Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 500, 2021 г.

**С. В. Востоков, В. М. Поляков**

# СТРУКТУРА ФОРМАЛЬНЫХ МОДУЛЕЙ КАК МОДУЛЕЙ ГАЛУА В ЦИКЛИЧЕСКИХ НЕРАЗВЕТВЛЕННЫХ $p$-РАСШИРЕНИЯХ

## §1. Введение

В конструктивной теории полей классов возникает задача об изучении структуры формального модуля Галуа $F(\mathfrak{m}_M)$, где $M/L, L/K$ – фиксированные конечные расширения локального поля $K$ (в классическом случае $K = \mathbb{Q}_p$), $\mathfrak{M}$ – максимальный идеал кольца целых, а $F$ некоторый формальный групповой закон над кольцом целых $O_K$. Сформулируем её более конкретно:

- Зафиксируем простое число $p$, и пусть $M/L$, $L/K$, $K/\mathbb{Q}_p$ есть конечные расширения Галуа. Зафиксируем одномерный формальный групповой закон $F$ над кольцом целых $O_K$, с кольцом эндоморфизмов $End_{\mathcal{O}_K}(F)$. Мы понимаем эндоморфизмы формального группового закона $F$ как эндоморфизмы в категории формальных групповых законов $FGL(\mathcal{O}_K)$. Пусть кольцо $End_{\mathcal{O}_K}(F)$ содержит некоторое подкольцо $\mathcal{O}_{K_0}$. Тогда максимальный идеал $\mathfrak{m}_M$ кольца $\mathcal{O}_M$ наделяется естественной структурой $\mathcal{O}_{K_0}[G]$-модуля, где $G = \mathrm{Gal}(M/L)$. Возникает вопрос о нахождении структуры этого $\mathcal{O}_{K_0}[G]$-модуля $F(\mathfrak{m})$.

В классическом случае поле $K$ совпадает с $\mathbb{Q}_p$, а формальный групповой закон $F = F_m$ является мультипликативным. Этот случай был изучен следующими авторами: К. Ивасава [1,2], М. Краснер [3], З. И. Боревич и С. В. Востоков [4–6].

В дальнейшем эти результаты стали обобщать на другие формальные модули. Так в 2014 году С. В. Востоковым и И. И. Некрасовым было описано строение таких формальных модулей для групп Любина-Тейта [7].

---

*Ключевые слова*: одномерные локальные поля, формальные модули, обобщенные формальные модули Любина–Тейта.

Работа выполнена за счет гранта в форме субсидий из федерального бюджета на создание и развитие международных математических центров мирового уровня, соглашение между МОН и ПОМИ РАН No. 075-15-2019-1620.

Они рассмотрели случай неразветвленного циклического $p$-расширения $M/L$, оба поля имеют степень иррегулярности $s \geqslant 1$, в том смысле что они содержат первообразный корень $\mathrm{Ker}[\pi^s]$, но не $\mathrm{Ker}[\pi^{s+1}]$. В качестве формального группового закона был выбран закон Любина–Тейта. Ими была доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** *При выполнении вышесказанных условий для $\mathcal{O}_K[G]$-модуля $F(\mathfrak{m})$ существует система образующих $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \xi, \omega$ с единственным определяющим соотношением $(\sigma -_F 1)(\omega) = [\pi^s](\xi)$.*

После этого в 2018 году вышла работа С. В. Востокова и Т. Л. Акопяна, обобщающая предыдущие результаты на уже достаточно общий случай формальных модулей – случай формальных модулей Хонды [8]. Основной результат выглядит следующим образом.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены все предыдущие предположения, а также пусть $F$ – это формальная группа Хонды высоты $h$ и $\mathcal{O}_{K_0} \subseteq End_{\mathcal{O}_K}(F)$. Тогда $h \leqslant n$ и для $\mathcal{O}_{K_0}[G]$-модуля $F(\mathfrak{M}_M)$ существует система образующих $\theta_j, \xi_i, \omega_i$ $(1 \leqslant j \leqslant n-h,\ 1 \leqslant i \leqslant h)$ с единственными определяющими соотношениями $[\pi^s](\xi_i) = \omega_i^\sigma -_F \omega_i$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$.*

В настоящей работе предпринята попытка обобщить все предыдущие результаты на случай произвольной одномерной формальной группы.

## §2. Основные обозначения

Зафиксируем простое число $p$, и пусть имеется цепочка конечных расширений полей $M/L/K/K_0/\mathbb{Q}_p$, где $M/L$ – неразветвленное $p$-расширение, $L/K_0$ – произвольное расширение степени $n$. Будем обозначать $\mathcal{O}_K, \mathfrak{M}_K$ кольцо целых и максимальный идеал поля $K$ соответственно, а $k$ поле вычетов. Зафиксируем алгебраическое замыкание $\Omega$, которое будет содержать все данные алгебраические расширения поля $K$. Предположим что над $\mathcal{O}_K$ задан формальный групповой закон $F(X,Y) \in \mathcal{O}_K[[X,Y]]$. Заведем на максимальном идеале $\mathfrak{M}_K$ структуру формального $\mathcal{O}_{K_0}$-модуля стандартным образом:

$$
\begin{aligned}
(a +_F b) &= F(a,b)\\
(a -_F b) &= F(a, i(b))\\
\alpha \cdot a &= [\alpha]_F(a),
\end{aligned}
$$

где $a, b \in \mathfrak{M}_K$, $i(X)$ – обратный элемент формального группового закона $F$, а $\alpha \in \mathcal{O}_{K_0}$.

