm{O}\\ 0 & x(yx)^{k-1}\otimes (yx)^{k-1} & \mathrm{O}\end{pmatrix},\\
&\mathrm{T}^2(v_1^\ell u_3) = \begin{pmatrix} x(yx)^{k-1}\otimes 1 & 0 & \mathrm{O}\\ 0 & x(yx)^{k-1}\otimes x & \mathrm{O}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$v_1^{\ell+1}u_3 = \mu\mathrm{T}^0(v_1)\mathrm{T}^2(v_1^\ell u_3) = \big(x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}\,\big).$$

3) Прямое вычисление показывает, что $u_3\widetilde{w} = \big(0, (xy)^k, \mathrm{O}\,\big)$. Далее, при условии, что $v_1^{\ell-1}u_3\widetilde{w} = \big(0, (xy)^k, \mathrm{O}\,\big)$ (для $\ell\in\mathbb{N}$), находим, что

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}^0(v_1^{\ell-1}u_3\widetilde{w}) = \big(0, (xy)^k\otimes 1, \mathrm{O}\,\big),\\
&\mathrm{T}^1(v_1^{\ell-1}u_3\widetilde{w}) = \begin{pmatrix} d(xy)^k\otimes 1 & (xy)^k\otimes 1 & 0 & \mathrm{O}\\ 0 & 0 & (xy)^k\otimes (yx)^{k-1} & \mathrm{O}\end{pmatrix},\\
&\mathrm{T}^2(v_1^{\ell-1}u_3\widetilde{w}) = \begin{pmatrix} 0 & (xy)^k\otimes 1 & 0 & \mathrm{O}\\ 0 & d(xy)^k\otimes x & (xy)^k\otimes x & \mathrm{O}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Тогда получаем

$$v_1^\ell u_3\widetilde{w} = \mu\mathrm{T}^0(v_1)\mathrm{T}^2(v_1^{\ell-1}u_3\widetilde{w}) = \big(0, (xy)^k, \mathrm{O}\,\big).$$

4) В предположении, что $v_1^{\ell-1}\widetilde{w} = \big(0, \widetilde{y}, \mathrm{O}\,\big)$ ($\ell\in\mathbb{N}$), находим следующие трансляции:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}^0(v_1^{\ell-1}\widetilde{w}) = \big(0, \widetilde{w}\otimes 1, \mathrm{O}\,\big),\\
&\mathrm{T}^1(v_1^{\ell-1}\widetilde{w}) = \begin{pmatrix} d\widetilde{w}\otimes 1 & \widetilde{w}\otimes 1 & \sum\limits_{i=1}^{k-1}(yx)^i\otimes x(yx)^{k-1-i} & \mathrm{O}\\ 0 & 0 & * & \mathrm{O}\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где

$$(\mathrm{T}^1(v_1^{\ell-1}\widetilde{w}))_{23} = \sum_{i=0}^{k-1} y(xy)^i\otimes (yx)^{k-1-i} + dx(yx)^{k-1}\otimes (yx)^{k-1};$$

$$\mathrm{T}^2(v_1^{\ell-1}\widetilde{w}) = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{y}\otimes 1 + c^3d(xy)^k\otimes x(yx)^{k-1} & 0 & 0 & \mathrm{O}\\ 0 & dyx\otimes 1 + d\widetilde{y}\otimes x + cdyx\otimes x & * & * & \mathrm{O}\end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^2(v_1^{\ell-1}\widetilde{w}))_{23} = yx\otimes 1 + \widetilde{y}\otimes x + cyx\otimes x,$$
$$(\mathrm{T}^2(v_1^{\ell-1}\widetilde{w}))_{24} = y(xy)^{k-1}\otimes (yx)^{k-1}.$$

Тогда

$$v_1^{\ell}\widetilde{w} = \mu\mathrm{T}^0(v_1)\mathrm{T}^2(v_1^{\ell-1}\widetilde{w}) = \bigl(0, \widetilde{y}, \mathrm{O}\bigr). \qquad \square$$

Предложение 3.7. *Предположим, что k нечётно и $d \neq 0$. Множество $\mathcal{Y}_1$, указанное в* (3.6), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_1 \cup \{1\}$ (здесь 1 – единица алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$). Мы сначала докажем, что $\bigcup\limits_{i=0}^{3}\mathrm{HH}^i(R)\subset\mathcal{H}$, а затем с помощью индукции по n установим включение $\mathrm{HH}^n(R)\subset\mathcal{H}$.

Поскольку $p_1^i = (xy)^i + (yx)^i$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, то $\mathrm{HH}^0(R)\subset\mathcal{H}$.

Для базисных элементов из $\mathrm{HH}^1(R)$, описанных в следствии 2.4, часть (а), справедливы соотношения

$$\bigl(y(xy)^i, 0\bigr) = p_1^{i-1}u_2 \ \text{ для } 1\leqslant i\leqslant k-1,$$
$$\bigl((xy)^k, 0\bigr) = d^{-1}p_1u_1,\ \bigl(0, y(xy)^{k-1}\bigr) = (p_3+cp_4)u_1, \bigl(0, (xy)^k\bigr) = p_4u_1,$$

и потому $\mathrm{HH}^1(R)\subset\mathcal{H}$.

Далее, для базисных элементов из $\mathrm{HH}^2(R)$, описанных в следствии 2.4, пункт (б), справедливы соотношения

$$\bigl(d(xy)^{i+1}, y(xy)^i + c(xy)^{i+1}\bigr) = p_1^iv_4 \ \text{ для } \ 0\leqslant i\leqslant k-2,$$
$$\bigl(0,1\bigr) = u_1^2,\ \bigl(0,(xy)^k\bigr) = p_4u_1^2.$$

Следовательно, $\mathrm{HH}^2(R)\subset\mathcal{H}$. Отметим, что здесь и ниже мы производим умножение элементов множества $\mathcal{Y}_1$, имеющих положительную степень, используя трансляции таких элементов, представленные в лемме 3.3 (см. также лемму 3.2).

Для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^3(R)$, описанных в следствии 2.4, пункт (в), получаем следующие соотношения:

$$\bigl(0, y(xy)^i\bigr) = p_1^i\widetilde{w} \ \text{ для } 1\leqslant i\leqslant k-1,$$
$$\bigl(dyx, xy+yx\bigr) = u_1v_3,\ \bigl(y, x(yx)^{k-1}\bigr) = d^{-1}u_1^3,$$
$$\bigl(x(yx)^{k-1}, 0\bigr) = u_3v_1,\ \bigl(0,(xy)^k\bigr) = p_2\widetilde{w},$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^3(R)\subset\mathcal{H}$.

Теперь индукцией по n докажем, что $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$. Считаем, что $n \geqslant 4$. Пусть $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$ – коцикл, представляющий элемент из $\mathrm{HH}^n(R)$. Ввиду замечания 2.13 мы можем ограничиться рассмотрением базисных элементов вида $f = (f_1, f_2)$, где $f_1 \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X_n, R)$, $f_2 \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n-4}, R)$. При этом с учётом замечания 3.6 можно считать, что (f_1, O) – это один из элементов из (3.34) или из (3.35) (в соответствии с чётностью или нечётностью n), и тогда ввиду предложения 3.5 (f_1, O) лежит в $\mathcal{H}$. Наконец, по индукционному предположению $f_2 \in \mathcal{H}$, и тогда $(\mathrm{O}_2, f_2) = z \cdot f_2$ также лежит в $\mathcal{H}$. □

Пусть $\mathcal{A}_1 = K[\mathcal{X}_1]/I_1$ – градуированная алгебра, определённая в разделе 1, где $\mathcal{X}_1$ из (1.2), а I_1 – соответствующий идеал соотношений (см. (1.3)–(1.27)). (Ненулевые) образы мономов из $K[\mathcal{X}_1]$ относительно канонического эпиморфизма $K[\mathcal{X}_1] \to \mathcal{A}_1$ также будем называть мономами. Произвольный элемент $a \in \mathcal{A}_1$ представляется в виде линейной комбинации мономов (с коэффициентами из K). Ввиду предложений 3.1 и 3.7 существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_1 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_1$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_1$ (см. (3.6)); заметим, что мы обозначили одинаково элементы из обоих множеств, которые соответствуют друг другу. Пусть $\mathcal{A}_1 = \bigoplus_{m \geqslant 0} \mathcal{A}_1^m$ – разложение алгебры $\mathcal{A}_1$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (1) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 3.8. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_1^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Замечание 3.9. Легко проверяется, что при $c \neq 0$ соотношение $u_1^4 = 0$ (см. (3.23)) выводится из остальных определяющих алгебру $\mathcal{A}_1$ соотношений; кроме того, в $\mathcal{A}_1$ выполняется соотношение $p_2 u_1^2 = 0$.

Доказательство предложения 3.8**.** На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_1]$ введём лексикографический порядок такой, что

$$u_3 > v_1 > v_3 > v_4 > v_2 > \widetilde{w} > u_1 > u_2 > z > p_2 > p_3 > p_4 > p_1.$$

Любой ненулевой моном из $\mathcal{A}_1$ представи́м в виде

$$f = p_1^i p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4} u_1^\ell u_2^{\beta_2} u_3^{\beta_3} v_1^r v_2^{\gamma_2} v_3^{\gamma_3} v_4^{\gamma_4} \widetilde{w}^\varepsilon z^s; \tag{3.36}$$

здесь ввиду определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_1$ имеем:

$$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \beta_3, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \varepsilon \in \{0,1\}, i, \ell, r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i \leqslant k-1, \ell \leqslant 3.$$

Такие представления для мономов из $\mathcal{A}_1$ мы отождествляем с соответствующими мономами из $K[\mathcal{X}_1]$.

Далее мы отдельно разберём случаи, когда $c \neq 0$ или $c = 0$.

1) Предположим, что $c \neq 0$. Назовём редукцией монома f из $\mathcal{A}_1$ процесс замены некоторых подмономов в f на другие элементы из $\mathcal{A}_1$ по следующим правилам ($a \mapsto b$ означает замену каждого вхождения монома a на элемент b):

$$\begin{aligned}
&p_2u_1 \mapsto d^{-1}cp_1u_1 + p_1^{k-2}u_2, && u_1u_3 \mapsto cp_4v_1,\\
&p_4v_1 \mapsto p_2v_2 \mapsto d^{-1}cp_1v_2, && p_3v_3 \mapsto p_2v_4 \mapsto p_1v_2 \mapsto p_4u_1^2,\\
&u_1v_4 \mapsto dp_2\widetilde{w}, && u_1v_1 \mapsto cd^{-1}u_1^3,\\
&u_2v_4 \mapsto p_1^2\widetilde{w}, && u_1v_2 \mapsto (p_1^{k-1} + cp_2)\widetilde{w},\\
&u_1\widetilde{w} \mapsto (p_3 + cp_4)z, && v_4^2 \mapsto p_1^2z,\\
&v_3\widetilde{w} \mapsto p_4u_1z, && v_4\widetilde{w} \mapsto u_2z,\\
&\widetilde{w}^2 \mapsto cp_4u_1^2z.
\end{aligned}$$

Любую замену из приведённого выше списка назовём элементарным шагом редукции. Выписанные элементарные шаги редукции соответствуют (немономиальным) определяющим соотношениям в алгебре $\mathcal{A}_1$, причём после каждого элементарного шага редукции ненулевой моном переходит в линейную комбинацию мономов, строго меньших относительно лексикографического порядка. Поэтому за конечное число шагов мы получаем многочлены, к которым уже нельзя применить никакой элементарный шаг редукции. Говорим, что представление элемента $a \in \mathcal{A}_1$ в виде линейной комбинации мономов имеет нормальную форму, если ни к одному из этих мономов нельзя применить редукцию. Ясно, что любой элемент из $\mathcal{A}_1$ допускает хотя бы одно представление в нормальной форме.

