Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 500, 2021 г.

С. В. Востоков, Е. О. Леонова

ФОРМАЛЬНЫЕ МОДУЛИ ЛЮБИНА–ТЕЙТА НАД МНОГОМЕРНЫМИ ЛОКАЛЬНЫМИ ПОЛЯМИ

§1. Введение

В данной работе проводится изучение различных расширений многомерных локальных полей. Для многомерного локального поля при помощи теории Любина–Тейта по аналогии с одномерным случаем вводятся так называемые обобщенные формальные группы Любина–Тейта и расширения, полученные путем добавления к исходному полю корней их автоморфизмов. Проверяется, что структура групп Галуа этих расширений является такой же, как и в одномерном случае.

§2. Начальные сведения

Для начала введём основные обозначения.

K – n-мерное локальное поле, то есть последовательность полных дискретно нормированных полей $K_n, K_{n-1}, \ldots, K_0$, где каждое следующее поле является полем вычетом предыдущего, причём поле K_0 конечно.

$q = p^f$ – число элементов поля K_0.

$\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ – нормирование ранга n.

$(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – система локальных параметров поля K. В дальнейшем нам понадобится только t_1, будем обозначать его t и называть простым элементом.

$\mathcal{O}$ – кольцо целых поля K относительно многомерного нормирования.

$\mathfrak{M}$ – максимальный идеал кольца $\mathcal{O}$.

$\mathfrak{M}_1 = \{a \in \mathcal{O} : (\nu_2(a), \nu_3(a), \ldots, \nu_n(a)) \geqslant (1, 0, \ldots, 0)\}$.

Ключевые слова: многомерные локальные поля, формальные группы Любина–Тейта.

Работа выполнена за счет гранта в форме субсидий из федерального бюджета на создание и развитие международных математических центров мирового уровня, соглашение между МОН и ПОМИ РАН No. 075-15-2019-1620.

Множество $\mathbb{Z}^n = \{\overline{r} = (r_1, \ldots, r_n) : r_i \in \mathbb{Z}\}$ предполагается лексикографически упорядоченным в том смысле, что

$$\overline{r}^1 = (r_1^1, \ldots, r_n^1) < \overline{r}^2 = (r_1^2, \ldots, r_n^2),$$

если $r_m^1 < r_m^2$, $r_{m+1}^1 = r_{m+1}^2, \ldots, r_n^2 = r_n^2$, где $m \leqslant n$.

Заметим, что $\mathfrak{M} = t\mathcal{O}$. Кроме того, выполнены включения

$$\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M} \subset \mathcal{O}.$$

Также легко видеть, что $p \in \mathfrak{M}$.

2.1. Формальные группы Любина–Тейта. Действуя по аналогии с одномерным случаем, для любого натурального числа m введём множество

$$E_t = \{f(X) \in \mathcal{O}[[X]] \,:\, f(X) \equiv tX \mod \deg 2,\; f(X) \equiv X^{q^m} \mod \mathfrak{M}\}.$$

Полностью аналогично одномерному случаю можно доказать, что для любого $f(X) \in E_t$ существует единственная формальная группа $F_t(X,Y)$ над $\mathcal{O}$, такая что $f(X)$ – её эндоморфизм. Такие формальные группы будем называть обобщёнными формальными группами Любина–Тейта. Формальную группу, соответствующую ряду $f \in E_t$, будем обозначать как F_f.

Также верно следующее утверждение, см. [3].