Известно, что в нашем случае имеется вложение кольца эндоморфизмов $End_{\mathcal{O}_K}F$ в кольцо $\mathcal{O}_K$ [9, 1.2]. Далее предполагаем, что $K_0$ является подполем $K$, что $F$ есть $\mathcal{O}_{K_0}$-модульный закон (это означает, что $\mathcal{O}_{K_0}$ вкладывается в $End_{\mathcal{O}_K}F$). Предположим, что $\pi$ – униформизующая $\mathcal{O}_{K_0}$ и изогения $f = [\pi]$ имеет конечную высоту $h$, то есть $[\pi](T) \equiv uT^{q^h} \mod \mathfrak{M}_{\mathcal{O}_K}$, где $u$ – некоторая единица, а $q$ – количество элементов поля вычетов $K_0$. Тогда мы знаем [9, предложение 2.3], что $\mathcal{O}_{K_0}$-модуль корней изогении $\Lambda_{f,n} = \{x \in \Omega : \; f^n(x) = 0\}$ изоморфен $(\frac{\mathcal{O}_{K_0}}{\pi^n \mathcal{O}_{K_0}})^h$.

## §3. Первые когомологии формальных модулей в случае неразветвленного расширения

В этом разделе мы докажем тривиальность группы первых когомологий Галуа с коэффициентами в произвольной степени максимального идеала со структурой формального модуля. В дальнейшем будем обозначать $G = \mathrm{Gal}(M/L)$. Важность этого результата заключается в том, что в дальнейшем именно за счет тривиальности первых когомологий мы и будем получать нетривиальные соотношения в нашей основной теореме – каждый коцикл будет когранией.

**Теорема 3.** *Пусть $F(X, Y)$ – произвольный формальный групповой закон, а расширение $M/L$ неразветвленное. Тогда для любого $i \geqslant 1$*

$$H^1(G, F(\mathfrak{M}_M^i)) = 0.$$

**Доказательство.** 1) Сначала докажем что когомологии для степени максимального идеала с обычным сложением тривиальны: $H^1(G, \mathfrak{M}_M^i) = 0$. Это доказывается примерно так же, как теорема Гильберта 90, только с небольшим изменением.
Напишем уравнение 1-коцикла для произвольнго коцикла $\alpha_{(.)}$,

$$\alpha_{\tau\sigma} = \alpha_\sigma + \sigma\alpha_\tau.$$

Зафиксируем некоторый $x \in M$ (потом мы выберем конкретный элемент) и рассмотрим $\theta = \sum_{\sigma \in G} \sigma(x)\alpha_\sigma$, тогда

$$\tau\theta = \sum_{\sigma \in G} \tau\sigma(x)\tau\alpha_\sigma = \sum \tau\sigma(x)(\alpha_{\sigma\tau} - \alpha_\tau) = \theta - \sum \tau\sigma(x)\alpha_\tau = \theta - \alpha_\tau Tr_{M/L}x.$$

А теперь, поскольку $M/L$ неразветвлено, то оно слабо разветвлено, и следовательно, оператор следа $\mathrm{Tr}_{M/L}$ является сюръекцией на группах единиц. Поэтому найдется $x \in U_M$, что $\mathrm{Tr}_{M/L}(x) = 1$, именно этот $x$ мы и возьмем чтобы построить элемент $\theta$. Тогда получаем, что 1-коцикл это кограница:

$$\alpha_\tau = \theta - \tau\theta,\ \ \theta \in \mathfrak{M}_M^i.$$

2) Теперь введем на максимальном идеале структуру формального модуля $F(\mathfrak{M}_M^i)$. Из [10] знаем, что существует достаточно большое $R$, такое, что для $r \geqslant R$ имеется изоморфизм $\mathcal{O}_K[G]$-модулей $\mathfrak{M}_M^r \simeq F(\mathfrak{M}_M^r)$ (поскольку изоморфизм устанавливается логарифмом, он эквивариантен относительно действия $G$ и для него верно $\lambda \circ [a] = a\lambda$), поэтому для них когомологии совпадают и $H^1(G, F(\mathfrak{M}_M^r)) = 0$. А теперь просто напишем короткие точные последовательности $\mathcal{O}_K[G]$-модулей, из которых по индукции мы получим тривиальность когомологий для всех степеней максимального идеала

$$0 \to F(\mathfrak{M}_M^{i+1}) \to F(\mathfrak{M}_M^i) \to \overline{M} \to 0.$$

(Здесь обязательно стоит отметить что данные короткие точные последовательности будут последовательностями $\mathcal{O}_K[G]$-модулей только в случае неразветвленного расширения, в случае любого другого расширения они будут только последовательностями абелевых групп, что помешает нам применить эту идею для вычисления $H^1$).