Пусть $q_i = \dim_K \mathcal{A}_1^i$. Через $\widetilde{q}_i$ обозначим число мономов из $\mathcal{A}_1^i$, представленных в нормальной форме; ясно, что $\widetilde{q}_i \geqslant q_i$. Поскольку имеется эпиморфизм $\mathcal{A}_1^i \to \mathrm{HH}^i(R)$, то $q_i \geqslant \dim_K \mathrm{HH}^i(R)$, и, таким образом, достаточно доказать, что

$$\widetilde{q}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{3.37}$$

Предположим, что моном f вида (3.36) имеет нормальную форму. Если u_3 входит в этот моном, то в f не входят u_2, v_2, v_3, v_4 и p_i для всех i (здесь мы используем некоторые мономиальные соотношения с участием u_3); кроме того, в f не входит u_1 (так как есть редукция $u_1u_3 \mapsto \dots$). Следовательно, f – один из мономов

$$u_3v_1^rz^s, \;\; u_3\widetilde{w}v_1^rz^s.$$

Теперь предположим, что f не содержит множитель u_3, но в f входит v_1. Тогда в f не входят $v_2, v_3, v_4, u_2, p_1, p_2, p_3$ (из-за соответствующих мономиальных соотношений); кроме того, в f не входят u_1 (есть редукция $u_1v_1 \mapsto \dots$) и p_4 (есть редукция $p_4v_1 \mapsto \dots$). Таким образом, f – один из мономов

$$v_1^rz^s, \;\; v_1^rz^s\widetilde{w} \;\; (r \geqslant 1).$$

Далее, предположим, что f не содержит множители u_3, v_1, но содержит v_3. Тогда в f не входят $v_2, v_4, u_2, p_1, p_2, p_4$ (из-за соответствующих мономиальных соотношений); кроме того, в f не входят $\widetilde{w}$ (есть редукция $v_3\widetilde{w} \mapsto \dots$) и p_3 (есть редукция $p_3v_3 \mapsto \dots$). Поэтому f имеет вид $f = u_1^{\beta_1}v_3z^s$, где $\beta_1 \leqslant 1$ (ввиду соотношения $u_1^2v_3 = 0$). Следовательно,

$$f \in \{v_3z^s, u_1v_3z^s\}.$$

Предположим, что f не содержит множители u_3, v_1, v_3, но содержит v_4. Тогда в f не входят v_2, p_3, p_4; не входят также (из-за наличия соответствующих редукций) $p_2, u_1, u_2, \widetilde{w}$. Кроме того, $i \leqslant k-2$ (поскольку $p_1^{k-1}v_4 = 0$). Поэтому f – это один из мономов

$$p_1^iv_4z^s, \;\; 0 \leqslant i \leqslant k-2.$$

Предположим, что f не содержит множители u_3, v_1, v_3, v_4, но содержит v_2. Тогда в f не входят $u_2, p_3, p_4, \widetilde{w}$ (из-за соответствующих мономиальных соотношений); не входят также (из-за наличия соответствующих редукций) p_1, p_2, u_1. Следовательно, $f = v_2z^s$.

Теперь предположим, что f не содержит множители u_3 и v_j ($j \in \{1,2,3,4\}$), но содержит $\widetilde{w}$. Тогда в f не входят $u_2, p_3, p_4, \widetilde{w}$; кроме того, не входит u_1 (из-за редукции $u_1\widetilde{w} \mapsto \dots$). Следовательно, f – это один из мономов

$$p_1^i\widetilde{w}z^s (0 \leqslant i \leqslant k-1), \;\; p_2\widetilde{w}z^s.$$

Предположим, что f не содержит множители u_3, v_j ($j \in \{1,2,3,4\}$) и $\widetilde{w}$, но содержит u_1. Тогда в f не входят u_2 (так как $u_1u_2 = 0$) и p_2 (так как есть редукция $p_2u_1 \mapsto \dots$). Поэтому $f = p_1^ip_3^{\varepsilon_3}p_4^{\varepsilon_4}u_1^\ell t^s$, при этом $i \leqslant 1$, так как $p_1^2 u_1 = 0$ [при $c \neq 0$ это выводится из $p_1 u_1 = dc^{-1}(p_1^{k-2}u_2 + p_2 u_1)$], а если $l \geqslant 2$, то $i = \varepsilon_3 = 0$, так как $p_1 u_1^2 = p_3 u_1^2 = 0$. Следовательно, f – это один из мономов

$$u_1 z^s,\ p_1 u_1 z^s,\ p_3 u_1 z^s,\ p_4 u_1 z^s,\ u_1^2 z^s,\ p_4 u_1^2 z^s,\ u_1^3 z^s.$$

Теперь предположим, что f не содержит множители u_1, u_3, v_j ($j \in \{1,2,3,4\}$) и $\widetilde{w}$, но содержит u_2. Тогда в f не входят p_j при $j \in \{2,3,4\}$. Следовательно,

$$f = p_1^i u_2 z^s, \text{ где } 0 \leqslant i \leqslant k-2.$$

Наконец, если f не содержит u_j, v_m для любых возможных значений j, m и не содержит $\widetilde{w}$, то ясно, что f – это один из мономов

$$p_1^i z^s (0 \leqslant i \leqslant k-1),\ p_2 z^s,\ p_3 z^s,\ p_4 z^s.$$

Рассматривая степени указанных выше мономов,мы получаем следующий список всех (ненулевых) мономов, имеющих нормальную форму. Пусть $a \geqslant 0$.

Мономы степени $4a$:

$$\{u_3 \widetilde{w} v_1^{2(a-m)-2} z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{v_1^{2(a-m)} z^m\}_{m=0}^{a-1},$$
$$\{p_1^i z^a\}_{i=0}^{k-1}, p_2 z^a, p_3 z^a, p_4 z^a$$

(их количество равно $2a + k + 3$).

Мономы степени $4a+1$:

$$\{u_3 v_1^{2(a-m)} z^m\}_{m=0}^{a}, \{\widetilde{w} v_1^{2(a-m)-1} z^m\}_{m=0}^{a-1},$$
$$\{p_1^i u_2 z^a\}_{i=0}^{k-2}, u_1 z^a, p_1 u_1 z^a, p_3 u_1 z^a, p_4 u_1 z^a$$

(их количество равно $2a + k + 4$).

Мономы степени $4a+2$:

$$\{u_3 \widetilde{w} v_1^{2(a-m)-1} z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{v_1^{2(a-m)+1} z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{p_1^i v_4 z^a\}_{i=0}^{k-2}, v_2 z^a, v_3 z^a, u_1^2 z^a, p_4 u_1^2 z^a$$

(их количество равно $2a + k + 4$).

Мономы степени $4a+3$:

$$\{u_3 v_1^{2(a-m)+1} z^m\}_{m=0}^{a}, \{\widetilde{w} v_1^{2(a-m)} z^m\}_{m=0}^{a-1},$$
$$\{p_1^i \widetilde{w} z^a\}_{i=0}^{k-1}, u_1 v_3 z^a, p_2 \widetilde{w} z^a, u_1^3 z^a$$

(их количество равно $2a+k+4$). Легко видеть, что все мономы из этого списка имеют нормальную форму. С учётом следствия 2.11 отсюда вытекает равенство (3.37).

2) В случае, когда $c = 0$, надо сделать небольшие видоизменения в предыдущем рассуждении. Сейчас в качестве элементарных шагов редукции выберем следующие:

$$\begin{array}{ll}
p_2u_1 \mapsto p_1^{k-2}u_2, & p_3v_3 \mapsto p_2v_4 \mapsto p_1v_2 \mapsto p_4u_1^2, \\
u_1v_4 \mapsto dp_2\widetilde{w}, & u_1v_2 \mapsto p_1^{k-1}\widetilde{w}, \\
v_4^2 \mapsto p_1^2z, & u_1\widetilde{w} \mapsto p_3z, \\
v_4\widetilde{w} \mapsto u_2z, & v_3\widetilde{w} \mapsto p_4u_1z.
\end{array}$$

Отметим, что сейчас в алгебре $\mathcal{A}_1$ появляются новые (в сравнении с предыдущим случаем) мономиальные соотношения:

$$u_1u_3 = p_2v_2 = p_4v_1 = u_1v_1 = \widetilde{w}^{\,2} = 0.$$

Теперь разбирая последовательно различные случаи вхождения элементов множества $\mathcal{X}_1$ в представление вида (3.36), получаем тот же список всех мономов, имеющих нормальную форму, что и при $c \neq 0$. $\square$

Случай 2. Предположим, что k чётно, $k > 2$ и $d \neq 0$.
Выделим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

$$\begin{array}{ll}
\text{– степени 0 :} & p_1, p_2, p_3, p_4 \text{ из } (3.1); \\
\text{– степени 1 :} & \begin{cases} u_3 \text{ из } (3.2), \quad \text{а также} \\ u_1' := (d(xy)^{k-1}, 1 + cx), u_2' := (y, 0); \end{cases} \\
\text{– степени 2 :} & v_1, v_2, v_3, v_4 \text{ из } (3.4); \\
\text{– степени 3 :} & w := (0, y); \\
\text{– степени 4 :} & z \text{ из } (3.5).
\end{array} \tag{3.38}$$

Предложение 3.10. *Предположим, что k чётно, $k > 2$ и $d \neq 0$. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1', u_2', u_3, v_1, v_2, v_3, v_4, w, z\} \tag{3.39}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения* (3.7), (3.10), (3.12), (3.16), (3.17), (3.22), (3.23), (3.26), *а также следующие соотношения*:

$$p_1u_1' = (dp_2 + cp_1)u_2',\ p_2u_1' = p_1^{k-1}u_2',$$
$$p_1^{k-1}v_4 = dp_4v_1 + cp_3v_3,\ p_4(u_1')^2 = p_1v_2 = p_3v_3 = p_2v_4,$$
$$p_1(u_1')^2 = p_3(u_1')^2 = 0,$$
$$u_1'u_2' = \theta_{k-1}(cdp_4v_1 + c^2p_3v_3),$$
$$(u_1')^3 = du_2'v_1,\ u_1'v_2 = p_1^{k-1}w,\ u_2'v_2 = p_2w,$$
$$u_1'v_4 = u_2'(dv_2 + cv_4),\ u_2'v_4 = p_1w,$$
$$u_1'v_1 = u_2'v_3 = 0,$$
$$p_3w = p_4w = 0,$$
$$(u_1')^2v_j = 0 \ \text{ при } \ 2 \leqslant j \leqslant 4,$$
$$u_1'w = u_2'w = 0,$$
$$v_2w = p_2u_2'z,\ v_4w = p_1u_2'z,\ v_3w = 0,$$
$$w^2 = (d\theta_{k+1}p_4v_1 + c\theta_{k-1}p_3v_3)z.$$

Доказательство. Доказательство приведённых выше соотношений проводится так же, как в доказательстве предложения 3.1. При этом нам необходимо знать трансляции тех элементов из (3.39), для которых они не были вычислены ранее (см. замечание 3.4). Такие трансляции мы опишем в следующей лемме.

Лемма 3.11. *В качестве трансляций элементов* u_1', u_2', v_3 *и* w *можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами:*

$$\mathrm{T}^0(u_1') = \big(d(xy)^{k-1} \otimes 1, 1 \otimes 1 + cx \otimes 1\big);$$

$\mathrm{T}^1(u_1')$ *представляется* 2×2*-матрицей, в которой*

$$(\mathrm{T}^1(u_1'))_{11} = d\sum_{i=1}^{k-2}(xy)^i \otimes (xy)^{k-1-i} + d\sum_{i=0}^{k-1}(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i} + cd\sum_{i=1}^{k-1} ix(yx)^{i-1} \otimes (xy)^{k-i};$$

$$(\mathrm{T}^1(u_1'))_{12} = \sum_{i=0}^{k-2} y(xy)^i \otimes (xy)^{k-2-i} + c\sum_{i=0}^{k-1}(xy)^i \otimes (xy)^{k-1-i}$$

$$+ c\sum_{i=2}^{k-2}(i+1)(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i}$$
$$+ c^2\sum_{i=0}^{k-2}(i+1)x(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i} + dx(yx)^{k-1} \otimes (xy)^{k-2},$$
$$(\mathrm{T}^1(u_1'))_{21} = d\sum_{i=0}^{k-2} y(xy)^i \otimes y(xy)^{k-2-i} + cd\sum_{i=1}^{k-1} i(xy)^i \otimes y(xy)^{k-1-i},$$
$$(\mathrm{T}^1(u_1'))_{22} = 1\otimes 1 + cx\otimes 1 + c\sum_{i=0}^{k-2}(i+1)y(xy)^i \otimes y(xy)^{k-2-i}$$
$$+ c^2\sum_{i=1}^{k-1} i(xy)^i \otimes y(xy)^{k-1-i} + d(xy)^{k-1} \otimes y(xy)^{k-2};$$

$$\mathrm{T}^0(u_2') = \big(y\otimes 1, 0\big),$$
$$\mathrm{T}^1(u_2') = \begin{pmatrix} * & * \\ d\sum\limits_{i=1}^{k-1} i(xy)^i \otimes y(xy)^{k-1-i} & * \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(u_2'))_{11} = y\otimes 1 + d\sum_{i=1}^{k-1} ix(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i},$$
$$(\mathrm{T}^1(u_2'))_{12} = \sum_{i=1}^{k-1} i(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i} + c\sum_{i=1}^{k-1} ix(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i},$$
$$(\mathrm{T}^1(u_2'))_{22} = \sum_{i=0}^{k-2}(i+1)y(xy)^i \otimes y(xy)^{k-2-i} + c\sum_{i=1}^{k-1} i(xy)^i \otimes y(xy)^{k-1-i};$$