Утверждение 2.1. *Пусть $f(X), g(X) \in E_t$. Тогда для любого $\alpha \in \mathcal{O}$ существует единственный ряд $[\alpha]_{f,g}(X) \in \mathcal{O}[[X]]$, такой что*

$$[\alpha]_{f,g}(X) \equiv \alpha X \mod \deg 2,$$
$$[\alpha]_{f,g} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F_g, F_f).$$

Кроме того, для любых $[\alpha]_{f,g}, [\beta]_{f,g}$ имеем

$$[\alpha]_{f,g} +_F [\beta]_{f,g} = [\alpha + \beta]_{f,g},$$

и для любых $[\alpha]_{f,g}, [\beta]_{g,h}$ имеем

$$[\alpha]_{f,g} \circ [\beta]_{g,h} = [\alpha\beta]_{f,h}.$$

Замечание 2.2. *Очевидно, что ряд $f(X)$ совпадает с эндоморфизмом $[t](X) \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}} F_f$. Будем называть его изогенией формальной группы Любина–Тейта. Поскольку высотой формальной группы называют высоту её изогении, высота формальной группы Любина–Тейта равна m.*

Замечание 2.3. *В дальнейшем мы будем работать только с одной формальной группой F и соответствующей изогенией f, поэтому обозначение $[\alpha]_{f,f}$ будет для краткости заменено на $[\alpha]$.*

Выделим также теорему, которая была доказана в [6].

Теорема 2.4. *Над кольцом целых $\mathcal{O}$ локального поля K размерности не меньше двух формальные группы Любина–Тейта $F(X,Y)$ и $H(X,Y)$ с изогениями $f(X) \in E_t$ и $h(X) \in E_T$ соответственно изоморфны тогда и только тогда, когда $t \equiv T \mod \mathfrak{M}_1$, причём изоморфизм является строгим.*

Таким образом, если зафиксировать t, дальнейшие результаты не будут зависеть от выбора $f(X) \in E_t$.

Возьмём $f(X) = X^q + tX$.

Зафиксируем некоторый корень x_0 этой изогении в максимальном сепарабельном расширении K. Тогда все её корни будут иметь вид

$$x_0, \zeta x_0, \ldots, \zeta^{q-2} x_0,$$

где ζ – первообразный корень степени $q-1$ из единицы. Из Леммы Гензеля очевидным образом следует, что $\zeta \in K$. Обозначим поле, полученное добавлением к K элемента x_0, как K^1. Несложно заметить, что $e(K_1^1/K_1) = q-1$. Отсюда следует, что $|K^1/K| = q-1$, потому что эта степень, очевидно, не может быть больше.

Заметим, что так же, как и в одномерном случае, мы имеем

$$\mathrm{Gal}(K^1/K) = \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}.$$

§3. Модуль ядра изогении

Как и прежде, возьмём ряд $f(X) = X^q + tX$ и обозначим соответствующую ему формальную группу Любина–Тейта как $F(X,Y)$.

Определение 3.1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$.*

Положим $f_m = [t^m] = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (m раз). Поле разложения f_m будем обозначать как K^m. Также введем обозначение

$$\mu_m := \{a \in K^m \mid f_m(a) = 0\}.$$

По аналогии с классическим случаем, изучим устройство μ_m и K^m.

Лемма 3.2. *Пусть $m \geqslant 1$. Тогда*

1. *$\mu_m \subset \mathfrak{M}$, причём для $a \in \mu_m$ имеем $\nu_i(a) = 0$ для любого $i > 0$,*

2. *для* $x \in K^\times$*, такого что* $\nu(x) = (m, 0, \ldots, 0)$*, и* $a \in \mathfrak{M}_{K^{sep}}$ *верно*:
$$a \in \mu_m \Leftrightarrow [x](a) = 0 \Leftrightarrow [y](a) = 0 \text{ для любого } y \in \mathfrak{M}^m.$$

Доказательство. Первый пункт леммы очевидным образом следует из того, что $f(X) = X^q + tX$.