Длинная точная последовательность когомологий для этой короткой точной последовательности будет такой:

$$\begin{aligned} 0 \to F(\mathfrak{M}_L^{i+1}) \to F(\mathfrak{M}_L^i) \to \overline{L} \to H^1(G, F(\mathfrak{M}_M^{i+1})) \\ \to H^1(G, F(\mathfrak{M}_M^i)) \to H^1(G, \overline{M}) \to \dots. \end{aligned}$$

Из нее по индукционному предположению получаем

$$0 \to H^1(G, F(\mathfrak{M}_M^i)) \to 0,$$

откуда и следует наше утверждение. □

## §4. Подготовительные результаты

Рассмотрим цепочку расширений $M/L/K/K_0$, где $L/K_0$ – произвольное конечное расширение степени $n$, расширение $M/L$ является неразветвленным $p$-расширением степени $p^m$. Также считаем, что степени иррегулярности расширений $M$ и $L$ совпадают и равны $s \geqslant 1$, то есть эти поля содержат $\Lambda_{f,s}$, но не содержат $\Lambda_{f,s+1}$, и подмодули кручения модулей $F(\mathfrak{M}_M)$ и $F(\mathfrak{M}_L)$ это $\Lambda_{f,s}$. Введём образующие $\frac{\mathcal{O}_{K_0}}{\pi^s\mathcal{O}_{K_0}}$-модуля $\Lambda_{f,s}:\ \zeta_1,\ldots,\zeta_h$.

Так как расширение $M/L$ неразветвлено, то $G=\mathrm{Gal}(M/L)$ – это циклическая $p$-группа порядка $p^m$. Далее считаем, что $G=\langle\sigma\rangle$ и $k_0$ – поле вычетов поля $K_0$.

Нам потребуются следующие леммы.

**Лемма 1.** *Если элементы $\theta_1,\ldots,\theta_k$ являются образующими для векторного пространства $F(\mathfrak{M}_M)/[\pi]F(\mathfrak{M}_M)$ над $k_0$, то их представители являются образующими для $\mathcal{O}_{K_0}$-модуля $F(\mathfrak{M}_M)$.*

**Лемма 2.** *Если для элементов $x_j$ $(1\leqslant j\leqslant k)$ из $F(\mathfrak{M}_M)$ их нормы $N_{F(\mathfrak{M}_M)}(x_j)$ линейно независимы в $k_0$-векторном пространстве $F(\mathfrak{M}_M)/[\pi]F(\mathfrak{M}_M)$, то в $F(\mathfrak{M}_M)/[\pi]F(\mathfrak{M}_M)$ линейно независимы соответствующие им элементы*

$$x_j^{\sigma^i}\ (1\leqslant j\leqslant k,\ 0\leqslant i\leqslant p^m).$$

**Лемма 3.** *Для конечного неразветвленного расширения $M/L$ имеется равенство*

$$N_{F(\mathfrak{M}_M)}(F(\mathfrak{M}_M))=(F(\mathfrak{M}_L)).$$

Доказательства этих лемм можно найти в статье [7], или для классического случая мультипликативных групп, исследованного Боревичем, в [11].

Теперь для отыскания системы образующих и соотношений формального модуля $F(\mathfrak{M}_M)$ нам предстоит найти размерность $F(\mathfrak{M}_M)/[\pi]F(\mathfrak{M}_M)$ как векторного пространства, после чего из леммы 1 мы получим и размерность $F(\mathfrak{M}_M)$ как $\mathcal{O}_{K_0}$-модуля.

**Лемма 4.** $\dim_{k_0}F(\mathfrak{M}_M)/[\pi]F(\mathfrak{M}_M)=np^m+h$.

**Доказательство.** Как и в теореме 1 напишем изоморфизм $\mathcal{O}_{K_0}$-модулей $F(\mathfrak{M}_M^r)\simeq\mathfrak{M}_M^r$ для достаточно больших $r$.

Далее скажем, что $\mathcal{O}_{K_0}$-модуль $\mathfrak{M}_M^r$ изоморфен свободному $\mathcal{O}_{K_0}$-модулю ранга $np^m$ (так как $\mathfrak{M}_M^r\simeq\mathcal{O}_M$ как $\mathcal{O}_{K_0}$-модуль, а последний является свободным модулем ранга $[M:K_0]$ (например, см. [12, p. 40, Prop. 2.4]).