$\mathrm{T}^0(v_3)$ *и* $\mathrm{T}^1(v_3)$ *можно взять теми же, что найдены в случае нечётного* k *(см. лемму* 3.3*);*

$\mathrm{T}^2(v_3)$ – *это* 2×3-*матрица, в которой*

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^2(v_3))_{11} &= dx^2\otimes 1 + d(yx)^{k-1}\otimes y + cdx(yx)^{k-1}\otimes y\\
&\quad + d^2x(yx)^{k-2}\otimes (xy)^k,\\
(\mathrm{T}^2(v_3))_{12} &= dx(yx)^{k-2}\otimes (xy)^k + dx(yx)^{k-1}\otimes (xy)^{k-1}\\
&\quad + cdx(yx)^{k-1}\otimes x(yx)^{k-1},\\
(\mathrm{T}^2(v_3))_{13} &= x(yx)^{k-2}\otimes (xy)^k + x(yx)^{k-1}\otimes (xy)^{k-1}\\
&\quad + (yx)^{k-1}\otimes x(yx)^{k-1} + cx(yx)^{k-1}\otimes x(yx)^{k-1},\\
(\mathrm{T}^2(v_3))_{21} &= c^2d^2y(xy)^{k-1}\otimes (xy)^k + d^2\sum_{i=0}^{k-1}(xy)^i\otimes (xy)^{k-i}\\
&\quad + cd^2x(yx)^{k-1}\otimes xy,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^2(v_3))_{22} &= d\sum_{i=1}^{k}(xy)^i\otimes (xy)^{k-i} + d\sum_{i=1}^{k-1}y(xy)^{i-1}\otimes x(yx)^{k-i}\\
&\quad + dx\otimes y(xy)^{k-1} + c^2d(xy)^k\otimes y(xy)^{k-1} + cdy(xy)^{k-1}\otimes y(xy)^{k-1},\\
(\mathrm{T}^2(v_3))_{23} &= \sum_{i=1}^{k}y(xy)^{i-1}\otimes x(yx)^{k-i} + \sum_{i=1}^{k-1}(xy)^i\otimes (xy)^{k-i}\\
&\quad + c^2(xy)^k\otimes y(xy)^{k-1} + cy(xy)^{k-1}\otimes y(xy)^{k-1};
\end{aligned}$$

$$\mathrm{T}^0(w) = \big(0, y\otimes 1\big),$$

$\mathrm{T}^1(w)$ – *это* 2×3-*матрица, в которой*

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^1(w))_{11} &= dy\otimes 1 + d^2\sum_{i=1}^{k-1}ix(yx)^i\otimes (xy)^{k-1-i},\\
(\mathrm{T}^1(w))_{12} &= y\otimes 1 + d\sum_{i=1}^{k-1}ix(yx)^i\otimes (xy)^{k-1-i}\\
&\quad + d\sum_{i=2}^{k-2}(i-1)(yx)^i\otimes x(yx)^{k-1-i} + cdy(xy)^{k-1}\otimes (xy)^{k-1},
\end{aligned}$$

$$(\mathrm{T}^1(w)_{13} = \sum_{i=1}^{k-1} ix(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i} + \sum_{i=1}^{k-1} i(yx)^i \otimes x(yx)^{k-1-i} + \\ + cy(xy)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1},$$

$$(\mathrm{T}^1(w)_{21} = d^2 \sum_{i=1}^{k-1} i(xy)^i \otimes y(xy)^{k-1-i},$$

$$(\mathrm{T}^1(w)_{22} = d \sum_{i=1}^{k-1} i(xy)^i \otimes y(xy)^{k-1-i} + d \sum_{i=1}^{k-1} iy(xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i},$$

$$(\mathrm{T}^1(w)_{23} = \sum_{i=1}^{k-1} i(xy)^i \otimes y(xy)^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-2} (i+1)y(xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i};$$

$$\mathrm{T}^2(w) = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^2(w))_{12} = \widetilde{y} \otimes 1 + c^3 d(xy)^k \otimes x(yx)^{k-1},$$
$$(\mathrm{T}^2(w))_{13} = 1 \otimes x(yx)^{k-1} + c^2x^2 \otimes x(yx)^{k-1},$$
$$(\mathrm{T}^2(w)))_{14} = (yx)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1} + c(yx)^{k-1} \otimes x(yx)^{k-1},$$
$$(\mathrm{T}^2(w)))_{22} = dyx \otimes 1 + dy \otimes x + cdyx \otimes x + d^2x(yx)^{k-1} \otimes x,$$
$$(\mathrm{T}^2(w)))_{23} = 1 \otimes xy + x \otimes y + cx \otimes xy + cx^2 \otimes y + dy(xy)^{k-1} \otimes (yx)^{k-1};$$

$$\mathrm{T}^3(w) = \begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^3(w))_{11} = dy \otimes 1 + d^2x(yx)^{k-1} \otimes 1 + c^3d^2x(yx)^{k-1} \otimes (xy)^k,$$
$$(\mathrm{T}^3(w))_{12} = y \otimes 1 + dx(yx)^{k-1} \otimes 1 + c^3dx(yx)^{k-1} \otimes (xy)^k,$$
$$(\mathrm{T}^3(w))_{13} = x(yx)^{k-1} \otimes 1 + cy(xy)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1} \\ + c(yx)^{k-1} \otimes y(xy)^{k-1} + c^2x^2 \otimes x(yx)^{k-1};$$
$$(\mathrm{T}^3(w)_{23} = 1 \otimes y + d \sum_{i=1}^{k-3} ix(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i}$$

$$+ d\sum_{i=1}^{k-1}(yx)^i \otimes x(yx)^{k-1-i},$$

$$(\mathrm{T}^3(w)_{24} = \sum_{i=1}^{k-1} i(yx)^{i-1} \otimes (xy)^{k-i} + c\sum_{i=1}^{k-1} ix(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i}$$

$$+ c\sum_{i=0}^{k-1}(yx)^i \otimes x(yx)^{k-1-i} + c^2 y(xy)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1}.$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3.3.

Теперь доказательство предложения 3.10 завершается с помощью прямых вычислений с матрицами, приведёнными в лемме 3.11, и эту проверку мы предоставляем проделать читателю. □

Предложение 3.12. *Предположим, что k чётно, $k > 2$ и $d \neq 0$. Множество $\mathcal{Y}_2$, указанное в* (3.39)*, порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.13. *Для любого $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$*

$$v_1^{\ell-2}(v_1 w + u_3 z) = (0, \widetilde{y}, \mathrm{O}) \in \mathrm{HH}^{2\ell+1}(R),$$

$$v_1^{\ell-1} u_3 w = \big(0, (xy)^k, \mathrm{O}\,\big) \in \mathrm{HH}^{2\ell+2}(R).$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $v_1 w + u_3 z = (0, \widetilde{y}, \mathrm{O}_2)$. Далее доказательство первого соотношения проводится индукцией по ℓ аналогично доказательству предложения 3.5. При этом надо заметить, что трансляции $\mathrm{T}^i(f)$, $i \in \{1, 2\}$, для элемента $f = (0, \widetilde{y}, \mathrm{O})$ можно взять в виде, полученном в доказательстве этого предложения.

Второе соотношение леммы доказывается аналогично предыдущему. □

Доказательство предложения 3.12**.** Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_2 \cup \{1\}$. Сначала докажем, что $\bigcup\limits_{i=0}^{3} \mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}$, а затем с помощью индукции по n установим включение $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$.

Ясно, что $\mathrm{HH}^0(R) \subset \mathcal{H}$ (см. доказательство предложения 3.7). Далее, для базисных элементов из $\mathrm{HH}^1(R)$, описанных в следствии 2.6, пункт (а), справедливы соотношения

$$\big(y(xy)^i,0\big)=p_1^iu_2' \text{ для } 1\leqslant i\leqslant k-1,\ \big((xy)^k,0\big)=p_2u_2',$$
$$\big(0,y(xy)^{k-1}\big)=(p_3+cp_4)u_1', \big(0,(xy)^k\big)=p_4u_1',$$

и потому $\mathrm{HH}^1(R)\subset\mathcal{H}$.

Далее, для базисных элементов из $\mathrm{HH}^2(R)$, описанных в следствии 2.6, пункт (б), справедливы соотношения

$$\big(d(xy)^{i+1},y(xy)^i+c(xy)^{i+1}\big)=p_1^iv_4 \text{ для } 0\leqslant i\leqslant k-2,$$
$$\big(0,1\big)=(u_1')^2+c^2d\theta_{k-1}p_4v_1+c^3\theta_{k+1}p_3v_3,$$
$$\big((xy)^k,0\big)=p_4v_1,\ \big(0,(xy)^k\big)=p_3v_3.$$

Следовательно, $\mathrm{HH}^2(R)\subset\mathcal{H}$.

Для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^3(R)$, описанных в следствии 2.6, пункт (в), получаем следующие соотношения:

$$\big(0,y(xy)^i\big)=p_1^iw \text{ для } 1\leqslant i\leqslant k-1,$$
$$\big(dyx,xy+yx\big)=u_1'v_3,\ \big(y,x(yx)^{k-1}\big)=u_2'v_1,$$
$$\big(x(yx)^{k-1},0\big)=u_3v_1,\ \big(0,(xy)^k\big)=u_2'v_2,$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^3(R)\subset\mathcal{H}$.

Теперь аналогично доказательству предложения 3.7 индукцией по n доказывается, что $\mathrm{HH}^n(R)\subset\mathcal{H}$. При этом надо учесть, что соотношения (3.32) остаются справедливыми и для чётного k, а вместо соотношений (3.33) надо использовать соотношения из леммы 3.13. $\square$

Пусть $\mathcal{A}_2=K[\mathcal{X}_2]/I_2$ – градуированная алгебра, определённая в разделе 1, где $\mathcal{X}_2$ из (1.28), а I_2 – соответствующий идеал соотношений. Ввиду предложений 3.10 и 3.12 существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon\mathcal{A}_2\to\mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_2$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_2$ (см. (3.39)). Пусть $\mathcal{A}_2=\bigoplus_{m\geqslant0}\mathcal{A}_2^m$ – разложение алгебры $\mathcal{A}_2$ на однородные прямые слагаемые. Теперь пункт (2) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 3.14. *Для любого* $m\geqslant0$

$$\dim_K\mathcal{A}_2^m=\dim_K\mathrm{HH}^m(R).$$

Сначала отметим следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.15. *В алгебре $\mathcal{A}_2$ выполняются следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} p_2u_2'v_2 &= p_2u_2'v_4 = p_1u_2'v_2 = p_3u_1'v_3 = p_4u_2'v_1 = (u_1')^4 = (u_2')^3 \\ &= p_1^2v_2 = p_4v_1^2 = 0, \\ p_1^{k-2}u_2'v_4 &= u_1'v_2. \end{aligned}$$

Все соотношения, приведённые в лемме, следуют непосредственно из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_2$.

