

А. Тимонов

НОВЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ГИБРИДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ заполнена средой с электрической проводимостью $\sigma > 0$, а к ее границе $\partial\Omega$ прилагается электрический потенциал f . Пусть электрический потенциал u в $\bar{\Omega}$ удовлетворяет задаче Дирихле

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \text{ in } \Omega, \quad (1)$$

$$u = f \text{ on } \partial\Omega. \quad (2)$$

Согласно закону Ома, плотность тока J дается формулой $J = -\sigma \nabla u$. Поскольку скалярная функция $|J|$ может быть определена в Ω с помощью МРТ системы (смотри, например, [29]), в которой радиочастное электромагнитное поле взаимосвязывается с электрическим полем, создаваемым низкочастотным или постоянным электрическим током, который инжектируется в область Ω с границы $\partial\Omega$, непосредственный интерес для медицинской диагностики представляет следующая гибридная обратная задача (или обратная задача с взаимосвязанными физическими полями) визуализации электрической проводимости:

Задана пара функций $(f, |J|)$, определить (u, σ) в Ω .

В работе [20] впервые установлено, что если потенциал u удовлетворяет (1)-(2), то он также есть решение задачи о минимуме градиента с весом

$$\operatorname{argmin} \left\{ \int_{\Omega} w |\nabla u| dx : u \in W^{1,1}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), u|_{\Omega} = f \right\}, \quad (3)$$

Ключевые слова: гибридная обратная задача, функция наименьшего градиента с весом, уравнение потока средней кривизны с весом, регуляризация, вычислительный эксперимент.

Работа была поддержана грантом Национального фонда научных исследований США (National Science Foundation) DMS-1818882.

удовлетворяющим условию Дирихле на границе. Здесь $w = |J|$ – весовая функция. При выполнении условия допустимости (смотри ниже определение), задача (3) имеет единственное решение. В работе [18] единственность решения задачи установлена и для более общего случая $u \in BV(\Omega)$. При этом, допускается, что весовая функция w может быть равна 0 на некоторых подмножествах Ω . В работе [11] весовая функция w может и не удовлетворять условию $w = |J|$. Вместо этого, предполагается, что $w \in C^{1,1}(\Omega)$, причем в противном случае единственность не имеет места. Например, для $w \in C^{1,\nu}$, $\nu \in (0, 1)$. Если потенциал u определяется в Ω , то проводимость находится в виде $\sigma = |J|/|\nabla u|$.

В работе [22] вариационная задача (3) рассматривается с граничными условиями, описывающими реальные электроды, а в [32] – с граничными условиями типа Робина. Эффективные вычислительные процедуры для построения минимизирующих последовательностей для этих вариационных задач разработаны в работах [17, 20, 22, 32]. В работах [19, 21, 31] также предложены методы, использующие реконструкцию поверхностей уровня решений для гибридной задачи визуализации электрической проводимости. Однако, вычислительные алгоритмы, особенно те из них, которые основаны на реконструкции поверхностей уровня, чувствительны к шумам в данных w при уровнях шума, превышающих 1%. В результате, пространственно-контрастное разрешение изображений, реконструированных из данных, возмущенных реальными шумами, недостаточно высокое. В работе [32] показано, что регуляризация вариационной задачи (3) может до некоторой степени улучшить разрешающую способность алгоритмов, однако, не до такой, которую хотелось бы иметь в практике медицинской диагностики. Это мотивирует проведение дальнейших разработок других численных методов, обеспечивающих лучшее пространственно – контрастное разрешение реконструированных изображений. В этой статье предлагается один из таких методов. В нем используется аналогия с уравнениями движения потока под влиянием средней кривизны поверхности уровня решения, рассматриваемыми в дифференциальной геометрии [7, 8, 30]. Заметим, однако, что в этой статье мы фокусируемся главным образом на вычислительных аспектах метода и демонстрации его вычислительной эффективности.