Теперь снова, как в теореме 1, мы пишем короткие точные последовательности $\mathcal{O}_{K_0}$-модулей

$$0\to F(\mathfrak{M}_M^{i+1})\to F(\mathfrak{M}_M^i)\to\overline{M}\to 0,$$

откуда мы по индукции получаем, что $F(\mathfrak{M}_m)$ является прямой суммой свободного $\mathcal{O}_{K_0}$-модуля ранга $np^m$ и подмодуля кручения (по теореме о строении конечно порожденных модулей). То есть можем написать

$$F(\mathfrak{M}_M) = N \oplus \Lambda_{\pi,s},$$

где $N$ – свободный $\mathcal{O}_{K_0}$-модуль ранга $np^m$.

Теперь просто подсчитаем мощности соответствующих факторов подмодулей для нахождения $|F(\mathfrak{M}_M)/[\pi]F(\mathfrak{M}_M)|$:

$$|\Lambda_{\pi,s}/[\pi]\Lambda_{\pi,s}| = q^h,$$
$$|N/[\pi]N| = \left|\frac{\{[\alpha_1]\circ e_1 +_F \cdots +_F [\alpha_{np^m}]\circ e_{np^m}\}}{\{[\pi\alpha_1]\circ e_1 +_F \cdots +_F [\pi\alpha_{np^m}]\circ e_{np^m}\}}\right| = \left|\overline{M}\right| = q^{np^m}.$$

Таким образом перемножая мощности получаем, что размерность $k$-векторного пространства $F(\mathfrak{M}_M)/[\pi]F(\mathfrak{M}_M)$ равна $h + np^m$. □

**Замечание.** Аналогичный результат можно получить и для поля $L$:

$$\dim_{k_0} F(\mathfrak{M}_L)/[\pi]F(\mathfrak{M}_L) = n + h.$$

**Лемма 5.** *Если элементы $\theta_1, \ldots, \theta_k$ линейно независимы в $k_0$-векторном пространстве $F(\mathfrak{M}_M)/[\pi]F(\mathfrak{M}_M)$, то они линейно независимы и в $F(\mathfrak{M}_M)/[\pi^s]F(\mathfrak{M}_M)$.*

**Доказательство.** Напишем уравнение линейной зависимости в $F(\mathfrak{M}_M)/[\pi^s]F(\mathfrak{M}_M)$:

$$\sum_{i\ F}[a_i]\theta_i = [\pi^s]\eta.$$

Тогда по линейной независимости элементов $\{\theta_j\}_j$ в $F(\mathfrak{M}_M)/[\pi]F(\mathfrak{M}_M)$ имеем $a_i = \pi a_i^{(1)}$. Сократив на $[\pi]$, получаем

$$\sum_{i\ F}[a_i^{(1)}]\theta_i = [\pi^{s-1}]\eta +_F \sum_{j\ F}[b_i^{(1)}\pi^{s-1}]\zeta_i.$$

Далее, действуя аналогично проведя еще $s-1$ таких сокращений, получаем, что $a_i \vdots \pi^s$. □

**Лемма 6.** *$\zeta_1, \ldots, \zeta_h$ линейно независимы в $F(\mathfrak{M}_M)/[\pi]F(\mathfrak{M}_M)$ и в $F(\mathfrak{M}_L)/[\pi]F(\mathfrak{M}_L)$.*

**Доказательство.** Напишем соотношение линейной зависимости

$$\sum_{i\ F}[a_i]\circ\zeta_i=[\pi]\circ\eta,$$

где $\eta\in F(\mathfrak{M}_M)$ (соответственно, $F(\mathfrak{M}_L)$), $a_i\in k_0$. Применим $[\pi^s]$, получим $[\pi^{s+1}]\circ\eta=0$, но в поле $M$ $(L)$ нет нетривиальных корней $[\pi^{s+1}]$, поэтому $\eta$ – корень $[\pi^s]$, а тогда применяя $[\pi^{s-1}]$, получим

$$\sum_{i\ F}[\pi^{s-1}a_i]\circ\zeta_i=0,$$

и по линейной независимости $\zeta_i$ в $\Lambda_{\pi,s}$ получаем $a_i\vdots\pi$. □

## §5. Ядро одного гомоморфизма

В этом разделе мы изучим гомоморфизм, индуцированный вложением

$$F(\mathfrak{M}_L)/[\pi]F(\mathfrak{M}_L)\xrightarrow{\varphi}F(\mathfrak{M}_M)/[\pi]F(\mathfrak{M}_M).$$

Для доказательства основной теоремы нам нужно изучить ядро этого гомоморфизма, чтобы по модулю этого ядра построить максимально возможное количество образующих $F(\mathfrak{M}_L)/[\pi]F(\mathfrak{M}_L)$, а затем определенным образом "поднять" их в $F(\mathfrak{M}_M)/[\pi]F(\mathfrak{M}_M)$. Поэтому докажем следующую лемму.