Доказательство предложения 3.14. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_2]$ введём лексикографический порядок такой, что

$$w > u_1' > u_2' > u_3 > v_4 > v_3 > v_2 > v_1 > z > p_2 > p_3 > p_4 > p_1.$$

Любой ненулевой моном из $\mathcal{A}_2$ представи́м в виде

$$f = p_1^i p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4} (u_1')^{\beta_1} (u_2')^{\beta_2} u_3^{\beta_3} v_1^r v_2^{\gamma_2} v_3^{\gamma_3} v_4^{\gamma_4} \widetilde{w}^{\varepsilon} z^s; \tag{3.40}$$

здесь ввиду определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_2$ имеем:

$$\begin{aligned} &\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_3, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \varepsilon \in \{0,1\}, i, \ell, r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad i \leqslant k-1, \beta_1 \leqslant 3, \beta_2 \leqslant 2. \end{aligned}$$

Аналогично доказательству предложения 3.8 мы введём в рассмотрение следующий список элементарных шагов редукции, а затем исследуем нормальные формы мономов (относительно таких шагов редукции):

$$\begin{array}{ll}
p_1u_1' \mapsto (dp_2 + cp_1)u_2', & p_2u_1' \mapsto p_1^{k-1}u_2',\\
p_2v_2 \mapsto p_4v_1, & p_4(u_1')^2 \mapsto p_2v_4 \mapsto p_3v_3 \mapsto p_1v_2,\\
p_1^{k-1}v_4 \mapsto dp_4v_1 + cp_1v_2, & u_1'u_2' \mapsto \theta_{k-1}c(dp_4v_1 + cp_1v_2),\\
(u_2')^2 \mapsto d\theta_{k+1}p_4v_1 + c\theta_{k-1}p_3v_3, & u_2'u_3 \mapsto p_4v_1,\\
(u_1')^3 \mapsto du_2'v_1, & p_1^{k-1}w \mapsto u_1'v_2,\\
p_1w \mapsto u_2'v_4, & p_2w \mapsto u_2'v_2,\\
p_1^{k-2}u_2'v_4 \mapsto u_1'v_2, & p_2w \mapsto u_2'v_2,\\
u_1'v_4 \mapsto (dv_2 + cv_4)u_2', & v_4^2 \mapsto p_1^2z,\\
v_2w \mapsto p_2u_2'z, & v_4w \mapsto p_1u_2'z,\\
w^2 \mapsto (d\theta_{k+1}p_4v_1 + c\theta_{k-1}p_3v_3)z. &
\end{array}$$

Пусть $q_i = \dim_K \mathcal{A}_2^i$, а $\widetilde{q}_i$ обозначает число мономов из $\mathcal{A}_2^i$, представленных в нормальной форме. Поскольку имеется эпиморфизм $\mathcal{A}_2^i \to \mathrm{HH}^i(R)$, то $q_i \geqslant \dim_K \mathrm{HH}^i(R)$, и, таким образом, достаточно доказать, что

$$\widetilde{q}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{3.41}$$

Предположим, что моном f вида (3.40) имеет нормальную форму. Если w входит в этот моном, то в f не входят $p_3, p_4, u_1', u_2', v_3$ (здесь мы используем некоторые мономиальные соотношения с участием w); кроме того, в f не входят p_1 и p_2(так как есть редукции $p_1w \mapsto \dots, p_2w \mapsto \dots$), а также не входят v_2, v_4 (есть редукции $v_2w \mapsto \dots, v_4w \mapsto \dots$). Следовательно, f – один из мономов

$$wv_1^rz^s, \quad u_3wv_1^rz^s.$$

Далее, предположим, что f не содержит множитель w, но в f входит u_1'. Тогда ясно, что в f не входят v_1, u_3. Кроме того, в f не входят p_1 (так как $p_1u_1' \mapsto \dots$), p_2 (так как $p_2u_1' \mapsto \dots$), u_2' (так как $u_1'u_2' \mapsto \dots$) и v_4 (так как $u_1'v_4 \mapsto \dots$). Отметим также, что в (3.40) имеем $\beta_1 \leqslant 2$ (поскольку $(u_1')^3 \mapsto \dots$). Таким образом, f – это один из мономов

$$u_1'z^m, p_3u_1'z^m, p_4u_1'z^m, u_1'v_2z^m, u_1'v_3z^m, (u_1')^2z^m.$$

Далее, предположим, что f не содержит множители w, u_1', но содержит u_2'. Тогда в f не входят p_3, p_4, v_3 (из-за соответствующих мономиальных соотношений), а также не входит u_3 (так как $u_2'u_3 \mapsto \dots$). При этом в (3.40) $i \leqslant k-3$, так как имеется редукция $p_1^{k-2}u_2'v_4 \mapsto \dots$ (см. лемму 3.15). Отсюда легко выводим, что f – это один из мономов

$$p_1^i u_2' z^m \ (0 \leqslant i \leqslant k-1), p_2u_2'z^m, u_2'v_1z^m, u_2'v_2z^m, p_1^i u_2'v_4z^m \ (0 \leqslant i \leqslant k-3).$$

Заметим, что в соответствующем анализе мы используем то, что $p_2u_2'v_4 = 0$ (см. лемму 3.15), а также что $u_2'v_1^2 = 0$.

Теперь предположим, что f не содержит множители w, u_1', u_2', но содержит u_3. Тогда в f не входят p_i для всех i, а также не входят v_2, v_3, v_4 (из-за соответствующих мономиальных соотношений). Следовательно, f имеет вид

$$f = u_3v_1^r z^m \ \text{ для } \ r \geqslant 0.$$

Предположим, что f не содержит множители w, u_1', u_2', u_3, но содержит v_4. Тогда в f не входят p_3, p_4, v_1, v_2, v_3, а также не входит p_2 (так как есть редукция $p_2v_4 \mapsto \dots$). При этом $i \leqslant k-2$ (так как $p_1^{k-1}v_4 \mapsto \dots$). Следовательно, f имеет вид

$$f = p_1^i v_4 z^m \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-2.$$

Далее, пусть f не содержит множители w, u_1', u_2', u_3, v_4, но содержит v_3. Тогда, как легко видеть, в f не входят p_i для всех i, и, следовательно, $f = v_3z^m$.

Теперь пусть f не содержит множители $w, u_1', u_2', u_3, v_4, v_3$, но содержит v_2. Тогда, как легко видеть, в f не входят p_2, p_3, p_4. При этом в (3.40) имеем $i \leqslant 1$ (поскольку $p_1^2v_2 = 0$). Таким образом, f – это один из мономов

$$v_2z^m, \ p_1v_2z^m.$$

Если f не содержит множители $w, u_1', u_2', u_3, v_4, v_3, v_2$, но содержит v_1, то в f не входят p_1, p_2, p_3. Тогда ясно, что f – это один из мономов

$$v_1^r z^m, p_4v_1^r z^m.$$

Наконец, если f не содержит множители $w, u_1', u_2', u_3, v_4, v_3, v_2, v_1$, то f – это один из мономов

$$p_1^i \ (0 \leqslant i \leqslant k-1)z^m, \ p_2z^m, \ p_3z^m, \ p_4z^m.$$

Рассматривая степени указанных выше мономов, мы получаем следующий список всех мономов, имеющих нормальную форму. Пусть $a \geqslant 0$.

Мономы степени $4a$:

$$\{u_3wv_1^{2(a-m)-2}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{v_1^{2(a-m)}z^m\}_{m=0}^{a-1},$$
$$\{p_1^iz^a\}_{i=0}^{k-1}, p_2z^a, p_3z^a, p_4z^a$$

(их количество равно $2a+k+3$).

Мономы степени $4a+1$:

$$\{wv_1^{2(a-m)-1}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{u_3v_1^{2(a-m)}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{p_1^iu_2'z^a\}_{i=0}^{k-1}, u_1'z^a, p_3u_1'z^a, p_4u_1'z^a, p_2u_2'z^a$$

(их количество равно $2a+k+5$).

Мономы степени $4a+2$:

$$\{u_3wv_1^{2(a-m)-1}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{v_1^{2(a-m)+1}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{p_1^iv_4z^a\}_{i=0}^{k-2}, p_4v_1z^a, v_2z^a, v_3z^a, p_1v_2z^a, (u_1')^2z^a$$

(их количество равно $2a+k+5$).

Мономы степени $4a+3$:

$$\{u_3v_1^{2(a-m)+1}z^m\}_{m=0}^{a}, \{wv_1^{2(a-m)}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{p_1^iu_2'v_4z^a\}_{i=0}^{k-3}, u_1'v_2z^a, u_1'v_3z^a, u_2'v_1z^a, u_2'v_2z^a$$

(их количество равно $2a+k+4$). Легко видеть, что все мономы из этого списка имеют нормальную форму. С учётом следствия 2.11 отсюда вытекает равенство (3.41). $\square$

Случай 3. Теперь предположим, что k нечётно и $d=0$.
Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

— степени 0 : p_1, p_2, p_3, p_4 из (3.1);

— степени 1 :
$$\begin{cases} u_1, u_2 \text{ из (3.2), а также} \\ u_0 := (1, y(xy)^{k-2} + c(xy)^{k-1}); \end{cases} \tag{3.42}$$

— степени 2 : v_2, v_3, v_4 из (3.3);

— степени 3 :
$$w_0 := (0,1),\ w_1 := (0,y); \tag{3.43}$$

— степени 4 : z из (3.5).

Предложение 3.16. *Предположим, что k нечётно и $d=0$. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_3 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_0, u_1, u_2, v_2, v_3, v_4, w_0, w_1, z\} \tag{3.44}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения* (3.7), (3.9), (3.11), (3.16), (3.23), (3.26), *а также следующие соотношения*:

$$\begin{aligned}
&p_1u_0 = p_3u_1,\ p_3u_0 = p_1^{k-2}u_2,\\
&p_2u_1 = (p_3 + cp_4)u_0,\ p_1u_1 = 0;\\
&u_0u_2 = p_4u_1^2 = p_4u_0u_1 = 0,\\
&p_1v_2 = p_2v_4 = 0,\ p_jv_3 = 0 \ \ \text{для}\ \ 1 \leqslant j \leqslant 4;\\
&u_0v_3 = p_3w_0 = p_1^{k-1}w_1,\ p_2w_1 = p_4w_0,\\
&p_3w_1 = p_4w_1 = 0,\\
&u_1u_0^2 = cu_0v_2 + cp_2w_0,\ u_0u_1^2 = u_1^3 = 0,\\
&u_0v_4 = u_1v_3 = p_1w_0,\ u_2v_4 = p_1^2w_1,\\
&u_1v_2 = (p_1^{k-1} + cp_2)w_1,\\
&u_1v_4 = u_2v_2 = u_2v_3 = 0,\\
&u_1w_1 = (p_3 + cp_4)z,\ u_1w_0 = cu_0w_1 + cp_2z + p_1^{k-1}z;\\
&v_2w_0 = u_0^2w_1,\ v_3w_0 = p_1^{k-2}u_2z,\\
&v_4w_0 = p_3u_1z,\ v_3w_1 = p_4u_1z,\ v_4w_1 = u_2z,\ v_2w_1 = 0;\\
&w_0^2 = (1 + c^3p_4)u_0^2z,\\
&w_0w_1 = v_2z,\ w_1^2 = 0.
\end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство приведённых выше соотношений проводится так же, как в доказательстве предложения 3.1. Но нам необходимо знать трансляции тех элементов из (3.44), для которых они не были вычислены ранее. Такие трансляции мы опишем в следующей лемме.

Лемма 3.17. *В качестве трансляций элементов* u_0, w_0 *можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами*:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}^0(u_0) = \big(1\otimes 1, y(xy)^{k-2}\otimes 1 + c(xy)^{k-1}\otimes 1\big),\\
&\mathrm{T}^1(u_0) = \begin{pmatrix} 1\otimes 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где

$$(\mathrm{T}^1(u_0))_{12} = \sum_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes (xy)^{k-2-i} + cy(xy)^{k-2} \otimes (xy)^{k-1} + c^2(xy)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_0))_{22} = \sum_{i=0}^{k-2}(xy)^i \otimes y(xy)^{k-2-i} + \sum_{i=1}^{k-2}(yx)^i \otimes y(xy)^{k-2-i} + y(xy)^{k-2} \otimes 1 + c\sum_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes y(xy)^{k-2-i} + c(xy)^{k-1} \otimes 1;$$

$$\mathrm{T}^0(w_0) = \big(0, 1 \otimes 1\big), \quad \mathrm{T}^1(w_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \otimes 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(w_0))_{13} = \sum_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes x(yx)^{k-2-i} + c(yx)^{k-2} \otimes (xy)^k,$$

$$(\mathrm{T}^1(w_0))_{23} = \sum_{i=0}^{k-1}(xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-2}(xy)^i \otimes (xy)^{k-1-i} + \sum_{i=1}^{k-1}(yx)^i \otimes (yx)^{k-1-i} + cy(xy)^{k-2} \otimes y(xy)^{k-1};$$

$$\mathrm{T}^2(w_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \otimes 1 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^2(w_0))_{13} = c(xy)^k \otimes (xy)^{k-2},$$

$$(\mathrm{T}^2(w_0))_{14} = (yx)^{k-1} \otimes x(yx)^{k-2} + x(yx)^{k-2} \otimes (xy)^{k-1} + x(yx)^{k-1} \otimes (xy)^{k-2} + cx(yx)^{k-1} \otimes x(yx)^{k-2},$$

$$(\mathrm{T}^2(w_0))_{23} = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \sum_{i=0}^{k-2} y(xy)^i \otimes y(xy)^{k-2-i} + cx \otimes x + cy(xy)^{k-1} \otimes 1 + c^2y(xy)^{k-1} \otimes x,$$

$$(\mathrm{T}^2(w_0)))_{24} = \sum_{i=0}^{k-1}(xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i} + x \otimes y(xy)^{k-2}$$

$$+ (yx)^{k-1} \otimes 1 + cy(xy)^{k-2} \otimes y(xy)^{k-1};$$

$$\mathrm{T}^3(w_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1\otimes 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^3(w_0))_{13} = c^2(yx)^{k-1} \otimes x(yx)^{k-1} + c^3 x(yx)^{k-1} \otimes x(yx)^{k-1},$$
$$(\mathrm{T}^3(w_0))_{23} = 1 \otimes 1 + c^2 y(xy)^{k-1} \otimes 1 + c^3(xy)^k \otimes 1,$$
$$\begin{aligned}(\mathrm{T}^3(w_0))_{24} = {} & \sum_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes (xy)^{k-2-i} + c(yx)^{k-1} \otimes y(xy)^{k-2} \\ & + cy(xy)^{k-2} \otimes (xy)^{k-1} + c^2 x(yx)^{k-1} \otimes y(xy)^{k-2} \\ & + c^2(yx)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1}.\end{aligned}$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3.3.