Докажем второй пункт. Если $x = \varepsilon t^m$, где $\nu(\varepsilon) = 0$, то $[x] = [\varepsilon] \circ f_m$. Так как ряд $[\varepsilon]$ обратим, то $a \in \mu_m \Leftrightarrow [x](a) = 0$. Вторая эквивалентность следует из того, что $\mathfrak{M}^m = (x)$. □

Теорема 3.3. *Пусть* $m \geqslant 1$*. Тогда*

1. *На множестве* μ_m *можно ввести структуру* O_K*-модуля, задав операции в нём следующим образом:*
$$a + b := F(a, b), \quad \alpha a := [\alpha](a).$$
Кроме того, для любого $a \in \mu_m^\times = \mu_m \setminus \mu_{m-1}$ *существует изоморфизм* O_K*-модулей*
$$O_K/\mathfrak{M}^m \ni \alpha \text{ mod } \mathfrak{M}^m \mapsto [\alpha](a) \in \mu_m.$$
2. *Если* $a \in \mu_m^\times$*, то* $K^m = K(a)$*, и* K^m/K *– вполне разветвленное расширение Галуа степени* $|\mu_m^\times| = q^{m-1}(q-1)$*.*
3. *Существует канонический изоморфизм абелевых групп*
$$\rho_m\colon \operatorname{Gal}(K^m/K) \to \operatorname{Aut}_{O_K}(\mu_m) \to (O_K/\mathfrak{M}^m)^\times$$
$$(a \mapsto [u](a)\ \forall a \in \mu_m) \mapsto u \text{ mod } \mathfrak{M}^m.$$

Доказательство.

1. Лемма 3.2 показывает, что μ_m – это O_K-модуль с требуемыми операциями, обнуляющийся при умножении на $\mathfrak{M}^m$. Указанный в условии гомоморфизм инъективен по этой же лемме. Так как $|O_K/\mathfrak{M}^m| = q^m = \deg f_m \geqslant |\mu_m|$, то $|O_K/\mathfrak{M}^m| = |\mu_m| = q^m$. Следовательно, этот гомоморфизм сюръективен.
2. Из пункта 1 следует, что $\mu_m \subset K(a)$. Поэтому $K^m = K(a)$, и K^m/K – расширение Галуа.

Заметим, что свободный член многочлена $\frac{f_m}{f_{m-1}}$ равен t. В то же время, он равен $\prod_{a \in \mu_m^\times}(-a)$. Пользуясь п.1 леммы 3.2, получаем, что
$$e(K_1^m/K_1) = \sum_{a \in \mu_m^\times} \nu_1(-a) \geqslant |\mu_m^\times|.$$

Но $|\mu_m^\times| = q^{m-1}(q-1) = \deg(\frac{f_m}{f_{m-1}}) \geqslant [K^m : K]$.

Поэтому $e(K_1^m/K_1) = [K^m : K] = q^{m-1}(q-1)$.

3. Рассмотрим некоторый автоморфизм $\sigma \in \mathrm{Gal}(K^m/K)$. Несложно проверить, что

$$\sigma(F(\alpha,\alpha')) = F(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha')), \quad \sigma([a](\alpha)) = [a](\sigma(\alpha)).$$

Следовательно, существует гомоморфизм

$$\rho_m : \mathrm{Gal}(K^m/K) \to \mathrm{Aut}_{O_k}(\mu_m).$$

Заметим, что он инъективен. Следовательно, он сюръективен, так как группы $\mathrm{Gal}(K^m/K)$ и $\mathrm{Aut}_{O_k}(\mu_m)$ имеют одинаковый порядок. Также $\mathrm{Aut}_{O_k}(\mu_m) \cong (O_K/\mathfrak{M}^m)^\times$ по первому пункту теоремы. $\square$

Введём поле $K^\infty = \bigcup\limits_{m\geqslant 1} K^m$, полученное добавлением к исходному полю K корней многочленов f_m для всех натуральных m. Для него верно следующее утверждение.

Следствие 3.4. $\mathrm{Gal}(K^\infty/K) = O_{K_1}^\times$.

Доказательство. Используя теорему 3.3 и переходя к пределу, получаем, что

$$\mathrm{Gal}(K^\infty/K) = \varprojlim_{m\geqslant 1} (O_K/\mathfrak{M}^m)^\times = O_{K_1}^\times. \qquad \square$$

§4. Относительные формальные группы Любина-Тейта

Теперь рассмотрим многочлен $f(X) = X^{q^m} + tX$, $m > 1$. Пусть $F(X,Y)$ – соответствующая формальная группа.