**Лемма 7.** $\dim_{k_0}\ker\varphi=h$.

**Доказательство.** Рассмотрим элементы

$$\eta_1=[\pi^{s-1}]\zeta_1,\dots,\eta_h=[\pi^{s-1}]\zeta_h.$$

Далее заметим, что

$$N_{F(\mathfrak{M}_M)}\eta_i=N_{F(\mathfrak{M}_M)}[\pi^{s-1}]\zeta_i=[\pi^{s-1}]\circ[p^m]\zeta_i=0.$$

Поэтому по тривиальности $H^1(G,F(\mathfrak{M}_M))$ элемент $\eta_i$ представится в виде кограницы $\eta_i=(\sigma-_F1)\mu_i$. Отметим, что $[\pi]\mu_i\in F(\mathfrak{M}_L)$, но $\mu_i\notin F(\mathfrak{M}_L)$.

Введем элементы $\nu_i=[\pi]\mu_i,\ i=1,\dots,h$ и докажем, что они образуют $k_0$-базис $\ker\varphi$.

- Линейная независимость.
  Пусть $\sum\limits_i [a_i]\nu_i = [\pi]z$, где $z \in F(\mathfrak{M}_L)$. Тогда $\sum\limits_i [a_i\pi]\mu_i = [\pi]z$. Поэтому следующая разность будет представляться как линейная комбинация образующих $\Lambda_{\pi,1}$:

$$\sum_{i\ F}[a_i]\mu_i -_F z = \sum_{i\ F}[\beta_i]\eta_i.$$

  Применяем $\sigma -_F 1$ и получаем $\sum\limits_{i\ F}[a_i]\eta_i = 0$, а поэтому $a_i \vdots \pi$ для любого $i$. Таким образом элементы $\nu_i$ линейно независимы.
- Система образующих.
  Пусть $x \in \ker\varphi$, то есть $x = [\pi]y$, $x \in F(\mathfrak{M}_L)$, $y \in F(\mathfrak{M}_M)$. Применим к этому равенству $\sigma -_F 1$ и получим $0 = [\pi](\sigma -_F 1)y$. Поэтому

$$(\sigma -_F 1)y = \sum_{k\ F}[a_k]\eta_k = \sum_{k\ F}[a_k](\sigma -_F 1)\mu_k.$$

  Из этого равенства вытекает, что $y -_F \sum\limits_{k\ F}[a_k]\mu_k \in F(\mathfrak{M}_L)$, а также

$$y = y^\sigma -_F \sum_{k\ F}[a_k]\mu_k^\sigma +_F \sum_{k\ F}[a_k]\mu_k.$$

  Применим $[\pi]$ и получим $x = \sum\limits_{k\ F}[a_k]\nu_k +_F [\pi]z, \quad z \in \mathfrak{M}_L$, что доказывает, что множество элементов $\nu_i$ является системой образующих.

□

**Замечание.** Важно отметить то, что в нашей конфигурации расширений полей $L/K_0$, а именно, когда расширение $L/K_0$ конечно и степени $n$ и поле $L$ содержит корни $[\pi^s]$, то $n \geqslant h$.

**Доказательство.** Поскольку размерность ядра $\varphi$ равна $h$, а размерность пространства $F(\mathfrak{M}_L)/[\pi]F(\mathfrak{M}_L)$ равна $n+h$ и имеется $h$ линейно независимых векторов по модулю ядра $\varphi$ (лемма 6), то $n \geqslant h$. □

## §6. Основная теорема

**Теорема 4.** *Пусть имеется цепочка расширений $M/L/K/K_0$, где $L/K_0$ – конечное расширение степени $n$, $M/L$ – $p$-расширение степени $p^m$, поля $M$ и $L$ имеют степень иррегулярности $s$. Тогда $\mathcal{O}_{K_0}[G]$-модуль $F(\mathfrak{M}_M)$ представляется в виде образующих и соотношений следующим образом:*
*образующие: $\theta_1,\dots,\theta_{n-h},\xi_1,\dots,\xi_h,\omega_1,\dots,\omega_h$; соотношения: $[\pi^s](\xi_i)=\omega_i^\sigma -_F \omega_i$, где $i=1,\dots,h$.*

**Доказательство.** Возьмем наши образующие модуля $\Lambda_{\pi,s}$, которые по лемме 6 являются линейно независимыми в $F(\mathfrak{M}_L)/[\pi]F(\mathfrak{M}_L)$ и по лемме 3 воспользуемся сюръективностью нормы:

$$\exists \xi_i\in F(\mathfrak{M}_M),\ i=1,\dots,h:\ N_{F(\mathfrak{M}_M)}(\xi_i)=\zeta_i.$$

Применив к последнему равенству $[\pi^s]$, получаем $N_{F(\mathfrak{M}_M)}([\pi^s]\xi_i)=0$, а отсюда из тривиальности $H^1(G,F(\mathfrak{M}_M))$ и знания того, как устроены первые когомологии конечных циклических групп (например, см. [13, дополнение 1]), получаем, что

$$\exists \omega_i\in F(\mathfrak{M}_M),\ i=1,\dots,h:\ [\pi^s]\circ\xi_i=\omega_i^\sigma -_F \omega_i.$$

По лемме 2 получаем, что система $\left\{\xi_k^{\sigma^i}\ :\ k=1,\dots,h,\ i=1,\dots,n\right\}$ линейно независима в $F(\mathfrak{M}_M)/[\pi]F(\mathfrak{M}_M)$.