Теперь доказательство предложения 3.16 завершается с помощью прямых вычислений, и эту проверку мы предоставляем проделать читателю. □

Замечание 3.18. Заметим, что формулы для трансляций элемента w_1 получаются из соответствующих трансляций элемента $\widetilde{w}$ (см. лемму 3.3) при $d = 0$. Напомним также, что формулы для трансляций элементов v_2, v_3, v_4, описанные в этой же лемме, остаются справедливыми и при $d = 0$.

Предложение 3.19. *Для любого* $\ell \in \mathbb{N}$

$$u_0^\ell = \big(1, \mathrm{O}\,\big) \in \mathrm{HH}^\ell(R), \quad u_0^\ell v_2 = \big(y, \mathrm{O}\,\big) \in \mathrm{HH}^{\ell+2}(R), \tag{3.45}$$

$$u_0^\ell w_0 = \big(0, 1, \mathrm{O}\,\big) \in \mathrm{HH}^{\ell+3}(R), \quad u_0^\ell w_1 = \big(0, y, \mathrm{O}\,\big) \in \mathrm{HH}^{\ell+3}(R). \tag{3.46}$$

Замечание 3.20. Ввиду данного в [2, лемма 4.11] описания базисов для групп $\mathrm{H}^{2\ell}(\mathcal{X}^\bullet)$ (при $\ell \geqslant 4$) элементы

$$\big(1, \mathrm{O}_{r+1}\,\big), \big(y, \mathrm{O}_{r+1}\,\big), \big(0, 1, \mathrm{O}_r\,\big), \big(0, y, \mathrm{O}_r\,\big) \tag{3.47}$$

(для подходящего r) включаются в базис образа $\mathrm{H}^\ell(\mathcal{X}^\bullet)$ в группе $\mathrm{HH}^\ell(R)$. Кроме того, остальные базисные элементы указанного образа выражаются через эти элементы:

$$\big(x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_{r+1}\,\big) = p_2\big(1, \mathrm{O}_{r+1}\,\big),\ \big((xy)^k, \mathrm{O}_{r+1}\,\big) = p_4\big(1, \mathrm{O}_{r+1}\,\big),$$
$$\big(0, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_r\,\big) = p_2\big(0, 1, \mathrm{O}_r\,\big),\ \big(0, (xy)^k, \mathrm{O}_r\,\big) = p_4\big(0, 1, \mathrm{O}_r\,\big).$$

Доказательство предложения 3.19**.** База индукции для всех указанных элементов проверяется непосредственно (с учетом леммы 3.17).

1) Далее, в предположении, что $u_0^\ell = \big(1, \mathrm{O}\,\big)$ ($\ell \geqslant 2$), находим следующие трансляции этого элемента:

$$\mathrm{T}^0(u_0^\ell) = \big(1 \otimes 1, \mathrm{O}\,\big),$$
$$\mathrm{T}^1(u_0^\ell) = \begin{pmatrix} 1 \otimes 1 & \sum\limits_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes x(yx)^{k-2-i} & \mathrm{O} \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1} (xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i} + c^3 (xy)^{k-1} \otimes (xy)^k & \mathrm{O} \end{pmatrix},$$

Следовательно,

$$u_0^{\ell+1} = \mu \mathrm{T}^0(u_0)\mathrm{T}^1(u_0^\ell) = \big(1, \mathrm{O}\,\big).$$

2) В предположении, что $u_0^\ell v_2 = \big(y, \mathrm{O}\,\big)$, находим следующие трансляции:

$$\mathrm{T}^0(u_0^\ell v_2) = \big(y \otimes 1, \mathrm{O}\,\big),$$
$$\mathrm{T}^1(u_0^\ell v_2) = \begin{pmatrix} y \otimes 1 & \sum\limits_{i=1}^{k-1} (yx)^i \otimes x(yx)^{k-1-i} + c^3 x(yx)^{k-1} \otimes (xy)^k & \mathrm{O} \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1} y(xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i} & \mathrm{O} \end{pmatrix},$$

Тогда

$$u_0^{\ell+1} v_2 = \mu \mathrm{T}^0(u_0)\mathrm{T}^1(v_1^\ell v_2) = \big(y, \mathrm{O}\,\big).$$

3) При условии, что $u_0^\ell w_0 = \big(0, 1, \mathrm{O}\,\big)$, находим, что

$$\mathrm{T}^0(u_0^\ell w_0) = \big(0, 1 \otimes 1, \mathrm{O}\,\big),$$
$$\mathrm{T}^1(u_0^\ell w_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \otimes 1 & \sum\limits_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes x(yx)^{k-2-i} & \mathrm{O} \\ 0 & 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1} (xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i} & \mathrm{O} \end{pmatrix}.$$

Тогда получаем

$$u_0^{\ell+1} w_0 = \mu \mathrm{T}^0(u_0)\mathrm{T}^1(u_0^\ell w_0) = \big(0, 1, \mathrm{O}\,\big).$$

4) В предположении, что $u_0^\ell w_1 = \big(0, y, \mathrm{O}\,\big)$ ($\ell \in \mathbb{N}$), находим следующие трансляции:

$$\mathrm{T}^0(u_0^\ell w_1) = \big(0, y\otimes 1, \mathrm{O}\,\big),$$

$$\mathrm{T}^1(u_0^\ell w_1) = \begin{pmatrix} 0 & y\otimes 1 & \sum\limits_{i=1}^{k-1}(yx)^i\otimes x(yx)^{k-1-i} & \mathrm{O} \\ 0 & 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1} y(xy)^i\otimes (yx)^{k-1-i} & \mathrm{O} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$u_0^{\ell+1}w_1 = \mu\mathrm{T}^0(u_0)\mathrm{T}^1(u_0^\ell w_1) = \big(0, y, \mathrm{O}\,\big).$$

$\square$

Предложение 3.21. *Предположим, что k нечётно и $d=0$. Множество $\mathcal{Y}_3$, указанное в* (3.44)*, порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_3\cup\{1\}$. Сначала докажем, что $\bigcup\limits_{i=0}^{3}\mathrm{HH}^i(R)\subset\mathcal{H}$.

Ясно, что $\mathrm{HH}^0(R)\subset\mathcal{H}$ (см. доказательство предложения 3.7). Далее, для базисных элементов из $\mathrm{HH}^1(R)$, описанных в следствии 2.8, пункт (а), справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\big(y(xy)^i, 0\big) = p_1^{i-1}u_2 \ \text{ для } 1\leqslant i\leqslant k-1,\\
&\big(x(yx)^{k-1}, 0\big) = p_2u_0,\ \big((xy)^k, 0\big) = p_4u_0,\\
&\big(0, y(xy)^{k-1}\big) = (p_3+cp_4)u_1,\ \big(0, (xy)^k\big) = p_4u_1,
\end{aligned}$$

и потому $\mathrm{HH}^1(R)\subset\mathcal{H}$.

Далее, для базисных элементов из $\mathrm{HH}^2(R)$, описанных в следствии 2.8, пункт (б), справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\big(0, y(xy)^i + c(xy)^{i+1}\big) = p_1^i v_4 \ \text{ для } \ 0\leqslant i\leqslant k-3,\\
&\big(1, 0\big) = u_0^2,\ \big(x(yx)^{k-1}, 0\big) = p_2u_0^2,\ \big((xy)^k, 0\big) = p_4u_0^2,\\
&\big(0, 1\big) = u_1^2,\ \big(0, y(xy)^{k-2}\big) = u_0u_1 + cv_2,\\
&\big(0, (xy)^{k-1}\big) = c^{-1}(p_1^{k-2}v_4 + u_0u_1) + v_2.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathrm{HH}^2(R)\subset\mathcal{H}$.

Для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^3(R)$, описанных в следствии 2.8, пункт (в), получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\big(0, y(xy)^i\big) = p_1^i\widetilde{w} \ \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&\big(1,0\big) = u_0^3,\ \big(y,0\big) = u_0v_2,\\
&\big(x(yx)^{k-1},0\big) = p_2u_0^3,\ \big((xy)^k,0\big) = p_4u_0^3,\\
&\big(0, xy+yx\big) = u_1v_3,\ \big(0, x(yx)^{k-1}\big) = p_2w_0,\\
&\big(0,(xy)^k\big) = p_2w_1,
\end{aligned}$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$.

Теперь индукцией по n докажем, что $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$. Считаем, что $n \geqslant 4$. Пусть $f = (f_1, f_2) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$ – коцикл, представляющий элемент из $\mathrm{HH}^n(R)$, где $f_1 \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X_n, R)$, $f_2 \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n-4}, R)$. Но ввиду предложения 3.19 получаем, что (f_1, O) лежит в $\mathcal{H}$. Наконец, по индукционному предположению $f_2 \in \mathcal{H}$, и тогда $(\mathrm{O}_2, f_2) = z \cdot f_2$ также лежит в $\mathcal{H}$. □

Пусть $\mathcal{A}_3 = K[\mathcal{X}_3]/I_3$ – градуированная алгебра, определённая в разделе 1, где $\mathcal{X}_3$ из (1.31), а I_3 – соответствующий идеал соотношений. Ввиду предложений 3.16 и 3.21 существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_3 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_3$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_3$ (см. (3.44)). Пусть $\mathcal{A}_3 = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_3^m$ – разложение алгебры $\mathcal{A}_3$ на однородные прямые слагаемые. Теперь пункт (3) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 3.22. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_3^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Сначала отметим следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.23. *В алгебре* $\mathcal{A}_3$ *выполняются следующие соотношения*:

$$p_1^2w_0 = p_1u_0w_0 = p_1u_0w_1 = p_4u_0^2u_1 = p_3u_0^2 = p_1u_0^2 = p_1^2u_0 = 0.$$

Все соотношения, приведённые в лемме, следуют непосредственно из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_3$.

Доказательство предложения 3.22**.** На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_3]$ введём лексикографический порядок такой, что

$$v_3 > v_4 > w_0 > v_2 > w_1 > u_1 > u_2 > u_0 > z > p_2 > p_3 > p_4 > p_1.$$

Любой ненулевой моном из $\mathcal{A}_3$ представим в виде

$$f = p_1^i p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4} u_0^{\ell} u_1^{\beta_1} u_2^{\beta_2} v_2^{\gamma_2} v_3^{\gamma_3} v_4^{\gamma_4} w_0^{\varepsilon_0} w_1^{\varepsilon_1} z^s; \tag{3.48}$$

здесь ввиду определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_3$ имеем:

$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \varepsilon_0, \varepsilon_1 \in \{0, 1\}$, $i, \ell, \beta_1, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i \leqslant k-1$, $\beta_1 \leqslant 2$.