Определение 4.1. *Расширение L/K n-мерных локальных полей называется чисто неразветвлённым, если L можно получить из K присоединением корней уравнения $x^{q^l} - 1 = 0$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$.*

Будем обозначать чисто неразветвлённое расширение поля K степени m как T_m. Хорошо известно, что расширение T_m/K является циклическим степени m. Несложно заметить, что рассматриваемая над T_m формальная группа $F(X,Y)$ является классической формальной группой Любина–Тейта.

Определение 4.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$.*

Положим $f_n = [t^n] = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n раз). Поле разложения f_n над K будем обозначать как T_m^n. Также введём обозначение

$$\mu_n := \{a \in T_m^n \mid f_n(a) = 0\}.$$

Это обозначение неслучайно: несложно заметить, что $T_m \subset T_m^1$. Воспользовавшись следствием 3.4, получаем, что

$$\mathrm{Gal}(T_m^\infty/T_m) = O^\times_{(T_m)_1}.$$

Зафиксируем $\zeta \in T_m$ – первообразный корень из единицы степени $q^m - 1$.

Определение 4.3. *Существует автоморфизм T_m над K, который переводит ζ в ζ^q. Будем обозначать его $Frob$.*

Воспользовавшись результатами, известными для одномерного случая (см. [8]), можно провести рассуждения, аналогичные описанным в части 3, и получить, что

$$\mathrm{Gal}(T_m^\infty/K) \cong (O_{T_m})_1^\times \rtimes_\phi \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},$$

где $\phi(k) = Frob^k,\ k \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

§5. Заключение

В работе была полностью изучена структура формального модуля Любина–Тейта над многомерным локальным полем. Основной целью дальнейших исследований является изучение связи полученных результатов с теорией полей классов для многомерных локальных полей. Планируется изучать расширения более высоких порядков и выделение закономерностей, которые, возможно, позволят рассмотреть максимальные абелевы расширения разветвлённых расширений поля K над исходным полем. Важным вопросом является вопрос применимости теории формальных групп к данной задаче.

Список литературы

1. T. Yoshida, *Local class field theory via Lubin-Tate theory.* — Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques **17**, No. 2 (2008), 411–438.
2. K. Iwasawa, *Local class field theory*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University Press (1986).
3. А. И. Мадунц, Р. П. Востокова, *Формальные модули для обобщенных групп Любина–Тейта.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **435** (2015), 95–112.
4. J. Lubin, J. Tate, *Formal complex multiplication in local fields.* — Ann. Math., Second Series **81** (1965), 380–387.
5. А. И. Мадунц, *Формальные группы Любина–Тейта над кольцом целых многомерного локального поля.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **281** (2001), 221–226.
6. А. И. Мадунц, *Классификация обобщенных формальных групп Любина–Тейта над многомерными локальными полями.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **455** (2017), 91–97.

7. И. Б. Фесенко, *Многомерная локальная теория полей классов. II.* — Алгебра и анализ **3**, No. 5 (1991), 1103–1126.
8. С. В. Востоков, Е. О. Леонова, *Вычисления в обобщенной теории Любина–Тейта.* — Вестник С.-Петербург. ун-та. Мат. Мех. Астр. **7**, No. 2 (2020), 210–216.

Vostokov S. V., Leonova E. O. Lubin–Tate formal modules over higher local fields.

An analogue of the Lubin–Tate formal groups for the higher local fields of characteristic 0 is considered. The modules formed by the roots of the automorphisms of these formal groups are studied. The corresponding field extensions are constructed and their Galois groups are computed.

Поступило 11 декабря 2020 г.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетская наб., 7-9
199034 С.-Петербург, Россия
E-mail: sergei.vostokov@gmail.com

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: eleonova@pdmi.ras.ru