Мы знаем, что $\dim_{k_0}F(\mathfrak{M}_L)/[\pi]F(\mathfrak{M}_L)=n+h$, а также $\dim_{k_0}\ker\varphi=h$. Поэтому мы можем выбрать $n-h$ линейно независимых по модулю $\ker\varphi$ элементов $\epsilon_1,\dots,\epsilon_{n-h}$ и, как и раньше, построим по ним элементы $\theta_1,\dots,\theta_{n-h}$ такие, что $N_{F(\mathfrak{M}_M)}(\theta_i)=\epsilon_i$. (Здесь проявляется необходимость брать элементы $\epsilon_i$ линейно независимыми именно по модулю $\ker\varphi$, поскольку если $\epsilon_j=[\pi](\eta)$, то $\theta_j +_F \dots +_F \theta_j^{\sigma^{p^m-1}}=[\pi]\eta$, откуда мы бы получили линейную зависимость элементов $\theta_j^{\sigma^k}$ $(k=1,\dots,p^m-1)$ в $F(\mathfrak{M}_M)/[\pi]F(\mathfrak{M}_M)$.)

Таким образом мы получили $np^m+h$ элементов

$$\left\{\theta_i^{\sigma^j},\ \xi_k^{\sigma^j},\ \omega_k:\ k=1,\dots,h,\ i=1,\dots,n-k,\ j=1,\dots,p^m\right\}.$$

Осталось доказать что полученная система является линейно независимой в $F(\mathfrak{M}_M)/[\pi]F(\mathfrak{M}_M)$, а также, что никаких новых соотношений не возникло.

- Линейная независимость.

Предположим противное, а именно, пусть эта система линейно зависима:

$$\sum_{ij\ F}[a_{ij}]\theta_i^{\sigma^j} +_F \sum_{kj\ F}[b_{kj}]\xi_k^{\sigma^j} +_F \sum_{k\ F}[c_k]\omega_k = [\pi]\eta, \quad \eta \in F(\mathfrak{M}_M). \qquad (1)$$

Применим к равенству $\sigma -_F 1$, получим

$$\sum_{ij\ F}[a_{ij}-a_{ij+1}]\theta_i^{\sigma^{j+1}} +_F \sum_{kj\ F}[b_{kj}-b_{kj+1}]\xi_k^{\sigma^{j+1}} +_F \sum_{k\ F}[c_k\pi^s]\xi_k = [\pi](\eta^\sigma -_F \eta). \quad (2)$$

По лемме 2 элементы $\theta_i^{\sigma^j}$, $\xi_k^{\sigma^j}$ линейно независимы в $F(\mathfrak{M}_M)/[\pi]F(\mathfrak{M}_M)$, поэтому $a_{ij} - a_{ij-1},\ b_{kj} - b_{kj-1} \vdots \pi$.

Далее пусть $a_{ij} - a_{ij+1} = \pi a'_{ij},\ b_{kj} - b_{kj+1} = \pi b'_{kj}$. Тогда равенство 2 примет вид

$$\sum_{ij\ F}[a'_{ij}]\theta_i^{\sigma^{j+1}} +_F \sum_{kj\ F}[b'_{kj}]\xi_k^{\sigma^{j+1}} +_F \sum_{k\ F}[c_k\pi^{s-1}]\xi_k - (\eta^\sigma -_F \eta)$$
$$= \sum_{k\ F}[\alpha_k\pi^{s-1}]\zeta_k.$$

После применения оператора нормы получим:

$$\sum_{i\ F}\Big(\sum_{j\ F}[a'_{ij}]\Big)\epsilon_i +_F \sum_{k\ F}\Big(\sum_{j\ F}[b'_{ij}]\Big)\zeta_k +_F \sum_{k\ F}[\pi^{s-1}c_k]\zeta_k = 0.$$

Заметим, что коэффициенты $\sum_{j\ F}[a'_{ij}]$ и $\sum_{j\ F}[b'_{ij}]$ оказываются равными нулю, таким образом,

$$\sum_{k\ F}[\pi^{s-1}c_k]\zeta_k = 0,$$

откуда по линейной независимости образующих $\Lambda_{\pi,s}$ получаем $c_k \vdots \pi$.

Теперь из равенства (1) и леммы 2 получаем, что и оставшиеся коэффициенты в (1) делятся на $\pi$.

Таким образом мы нашли $np^m + h$ линейно независимых элементов в $F(\mathfrak{M}_M)/[\pi]F(\mathfrak{M}_M)$. Поэтому по лемме 1 они же являются и образующими $F(\mathfrak{M}_M)$ как $\mathcal{O}_{K_0}$-модуля.