Аналогично доказательству предложения 3.8 мы введём в рассмотрение следующий список элементарных шагов редукции, а затем исследуем нормальные формы мономов (относительно таких шагов редукции):

$$\begin{array}{ll}
p_3u_1 \mapsto p_1u_0, & p_2u_1 \mapsto (p_3 + cp_4)u_0, \\
p_1^{k-2}u_2 \mapsto p_3u_0, & p_2v_2 \mapsto p_4u_0^2, \\
u_1v_3 \mapsto u_0v_4 \mapsto p_1w_0, & u_0v_3 \mapsto p_3w_0 \mapsto p_1^{k-1}w_1, \\
p_2w_0 \mapsto u_0v_2 + c^{-1}u_0^2u_1, & p_4w_0 \mapsto p_2w_1, \\
u_2v_4 \mapsto p_1^2w_1, & u_1v_2 \mapsto (p_1^{k-1} + cp_2)w_1, \\
u_1w_1 \mapsto (p_3 + cp_4)z, & u_1w_0 \mapsto cu_0w_1 + (cp_2 + p_1^{k-1})z, \\
v_4w_0 \mapsto p_3u_1z, & v_4^2 \mapsto p_1^2z, \\
v_3w_1 \mapsto p_4u_1z, & v_4w_1 \mapsto u_2z, \\
v_2w_0 \mapsto u_0^2w_1, & v_3w_0 \mapsto p_1^{k-2}u_2z, \\
w_0^2 \mapsto (1 + c^3p_4)u_0^2z, & w_0w_1 \mapsto v_2z.
\end{array}$$

Пусть $q_i = \dim_K \mathcal{A}_3^i$. Через $\widetilde{q}_i$ обозначим число мономов из $\mathcal{A}_3^i$, представленных в нормальной форме; ясно, что $\widetilde{q}_i \geqslant q_i$. Поскольку имеется эпиморфизм $\mathcal{A}_3^i \to \mathrm{HH}^i(R)$, то $q_i \geqslant \dim_K \mathrm{HH}^i(R)$, и, таким образом, достаточно доказать, что

$$\widetilde{q}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{3.49}$$

Теперь перебирая различные возможности (ср. доказательство предложения 3.8), мы получаем следующий список мономов, имеющих нормальную форму (где $a \geqslant 0$).

Мономы степени $4a$:

$$\{w_0u_0^{4(a-m)-3}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{v_2u_0^{4(a-m)-2}z^m\}_{m=0}^{a-1},$$
$$\{w_1u_0^{4(a-m)-3}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{p_2w_1u_0^{4(a-m)-3}z^m\}_{m=0}^{a-1},$$
$$\{u_1u_0^{4(a-m)-1}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{u_0^{4(a-m)}z^m\}_{m=0}^{a-1},$$
$$\{p_2u_0^{4(a-m)}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{p_4u_0^{4(a-m)}z^m\}_{m=0}^{a-1},$$
$$\{p_1^iz^a\}_{i=0}^{k-1}, p_2z^a, p_3z^a, p_4z^a$$

(их количество равно $8a+k+3$).

Мономы степени $4a+1$:

$$\{w_0u_0^{4(a-m)-2}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{v_2u_0^{4(a-m)-1}z^m\}_{m=0}^{a-1},$$
$$\{w_1u_0^{4(a-m)-2}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{p_2w_1u_0^{4(a-m)-2}z^m\}_{m=0}^{a-1},$$
$$\{u_1u_0^{4(a-m)}z^m\}_{m=0}^{a}, \{u_0^{4(a-m)+1}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{p_2u_0^{4(a-m)+1}z^m\}_{m=0}^{a}, \{p_4u_0^{4(a-m)+1}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{p_1^iu_2z^a\}_{i=0}^{k-3}, p_4u_1z^a, p_1u_0z^a, p_3u_0z^a$$

(их количество равно $8a+k+5$).

Мономы степени $4a+2$:

$$\{w_0u_0^{4(a-m)-1}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{v_2u_0^{4(a-m)}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{w_1u_0^{4(a-m)-1}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{p_2w_1u_0^{4(a-m)-1}z^m\}_{m=0}^{a-1},$$
$$\{u_1u_0^{4(a-m)+1}z^m\}_{m=0}^{a}, \{u_0^{4(a-m)+2}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{p_2u_0^{4(a-m)+2}z^m\}_{m=0}^{a}, \{p_4u_0^{4(a-m)+2}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{p_1^iv_4z^a\}_{i=0}^{k-2}, u_1^2z^a, v_3z^a$$

(их количество равно $8a+k+6$).

Мономы степени $4a+3$:

$$\{w_0u_0^{4(a-m)}z^m\}_{m=0}^{a}, \{v_2u_0^{4(a-m)+1}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{w_1u_0^{4(a-m)}z^m\}_{m=0}^{a}, \{p_2w_1u_0^{4(a-m)}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{u_1u_0^{4(a-m)+2}z^m\}_{m=0}^{a}, \{u_0^{4(a-m)+3}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{p_2u_0^{4(a-m)+3}z^m\}_{m=0}^{a}, \{p_4u_0^{4(a-m)+3}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{p_1^iw_1z^a\}_{i=1}^{k-1}, p_1w_0z^a$$

(их количество равно $8a+k+8$).

С учётом следствия 2.11 отсюда вытекает равенство (3.49). □

Случай 4. Теперь предположим, что k чётно, $k>2$ и $d=0$. Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

— степени 0 : p_1, p_2, p_3, p_4 из (3.1);

— степени 1 : $\begin{cases} u_0 \text{ из } (3.42), u_2' \text{ из } (3.38), \quad \text{а также} \\ u_1' := (0, 1+cx); \end{cases}$

— степени 2 : v_2, v_3, v_4 из (3.3);

— степени 3 : w_0, w_1 из (3.43);

— степени 4 : z из (3.5).

Предложение 3.24. *Предположим, что k чётно, $k>2$ и $d=0$. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_4 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_0, u_1', u_2', v_2, v_3, v_4, w_0, w_1, z\} \tag{3.50}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения* (3.7), (3.16), (3.23), (3.26)*, а также следующие соотношения*:

$$\begin{aligned}
&p_3u_0 = p_2u_1',\ p_3u_0 = p_1^{k-1}u_2',\ p_1u_1' = cp_1u_2'\\
&p_3u_1' = p_1u_0,\ p_2u_2' = p_4u_0,\ p_3u_2' = p_4u_2' = 0;\\
&u_1'u_2' = c^2\theta_{k-1}p_3v_3,\\
&p_1v_2 = p_3v_3 = p_2v_4 = p_4(u_1')^2,\\
&u_0u_1' = 0,\ p_2v_2 = p_4u_0^2,\ (u_2')^2 = c\theta_{k-1}p_3v_3,\\
&p_1^{k-1}v_4 = cp_3v_3,\\
&p_1v_3 = p_2v_3 = p_4v_3 = 0,\\
&u_1'v_4 = u_2'v_3 = p_1w_1,\ u_0v_4 = p_1w_0,\\
&u_0v_3 = p_1^{k-2}u_2'v_3 = p_3w_0 = u_1'v_2,\ (u_1')^3 = 0,\\
&u_0v_2 = u_0^2u_2' + p_2w_0,\ p_2w_1 = p_4w_0 = u_2'v_2,\\
&u_2'v_4 = u_1'v_3 = p_3w_1 = p_4w_1 = 0,\\
&u_2'w_0 = u_0w_1,\ u_1'w_0 = u_1'w_1 = u_2'w_1 = 0,\\
&v_2w_0 = u_0^2w_1 + p_2u_0z,\ v_3w_0 = p_1^{k-1}u_2'z,\\
&v_2w_1 = p_4u_0z,\ v_4w_0 = (cp_1^{k-1}u_2' + p_1u_0)z,
\end{aligned}$$

$$v_4 w_1 = p_1 u_2' z,\ v_3 w_1 = 0;$$
$$w_0^2 = (1 + c^3 p_4) u_0^2 z,\ w_0 w_1 = u_0 u_2' z,\ w_1^2 = c\theta_{k-1} p_3 v_3 z.$$

Доказательство. Доказательство приведённых выше соотношений проводится так же, как в доказательстве предложения 3.1. Но нам необходимо знать трансляции элемента u_1' из $\mathcal{Y}_4$; для остальных они были вычислены ранее.

Лемма 3.25. *В качестве трансляций элемента u_1' можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами*:

$$\mathrm{T}^0(u_1') = \big(0, 1 \otimes 1 + cx \otimes 1\big), \quad \mathrm{T}^1(u_1') = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} (\mathrm{T}^1(u_1'))_{12} &= \sum_{i=0}^{k-2} y(xy)^i \otimes (xy)^{k-2-i} + c\sum_{i=0}^{k-2} (i+1)(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i} \\ &\quad + c\sum_{i=1}^{k-1} (xy)^i \otimes (xy)^{k-1-i} + c^2 \sum_{i=1}^{k-1} ix(yx)^{i-1} \otimes (xy)^{k-i}, \\ (\mathrm{T}^1(u_1'))_{22} &= 1 \otimes 1 + cx \otimes 1 + c\sum_{i=0}^{k-2} (i+1) y(xy)^i \otimes y(xy)^{k-2-i} \\ &\quad + c^2 \sum_{i=1}^{k-1} i(xy)^i \otimes y(xy)^{k-1-i}. \end{aligned}$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3.3.

Теперь доказательство предложения 3.24 завершается с помощью прямых вычислений, и эту проверку мы предоставляем проделать читателю. □

Замечание 3.26. Заметим, что формулы для трансляций элемента w_1 получаются из соответствующих трансляций элемента w, вычисленных ранее (см. лемму 3.11) при $d \neq 0$ (и чётном k). Напомним также, что формулы для трансляций элементов v_2, v_3, v_4, описанные в леммах 3.3 и 3.11, остаются справедливыми и для чётного k (и $d = 0$).

Предложение 3.27. *Для любого $\ell \in \mathbb{N}$*

$$u_0^\ell = \big(1, \mathrm{O}\big) \in \mathrm{HH}^\ell(R), \quad u_0^\ell v_2 = \big(y, \mathrm{O}\big) \in \mathrm{HH}^{\ell+2}(R),$$
$$u_0^\ell w_0 = \big(0, 1, \mathrm{O}\big) \in \mathrm{HH}^{\ell+3}(R), \quad u_0^\ell w_1 + p_2 u_0^{\ell-1} z = \big(0, y, \mathrm{O}\big) \in \mathrm{HH}^{\ell+3}(R).$$

Доказательство этого предложения полностью аналогично доказательству предложения 3.19.

Предложение 3.28. *Предположим, что k чётно и $d = 0$. Множество $\mathcal{Y}_4$, указанное в* (3.50), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_4 \cup \{1\}$. Сначала докажем, что $\bigcup\limits_{i=0}^{3} \mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}$.

Ясно, что $\mathrm{HH}^0(R) \subset \mathcal{H}$ (см. доказательство предложения 3.7). Далее, для базисных элементов из $\mathrm{HH}^1(R)$, описанных в следствии 2.10, пункт (а), справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\big(y(xy)^i, 0\big) = p_1^i u_2' \ \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&\big(x(yx)^{k-1}, 0\big) = p_2 u_0,\ \big((xy)^k, 0\big) = p_4 u_0,\\
&\big(0, y(xy)^{k-1}\big) = (p_3 + cp_4)u_1',\ \big(0, (xy)^k\big) = p_4 u_1',
\end{aligned}$$

и потому $\mathrm{HH}^1(R) \subset \mathcal{H}$.

Далее, для базисных элементов из $\mathrm{HH}^2(R)$, описанных в следствии 2.10, пункт (б), справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\big(0, y(xy)^i + c(xy)^{i+1}\big) = p_1^i v_4 \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-3,\\
&\big(1, 0\big) = u_0^2,\ \big(x(yx)^{k-1}, 0\big) = p_2 u_0^2,\\
&\big(0, 1\big) = (u_1')^2 + c^3(1 + \theta_{k-1})p_3 v_3,\ \big((xy)^k, 0\big) = p_4 u_0^2,\\
&\big(0, y(xy)^{k-2}\big) = p_1^{k-1} v_4 + c(u_0 u_2' + v_2),\\
&\big(0, (xy)^{k-1}\big) = u_0 u_2' + v_2.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$.

Для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^3(R)$, описанных в следствии 2.10, пункт (в), получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\big(0, y(xy)^i\big) = p_1^i w_1 \ \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&\big(1, 0\big) = u_0^3,\ \big(y, 0\big) = u_0 v_2,\\
&\big(x(yx)^{k-1}, 0\big) = p_2 u_0^3,\ \big((xy)^k, 0\big) = p_4 u_0^3,\\
&\big(0, xy + yx\big) = u_0 v_4,\ \big(0, x(yx)^{k-1}\big) = p_2 w_0,\\
&\big(0, (xy)^k\big) = p_4 w_0,
\end{aligned}$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$.

Теперь аналогично доказательству предложения 3.21 индукцией по n доказывается, что $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$. □

Пусть $\mathcal{A}_4 = K[\mathcal{X}_4]/I_4$ – градуированная алгебра, определённая в разделе 1, где $\mathcal{X}_4$ из (1.32), а I_4 – соответствующий идеал соотношений. Ввиду предложений 3.24 и 3.28 существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_4 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_4$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_4$. Пусть $\mathcal{A}_4 = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_4^m$ – разложение алгебры $\mathcal{A}_4$ на однородные прямые слагаемые. Теперь пункт (4) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 3.29. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_4^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Сначала отметим следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.30. *В алгебре* $\mathcal{A}_4$ *выполняются следующие соотношения*:

$$p_1^2 u_0 = p_1 u_0^2 = u_0^2 v_3 = u_0^2 v_4 = p_3 u_0^2 = (u_2')^3 = p_1 u_0 v_4 = 0.$$

Все соотношения, приведённые в лемме, следуют непосредственно из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_4$.