- Соотношения.

Для удобства далее действие элементов $\mathcal{O}_{K_0}[G]$ будем обозначать как просто умножение. Предположим, что выполняется какое-то соотношение

$$\sum_{i\ F}\alpha_i\theta_i + \sum_{k\ F}\beta_k\xi_k + \sum_{k\ F}\gamma_k\omega_k = 0, \tag{3}$$

где $\alpha_i,\ \beta_k,\ \gamma_k \in \mathcal{O}_{K_0}[G]$. Будем доказывать, что никаких соотношений кроме

$$\omega_i^{\sigma^k} = \omega_i +_F [\pi^s](\xi_i +_F \cdots +_F \xi_i^{\sigma^{k-1}}) \tag{4}$$

и естественных следствий из них больше нет.

Воспользуемся указанными выше соотношениями и таким образом избавимся от коэффициентов при $\omega_k^{\sigma^j}$. Тогда мы получим

$$\sum_{i\ F}\alpha_i\theta_i +_F \sum_{k\ F}\beta'_k\xi_k +_F \sum_{k\ F}\gamma'_k\omega_k = 0,$$

где уже $\gamma'_k \in \mathcal{O}_{K_0}$. Явный вид этих коэффициентов (в естественных обозначениях) таков:

$$\beta'_{\sigma^j k} = \beta_{\sigma^j k} + \pi^s(\gamma_{\sigma^{j+1} k} + \cdots + \gamma_{\sigma^{p^m-1} k}),\ j = 0, \ldots, p^m-2,$$
$$\gamma'_k = \gamma_{\sigma^0 k} + \cdots + \gamma_{\sigma^{p^m-1} k}.$$

Теперь это уравнение линейной зависимости с базисными в $F(\mathfrak{M}_M)/[\pi]F(\mathfrak{M}_M)$ векторами. Воспользуемся леммой 5 и получим $\alpha_i = \pi^s\alpha_i^{(1)}$, $\beta'_k = \pi^s\beta_k^{(1)}$, $\gamma'_k = \pi^s\gamma_k^{(1)}$. Теперь сократим на $\pi^s$ и получим равенство

$$\sum_{i\ F}\alpha_i^{(1)}\theta_i +_F \sum_{k\ F}\beta_k^{(1)}\xi_k +_F \sum_{k\ F}\gamma_k^{(1)}\omega_k = \sum_{k\ F}\delta_k^{(1)}\sum_{j\ F}\sigma^j\xi_k.$$

Теперь по индукции, воспользовавшись тем же аргументом получаем, что $\alpha_i = 0$.

Таким образом, теперь мы рассматриваем уравнение

$$\sum_{k\ F}\beta'_k\xi_k +_F \sum_{k\ F}\gamma'_k\omega_k = 0.$$

Воспользовавшись явным видом коэффициентов, получаем, что

$$\beta_{\sigma^j k} = -\pi^s(\gamma_{\sigma^{j+1} k} + \cdots + \gamma_{\sigma^{p^m-1} k}) + \pi^s\beta^{(1)}_{\sigma^j k}.$$

Теперь вернемся к исходному уравнению и перепишем его так:

$$\sum_{kj\ F} [\pi^s \beta^{(1)}_{\sigma^j k} - \pi^s(\gamma_{\sigma^{j+1} k} + \dots + \gamma_{\sigma^{p^m-1} k})]\xi_k^{\sigma^j} +_F \sum_{kj\ F} [\gamma_{\sigma^j k}]\omega_k^{\sigma^j} = 0.$$

Снова воспользовавшись нашими имеющимися соотношениями, получим

$$[\pi^s] \sum_{kj\ F} [\beta^{(1)}_{\sigma^j k}]\xi_k^{\sigma^j} = 0. \tag{5}$$

Сократим на $\pi^s$:

$$\sum_{kj\ F} [\beta^{(1)}_{\sigma^j k}]\xi_k^{\sigma^j} = \sum_{kj\ F} [\lambda_{kj}][\pi^j]\zeta_k = \sum_{kji\ F} [\lambda_{kj}\pi^j]\xi_k^{\sigma^i}.$$

Откуда, приравняв коэффициенты при одинаковых $\xi_k^{\sigma^j}$, получим, что $\beta^{(1)}_{\sigma^j k}$ не зависят от $j$ по модулю $\pi^s$. Повторяя эти рассуждения, получим, что $\beta^{(1)}_{\sigma^j k}$ не зависят от $j$ по модулю любой степени $\pi$, поэтому они вообще не зависят от $j$. Будем обозначать их $\beta^{(1)}_k$.

Применив $\sigma^j$ к нашему исходному соотношению, мы получим $[\pi^s]\xi_k^{\sigma^j} = \omega_k^{\sigma^{j+1}} -_F \omega_k^{\sigma^j}$. Применив эти соотношения к равенству (5), мы получаем тождество $0 = 0$.