Доказательство предложения 3.29. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_4]$ введём лексикографический порядок такой, что

$$w_0 > w_1 > u_1' > u_2' > v_2 > v_3 > v_4 > u_0 > z > p_2 > p_3 > p_4 > p_1.$$

Любой ненулевой моном из $\mathcal{A}_4$ представи́м в виде

$$f = p_1^i p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4} u_0^{\ell} (u_1')^{\beta_1} (u_2')^{\beta_2} v_2^{\gamma_2} v_3^{\gamma_3} v_4^{\gamma_4} w_0^{\varepsilon_0} w_1^{\varepsilon_1} z^s; \tag{3.51}$$

здесь ввиду определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_4$ (см. также лемму 3.30) имеем:

$$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_4, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \varepsilon_0, \varepsilon_1 \in \{0, 1\},$$
$$i, \ell, \beta_1, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i \leqslant k-1, \beta_1 \leqslant 2,\ \beta_2 \leqslant 2.$$

Введём в рассмотрение следующий список элементарных шагов редукции, а затем опишем нормальные формы мономов (относительно таких шагов редукции):

$$
\begin{array}{ll}
p_2u_1' \mapsto p_1^{k-1}u_2' \mapsto p_3u_0, & p_1u_1' \mapsto cp_1u_2', \\
p_3u_1' \mapsto p_1u_0, & p_2u_2' \mapsto p_4u_0, \\
p_4(u_1')^2 \mapsto p_1v_2 \mapsto p_3v_3 \mapsto p_2v_4, & p_2v_4 \mapsto c^{-1}p_1^{k-1}v_4, \\
u_1'u_2' \mapsto c^2\theta_{k-1}p_3v_3 \text{ (если } c\theta_{k-1} \neq 0), & (u_2')^2 \mapsto c\theta_{k-1}p_3v_3 \text{ (если } c\theta_{k-1} \neq 0), \\
p_2v_2 \mapsto p_4u_0^2, & p_1w_1 \mapsto u_1'v_4 \mapsto u_2'v_3, \\
p_3w_0 \mapsto u_1'v_2 \mapsto p_1^{k-2}u_2'v_3 \mapsto u_0v_3, & p_2w_0 \mapsto u_0^2u_2' + u_0v_2, \\
p_4w_0 \mapsto p_2w_1 \mapsto u_2'v_2, & p_1w_0 \mapsto u_0v_4, \\
u_2'w_0 \mapsto u_0w_1, & v_4^2 \mapsto p_1^2z, \\
v_4w_1 \mapsto p_1u_2'z, & v_3w_0 \mapsto p_1^{k-1}u_2'z, \\
v_2w_0 \mapsto u_0^2w_1 + p_2u_0z, & v_4w_0 \mapsto (cp_1^{k-1}u_2' + p_1u_0)z, \\
v_2w_1 \mapsto p_4u_0z, & w_1^2 \mapsto c\theta_{k-1}p_3v_3z \text{ (если } c\theta_{k-1} \neq 0), \\
w_0^2 \mapsto (1 + c^3p_4)u_0^2z, & w_0w_1 \mapsto u_0u_2'z.
\end{array}
$$

Пусть $q_i = \dim_K \mathcal{A}_4^i$. Через $\widetilde{q}_i$ обозначим число мономов из $\mathcal{A}_4^i$, представленных в нормальной форме; ясно, что $\widetilde{q}_i \geqslant q_i$, и, таким образом, достаточно доказать, что

$$\widetilde{q}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{3.52}$$

Теперь перебирая различные возможности (ср. доказательство предложения 3.8), мы получаем следующий список мономов, имеющих нормальную форму (где $a \geqslant 0$).

Мономы степени $4a$:

$$
\begin{gathered}
\{w_0u_0^{4(a-m)-3}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{v_2u_0^{4(a-m)-2}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \\
\{w_1u_0^{4(a-m)-3}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{u_2'v_2u_0^{4(a-m)-3}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \\
\{u_2'u_0^{4(a-m)-1}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{u_0^{4(a-m)}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \\
\{p_2u_0^{4(a-m)}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{p_4u_0^{4(a-m)}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \\
\{p_1^iz^a\}_{i=0}^{k-1}, p_2z^a, p_3z^a, p_4z^a
\end{gathered}
$$

(их количество равно $8a + k + 3$).

Мономы степени $4a+1$:

$$\{w_0u_0^{4(a-m)-2}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{v_2u_0^{4(a-m)-1}z^m\}_{m=0}^{a-1},$$
$$\{w_1u_0^{4(a-m)-2}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{u_2'v_2u_0^{4(a-m)-2}z^m\}_{m=0}^{a-1},$$
$$\{u_2'u_0^{4(a-m)}z^m\}_{m=0}^{a}, \{u_0^{4(a-m)+1}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{p_2u_0^{4(a-m)+1}z^m\}_{m=0}^{a}, \{p_4u_0^{4(a-m)+1}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{p_1^iu_2'z^a\}_{i=1}^{k-2}, u_1'z^a, p_4u_1'z^a, p_1u_0z^a, p_3u_0z^a$$

(их количество равно $8a+k+6$).

Мономы степени $4a+2$:

$$\{w_0u_0^{4(a-m)-1}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{v_2u_0^{4(a-m)}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{w_1u_0^{4(a-m)-1}z^m\}_{m=0}^{a-1}, \{u_2'v_2u_0^{4(a-m)-1}z^m\}_{m=0}^{a-1},$$
$$\{u_2'u_0^{4(a-m)+1}z^m\}_{m=0}^{a}, \{u_0^{4(a-m)+2}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{p_2u_0^{4(a-m)+2}z^m\}_{m=0}^{a}, \{p_4u_0^{4(a-m)+2}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{p_1^iv_4z^a\}_{i=0}^{k-1}, (u_1')^2z^a, v_3z^a$$

(их количество равно $8a+k+7$).

Мономы степени $4a+3$:

$$\{w_0u_0^{4(a-m)}z^m\}_{m=0}^{a}, \{v_2u_0^{4(a-m)+1}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{w_1u_0^{4(a-m)}z^m\}_{m=0}^{a}, \{u_2'v_2u_0^{4(a-m)}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{u_2'u_0^{4(a-m)+2}z^m\}_{m=0}^{a}, \{u_0^{4(a-m)+3}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{p_2u_0^{4(a-m)+3}z^m\}_{m=0}^{a}, \{p_4u_0^{4(a-m)+3}z^m\}_{m=0}^{a},$$
$$\{p_1^iu_2'v_3z^a\}_{i=0}^{k-3}, v_3u_0z^a, v_4u_0z^a$$

(их количество равно $8a+k+8$).

С учётом следствия 2.11 отсюда вытекает равенство (3.52). □

Случай 5. Предположим, что $k=2$ и $d\neq 0$.
Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

$$p_1, p_2, p_3, p_4, u_1', u_2', u_3, v_1, v_2, v_3, v_4, w, z \tag{3.53}$$

определённые теми же формулами, что и для случая 2 (при $k=2$).

Предложение 3.31. *Пусть* $\mathcal{Y}_5$ *– множество, состоящее из элементов* (3.53). *Для элементов этого множества в алгебре* $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются следующие соотношения*:

$$\begin{gathered}
p_i p_j = 0 \quad \textit{для всех}\, i, j \in \{1,2,3,4\};\\
p_1 u_1' = (dp_2 + cp_1)u_2',\ p_2 u_1' = p_1 u_2',\\
p_j u_3 = 0 \quad \textit{для}\ \ 1 \leqslant j \leqslant 4,\ p_3 u_2' = p_4 u_2' = 0,\\
p_1 v_4 = dp_4 v_1 + cp_3 v_3,\ u_3^2 = 0,\\
p_3 v_1 = p_1 v_2 = p_3 v_3 = p_2 v_4 = u_1' u_3 = p_4 (u_1')^2,\\
p_2 v_2 = p_4 v_1 = u_2' u_3,\ p_3 (u_1')^2 = 0,\\
u_1' u_2' = cdp_4 v_1 + c^2 p_3 v_1,\ (u_2')^2 = cp_3 v_1,\\
u_1' v_4 = u_2'(dv_2 + cv_4),\ u_2' v_4 = u_1' v_2 = p_1 w,\\
u_1' v_1 = u_1' v_3,\ p_2 w = u_2' v_2\\
(u_1')^3 = du_2' v_1,\ p_3 w = p_4 w = 0,\\
v_2^2 = v_3^2 = v_4^2 = 0;\ v_i v_j = 0 \quad \textit{при}\, i < j,\\
u_1' w = u_2' w = 0;\\
v_2 w = p_2 u_2' z,\ v_4 w = p_1 u_2' z,\ v_3 w = 0;\\
w^2 = cp_3 v_3 z.
\end{gathered}$$

Доказательство. Доказательство приведённых выше соотношений проводится так же, как в доказательстве предложения 3.1. При этом отметим, что формулы для трансляций элементов из $\mathcal{Y}_5$, вычисленные ранее, остаются справедливыми и в рассматриваемом случае. □

Предложение 3.32. *Предположим, что* $k = 2$ *и* $d \neq 0$. *Множество* $\mathcal{Y}_5$ *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* K*-алгебру.*

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.33. *Для любого* $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$$\begin{gathered}
v_1^{\ell-2}(v_1 w + u_3 z) = (0, \widetilde{y}, \mathrm{O}) \in \mathrm{HH}^{2\ell+1}(R),\\
v_1^{\ell-1} u_3 w = \big(0, (xy)^k, \mathrm{O}\,\big) \in \mathrm{HH}^{2\ell+2}(R).
\end{gathered}$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $v_1 w + u_3 z = (0, \widetilde{y}, \mathrm{O}_2)$. Далее доказательство первого соотношения проводится индукцией по ℓ аналогично доказательству предложения 3.5. При этом надо заметить, что трансляции $\mathrm{T}^i(f)$, $i \in \{1,2\}$, для элемента $f =$

$(0, \widetilde{y}, \mathrm{O})$ можно взять в виде, полученном в доказательстве этого предложения.

Второе соотношение леммы доказывается аналогично предыдущему. $\square$

Доказательство предложения 3.32**.** Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_5 \cup \{1\}$. Сначала докажем, что $\bigcup\limits_{i=0}^{3} \mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}$.

Ясно, что $\mathrm{HH}^0(R) \subset \mathcal{H}$ (см. доказательство предложения 3.7). Далее, для базисных элементов из $\mathrm{HH}^1(R)$, описанных в следствии 2.6, пункт (а), справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\big(yxy, 0\big) = p_1^i u_2',\ \big((xy)^2, 0\big) = p_2 u_2',\\
&\big(0, yxy\big) = (p_3 + cp_4)u_1', \big(0, (xy)^2\big) = p_4 u_1',
\end{aligned}$$

и потому $\mathrm{HH}^1(R) \subset \mathcal{H}$.

Далее, для базисных элементов из $\mathrm{HH}^2(R)$, описанных в следствии 2.6, пункт (б), справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\big(0, 1\big) = (u_1')^{\,2} + c^2 dp_4 v_1 + cdp_3 v_3,\\
&\big((xy)^2, 0\big) = p_4 v_1,\ \big(0, (xy)^2\big) = p_3 v_3.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$.

Для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^3(R)$, описанных в следствии 2.6, пункт (в), получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\big(0, yxy\big) = p_1 w,\\
&\big(dyx, xy + yx\big) = u_1' v_3,\ \big(y, xyx\big) = u_2' v_1,\\
&\big(xyx, 0\big) = u_3 v_1,\ \big(0, (xy)^2\big) = u_2' v_2,
\end{aligned}$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$.

Теперь аналогично доказательству предложения 3.7 индукцией по n доказывается, что $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$. При этом надо учесть, что соотношения (3.32) остаются справедливыми и для чётного k, а вместо соотношений (3.33) надо использовать соотношения из леммы 3.33. $\square$

Пусть $\mathcal{A}_5 = K[\mathcal{X}_5]/I_5$ – градуированная алгебра, определённая в разделе 1, где $\mathcal{X}_5$ – это множество $\mathcal{X}_2$ из (1.28), а I_5 – соответствующий идеал соотношений. Поскольку существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_5 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_5$ в соответствующие образующие из множества $\mathcal{Y}_5$, то пункт (5) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 3.34. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_5^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Сначала отметим следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.35. *В алгебре* $\mathcal{A}_5$ *выполняются следующие соотношения*:

$$\begin{aligned}p_2u_2'v_2 = p_1u_2'v_2 = p_3u_1'v_1 = p_4u_1'v_1 = (u_1')^4 = (u_2')^3\\ = p_4v_1^2 = u_1'v_1^2 = u_2'v_1^2 = 0.\end{aligned}$$

Все соотношения, приведённые в лемме, следуют непосредственно из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_5$.