Таким образом, обратив все эти вычисления, мы получаем наше исходное уравнение, пользуясь только имеющимися у нас соотношениями. Поэтому кроме них в модуле $F(\mathfrak{M}_M)$ соотношений больше нет.

□

## §7. Обобщенные формальные модули Любина–Тейта

Сейчас мы применим основной результат к случаю обобщенной формальной группы Любина–Тейта. (За подробностями, касающимися обобщенных формальных модулей Любина–Тейта, мы отсылаем читателя к работе А. И. Мадунц и Р. П. Востоковой [14]). Для этого мы потребуем, чтобы $K_0 = K$. Зафиксируем униформизующую этого поля, по этой униформизующей мы строим выделенную изогению нашей формальной группы

$$f(T) \equiv \pi T + T^{q^h} \mod \pi, \deg 2.$$

По выделенной изогении как и в случае классических групп Любина–Тейта строится обобщенная формальная группа Любина–Тейта.

По построению высота нашей формальной группы равна $h$. Известен изоморфизм

$$End_{\mathcal{O}_K} F \simeq \mathcal{O}_K.$$

Тогда, как следствие из основной теоремы, мы можем получить следующий результат

**Теорема 5.** *Пусть имеется цепочка расширений $M/L/K$, где $L/K$ – конечное расширение степени $n$, $M/L$ – $p$-расширение степени $p^m$, поля $M$ и $L$ имеют степень иррегулярности $s$. Зафиксируем униформизующую $\pi$ поля $K$ и построим по ней обобщенную формальную группу Любина–Тейта. Тогда $\mathcal{O}_K[G]$-модуль $F(\mathfrak{M}_M)$ представляется в виде образующих и соотношений следующим образом: образующие: $\theta_1, \ldots, \theta_{n-h}, \xi_1, \ldots, \xi_h, \omega_1, \ldots, \omega_h$; соотношения: $[\pi^s](\xi_i) = \omega_i^\sigma -_F \omega_i$, где $i = 1, \ldots, h$.*

## Список литературы


1. K. Iwasawa, *On Galois groups of local fields.* — Trans. Amer. Soc. **80**, No. 2 (1955), 448–469.
2. K. Iwasawa, *On local cyclotomic fields.* — J. Math. Soc. **12**, No. 1 (1960), 16–21.
3. M. Krasner, *Sur la representation exponentielle dans les corps relativement galoisiens de nombres p-adiques.* — Acta Arithmetica **3**, No. 1 (1939), 133–173.
4. З. И. Боревич, *Мультипликативная группа регулярного поля с циклической группой операторов.* — Изв. АН СССР. Сер. мат., **28**, No. 3 (1964), 707–712.
5. З. И. Боревич, С. В. Востоков, *Кольцо целых элементов расширения простой степени локального поля как модуль Галуа.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **31** (1973), 24–37.
6. С. В. Востоков, *Идеалы абелева p-расширения локального поля как модули Галуа.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **57** (1976), 64–84.
7. С. В. Востоков, И. И. Некрасов, *Формальный модуль Любина–Тейта в циклическом неразветвленном p-расширении как модуль Галуа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **430** (2014), 61–66.
8. Т. Л. Акопян, С. В. Востоков, *Формальный модуль Хонды в неразветвленном p-расширении локального поля как модуль Галуа.* — Вестник С.-Петербург. ун-та. Мат. Мех. Астр. **5 (63)**, No. 4 (2018), 541–548.
9. В. А. Колывагин, *Формальные группы и символ норменного вычета.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **43**, No. 5 (1979), 1054–1120.
10. J. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, Grad. texts in math. (1986).
11. З. И. Боревич, *О мультипликативной группе циклических p-расширений локального поля*, Алгебраическая теория чисел и представления, Сб. работ, Тр. МИАН СССР, 80, Наука, М.–Л., 1965, 16–29.

12. I. B. Fesenko, S. V. Vostokov, *Local fields and their extensions*, American Mathematical Society, (2002).
13. К. Ивасава, *Локальная теория полей классов*, М.: Мир, 1983. 183 с.
14. А. И. Мадунц, Р. П. Востокова, *Формальные модули для обобщенных групп Любина–Тейта*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **435** (2015), 95–112.

Vostokov S. V., Polyakov V. M. The structure of formal modules as Galois modules in cyclic unramified $p$ -extensions.

The structure of the formal module $F(\mathfrak{M})$ for a chain of finite extensions $M/L/K$, where $M/L$ is an unramified $p$-extension, is studied. The triviality of the first Galois cohomology of a formal module for an unramified extension for any degree of a prime ideal is shown. The presentation of the investigated formal module is constructed in terms of generators and relations. As an application of the main result, the structure of a formal module for generalized Lubin–Tate formal groups is obtained.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетская наб., 7-9
199034 С.-Петербург, Россия
*E-mail*: sergei.vostokov@gmail.com
*E-mail*: vovtai71@yandex.ru

Поступило 8 ноября 2020 г.