Доказательство предложения 3.34**.** На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_5]$ введём лексикографический порядок такой, что

$$w > u_1' > u_2' > u_3 > v_4 > v_3 > v_2 > v_1 > z > p_2 > p_3 > p_4 > p_1.$$

Затем рассмотрим следующий список элементарных шагов редукции (относительно таких шагов редукции):

$p_1u_1' \mapsto (dp_2 + cp_1)u_2'$,	$p_2u_1' \mapsto p_1u_2'$,
$u_2'u_3 \mapsto p_2v_2 \mapsto p_4v_1$,	$p_4(u_1')^2 \mapsto p_2v_4 \mapsto p_3v_3 \mapsto p_1v_2 \mapsto p_3v_1$,
$u_1'u_3 \mapsto p_3v_1$,	$p_1v_4 \mapsto dp_4v_1 + cp_3v_3$,
$u_1'u_2' \mapsto c(dp_4 + cp_3)v_1$,	$(u_2')^2 \mapsto cp_3v_1$,
$(u_1')^3 \mapsto du_2'v_1$,	$u_1'v_3 \mapsto u_1'v_1$,
$u_1'v_4 \mapsto u_2'(dv_2 + cv_4)$,	$p_1w \mapsto u_2'v_4 \mapsto u_1'v_2$,
$p_2w \mapsto u_2'v_2$,	$v_2w \mapsto p_2u_2'z$,
$v_4w \mapsto p_1u_2'z$,	$w^2 \mapsto cp_3v_3z$.

После чего аналогично доказательству предложения 3.14 получаем список мономов, имеющих нормальную форму, почти совпадающий с таким список для случая 2: моном $p_1v_2z^a$ заменяется на $p_3v_1z^a$, а моном $u_1'v_3z^a$ – на моном $u_1'v_1z^a$. Это завершает доказательство предложения 3.34. □

Случай 6. Теперь предположим, что $k = 2$ и $d = 0$.
Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

$$p_1, p_2, p_3, p_4, u_0, u_1', u_2', v_2, v_3, v_4, w_0, w_1, z, \tag{3.54}$$

определённые теми же формулами, что и для случая 4 (при $k = 2$).

Предложение 3.36. *Пусть* $\mathcal{Y}_6$ *– множество, состоящее из элементов* (3.54). *Для элементов этого множества алгебре* $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются следующие соотношения*:

$$
\begin{aligned}
&p_i p_j = 0 \quad \text{для всех}\, i, j \in \{1, 2, 3, 4\};\\
&p_1 u_1' = c p_3 u_0,\ p_2 u_1' = p_3 u_0 = p_1 u_2',\\
&p_3 u_1' = p_1 u_0,\ p_2 u_2' = p_4 u_0,\ p_3 u_2' = p_4 u_2' = 0;\\
&p_1 v_2 = p_3 v_3 = p_2 v_4 = c^{-1} p_1 v_4 = c^{-1}(u_2')^2 = c^{-1} u_1' u_2' = p_4 (u_1')^2,\\
&p_2 v_2 = p_4 u_0^2,\ p_3 v_2 = p_4 v_2 = 0,\\
&p_1 v_3 = p_2 v_3 = p_4 v_3 = p_3 v_4 = p_4 v_4 = 0,\ u_0 u_1' = 0;\\
&u_0 v_3 = u_1' v_2 = c^{-1} u_1' v_4 = u_2' v_4 = p_3 w_0 = p_1 w_1,\\
&u_0 v_4 = u_1' v_3 = p_1 w_0,\ (u_1')^3 = u_2' v_3 = 0,\\
&p_2 w_0 = u_0 v_2 + u_0^2 u_2',\\
&p_2 w_1 = p_4 w_0 = u_2' v_2,\ p_3 w_1 = p_4 w_1 = 0;\\
&v_i v_j = 0 \quad \text{для всех} \ \ i, j \in \{2, 3, 4\},\\
&u_2' w_0 = u_0 w_1,\ u_1' w_0 = u_1' w_1 = u_2' w_1 = 0,\\
&v_2 w_0 = u_0^2 w_1 + p_2 u_0 z,\ v_3 w_0 = v_4 w_1 = p_1 u_2' z,\\
&v_2 w_1 = p_4 u_0 z,\ v_4 w_0 = p_1 u_0 z,\ v_3 w_1 = 0,\\
&w_0^2 = (1 + c^3 p_4) u_0^2 z,\ w_0 w_1 = u_0 u_2' z,\ w_1^2 = c p_3 v_3 z.
\end{aligned}
$$

Доказательство приведённых выше соотношений проводится так же, как в доказательстве предложения 3.1 (ср. также предложение 3.24). Но нам потребуется описать трансляции $\mathrm{T}^i(w_0)$ при $i = 2, 3$, которые отличаются от описания для случая 3 (и соответственно для случая 4) (см. лемму 3.17).

Лемма 3.37. *Трансляции* $\mathrm{T}^0(w_0)$ *и* $\mathrm{T}^1(w_0)$ *можно описать формулами из леммы* 3.17. *Кроме того,* $\mathrm{T}^i(w_0)$ *при* $i = 2, 3$ *можно описать с* *помощью следующих матриц*:

$$\mathrm{T}^2(w_0)=\begin{pmatrix}0 & 1\otimes 1 & * & *\\ 0 & 0 & * & *\end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^2(w_0))_{13} &= c(xy)^2\otimes 1+c\cdot 1\otimes (xy)^2,\\
(\mathrm{T}^2(w_0))_{14} &= yx\otimes x+x\otimes xy+xyx\otimes 1\\
&\quad + cxyx\otimes x+c^2(xy)^2\otimes xy,\\
(\mathrm{T}^2(w_0))_{23} &= x\otimes 1+1\otimes x+y\otimes y+cx\otimes x\\
&\quad + cyxy\otimes 1+c^2yxy\otimes x,\\
(\mathrm{T}^2(w_0)))_{24} &=1\otimes yx+xy\otimes 1+x\otimes y+yx\otimes 1+cy\otimes yxy;
\end{aligned}$$

$$\mathrm{T}^3(w_0)=\begin{pmatrix}0 & 1\otimes 1 & * & *\\ 0 & 0 & * & *\end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^3(w_0))_{13} &= c(xy)^2\otimes 1+c\cdot 1\otimes (xy)^2\\
&\quad + c^2yx\otimes xyx+c^3xyx\otimes xyx,\\
(\mathrm{T}^3(w_0))_{14} &= yx\otimes xy+(xy)^2\otimes 1\\
&\quad + cyx\otimes xyx+cxyx\otimes xy,\\
(\mathrm{T}^3(w_0))_{23} &= 1\otimes 1+c^2yxy\otimes 1+c^3(xy)^2\otimes 1,\\
(\mathrm{T}^3(w_0))_{24} &= x\otimes 1+c\cdot 1\otimes yxy+cyxy\otimes 1\\
&\quad + c^2yx\otimes xy+c^2(yx)^2\otimes 1.
\end{aligned}$$

Теперь доказательство предложения 3.36 завершается с помощью прямых вычислений, и эту проверку мы предоставляем проделать читателю.

Предложение 3.38. *Предположим, что* $k=2$ *и* $d=0$. *Множество* $\mathcal{Y}_6$ *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* K*-алгебру.*

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству предложения 3.28, при этом используемые в этом доказательстве формулы из предложения 3.27 остаются справедливыми с одним исключением: $u_0^\ell=\big(1,\mathrm{O}\big)\in\mathrm{HH}^\ell(R)$ лишь при $\ell\geqslant 4$. □

Пусть $\mathcal{A}_6 = K[\mathcal{X}_6]/I_6$ – градуированная алгебра, определённая в разделе 1, где $\mathcal{X}_6$ – это множество $\mathcal{X}_4$ из (1.32), а I_6 – соответствующий идеал соотношений. Поскольку существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_6 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_6$ в соответствующие образующие из множества $\mathcal{Y}_6$, то часть (6) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 3.39. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_6^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Доказательство. Доказательство этого предложения проводится аналогично доказательству предложения 3.29. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_6]$ введём лексикографический порядок такой, что

$$w_0 > w_1 > u_1' > u_2' > v_2 > v_3 > v_4 > u_0 > z > p_2 > p_3 > p_4 > p_1.$$

Затем рассмотрим следующий список элементарных шагов редукции (относительно таких шагов редукции):

$$\begin{array}{ll}
p_2u_1' \mapsto p_1u_2' \mapsto p_3u_0, & p_1u_1' \mapsto cp_3u_0,\\
p_3u_1' \mapsto p_1u_0, & p_2u_2' \mapsto p_4u_0,\\
p_4(u_1')^2 \mapsto p_1v_2 \mapsto p_3v_3 \mapsto p_2v_4 \mapsto c^{-1}p_1v_4, & \\
u_1'u_2' \mapsto (u_2')^2 \mapsto p_1v_4, & p_2v_2 \mapsto p_4u_0^2,\\
u_1'v_2 \mapsto u_2'v_4 \mapsto u_0v_3, & p_3w_0 \mapsto p_1w_1 \mapsto u_0v_3,\\
u_1'v_4 \mapsto cu_0v_3, & p_2w_0 \mapsto u_0^2u_2' + u_0v_2,\\
p_4w_0 \mapsto p_2w_1 \mapsto u_2'v_2, & p_1w_0 \mapsto u_1'v_3 \mapsto u_0v_4,\\
u_2'w_0 \mapsto u_0w_1, & v_3w_0 \mapsto v_4w_1 \mapsto p_1u_2'z,\\
v_2w_0 \mapsto u_0^2w_1 + p_2u_0z, & v_4w_0 \mapsto p_1u_0z,\\
v_2w_1 \mapsto p_4u_0z, & w_1^2 \mapsto cp_3v_3z,\\
w_0^2 \mapsto (1+c^3p_4)u_0^2z, & w_0w_1 \mapsto u_0u_2'z.
\end{array}$$

После чего аналогично доказательству предложения 3.29 получаем список мономов, имеющих нормальную форму, совпадающий с таким списком для случая 4, что завершает доказательство предложения 3.39. □

Список литературы

1. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras.* — Lecture Notes in Math., Berlin, Heidelberg **1428** (1990).
2. А. И. Генералов, Д. А. Никулин, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* IX. *Исключительные локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **478** (2019), 17–31.

3. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* I. *Групповые алгебры полудиэдральных групп.* — Алгебра и анализ, No. 2, **21** (2009), 1–51.
4. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **386** (2011), 144–202.
5. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* III. *Серия $SD(2\mathcal{B})_2$ в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **400** (2012), 133–157.
6. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* IV. *Алгебра когомологий для серии $SD(2\mathcal{B})_2(k,t,c)$ при $c=0$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **413** (2013), 45–92.
7. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* V. *Серия $SD(3\mathcal{K})$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **435** (2015), 5–32.
8. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* VI. *Серия $SD(2\mathcal{B})_2$ в характеристике, отличной от* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **443** (2016), 61–77.
9. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* VII. *Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **452** (2016), 52–69.
10. А. И. Генералов, А. А. Зайковский, *О производной эквивалентности алгебр полудиэдрального типа с двумя простыми модулями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **452** (2016), 70–85.
11. А. И. Генералов, А. А. Зайковский, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* VIII. *Серия $SD(2\mathcal{B})_1$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **460** (2017), 35–52.
12. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* I: *серия $D(3\mathcal{K})$ в характеристике* 2. — Алгебра и анализ, No. 6, **16** (2004), 53–122.
13. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* IV. *Серия $D(2\mathcal{B})(k,s,0)$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **423** (2014), 67–104.

Generalov A. I. Hochschild cohomology of algebras of semidihedral type, X. Cohomology algebra for exceptional local algebras.

Hochschild cohomology algebra is described in term of generators and relations for a family of localalgebras of semidihedral type. This family appears in the famous K. Erdmann's classification only in the case where the characteristic of the base field is equal to 2.

С.Петербургский
государственный университет
Университетская наб., д. 7/9
199034 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ageneralov@gmail.com

Поступило 1 июня 2021 г.