В работах [13, 19] показано, что гибридная обратная задача визуализации электрической проводимости может быть сведена к решению 1-Лапласиана в конформной евклидовой метрике. Формально, это уравнение может быть получено простой заменой σ в 1) на $w/|\nabla u|$ в соответствии с законом Ома. Получившееся нелинейное дифференциальное уравнение имеет вид

$$\nabla \cdot \left(w(x) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0.$$

Нетрудно видеть, что это есть уравнение Эйлера-Лагранжа для функционала в задаче (3). Поскольку дифференциальный оператор в левой части уравнения является сингулярным и эллиптически-вырожденным, классические результаты, а также существующие численные методы, неприменимы. Более того, в работах [20, 30] показано, что для обобщенных решений типа вязкости имеет место неединственность в задаче Дирихле даже при $w \equiv 1$.

По аналогии с уравнениями движения потока под влиянием средней кривизны поверхности уровня решения при $w \equiv 1$ из дифференциальной геометрии, вводится в рассмотрение уравнение движения потока под влиянием весовой средней кривизны

$$u_t = |\nabla u| \nabla \cdot \left(w(x) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \text{ в } \Omega \times (0, \infty), \quad (4)$$

вместе с граничным условием Дирихле и начальным условием

$$u = f(x) \text{ на } \partial\Omega \times [0, \infty), \quad (5)$$

$$u = u_0 \text{ в } \bar{\Omega} \times \{0\}, \quad (6)$$

где $u_t/|\nabla u|$ – нормальная скорость движения поверхности уровня решения и $\nabla \cdot (\nabla u/|\nabla u|)$ – средняя кривизна поверхности везде в Ω , где ∇u не равен нулю.

Существование и единственность обобщенного решения с вязкостью установлены в работе [30] при $w \equiv 1$. При условии, что весовая функция достаточно гладкая, положительная и ограничена снизу положительной константой доказательства из работ [8, 30] могут быть использованы с очень незначительными изменениями для доказательства существования и единственности обобщенного решения задачи (4)–(6) и в общем случае $w > 0$. Кроме того, если f и u_0 являются C^2 -гладкими, то решение – является липшецевой в $\bar{\Omega} \times [0, \infty)$. Хотя наличие этих

свойства позволяет рассматривать задачу (4)–(6) в качестве самостоятельной математической модели визуализации электрической проводимости, уравнение (4) является сингулярным и параболически вырожденным.

Чтобы адаптировать модель (4)–(6) для вычислительной практики, мы регуляризуем ее в смысле Эванса–Спрака [8] и Личневского–Темама [16]. То есть, для фиксированных числовых параметров $\varepsilon, \alpha > 0$ рассмотрим регуляризованную начально-краевую задачу

$$u_t^{(\varepsilon\alpha)} = S_\varepsilon^{-1}(u^{(\varepsilon\alpha)})\nabla \cdot \left(w(x)\nabla u^{(\varepsilon\alpha)} S_\varepsilon(u^{(\varepsilon\alpha)}) \right) + \alpha \Delta u^{(\varepsilon\alpha)} \text{ in } \Omega \times (0, \infty), \quad (7)$$

$$u^{(\varepsilon\alpha)} = f(x) \text{ on } \partial\Omega \times [0, \infty), \quad (8)$$

$$u^{(\varepsilon\alpha)} = u_0(x) \text{ in } \bar{\Omega} \times \{0\}, \quad (9)$$

где $S_\varepsilon(p) = (\varepsilon^2 + |\nabla p|^2)^{-1/2}$. Как известно (теорема 4.2 из [15]), эта задача имеет классическое единственное решение, которое Hölder-непрерывно на $\bar{\Omega} \times [0, \infty)$. Заметим также, что если w дифференцируемо в Ω , то уравнение (7) также можно записать в недивергентной форме

$$u_t^{(\varepsilon\alpha)} = w \left[\left(1 + \frac{\alpha}{w}\right) \delta_{ij} - S_\varepsilon^2(u^{(\varepsilon\alpha)}) u_{x_i}^{(\varepsilon\alpha)} u_{x_j}^{(\varepsilon\alpha)} \right] u_{x_i x_j}^{(\varepsilon\alpha)} + \nabla w \cdot \nabla u^{(\varepsilon\alpha)}, \quad (10)$$

где δ_{ij} есть символ Кронекера. Заметим, что при записи уравнения использовано соглашение о суммировании.

Регуляризованная задача хорошо приспособлена для построения ее конечно-разностного аналога и конечно-разностных аппроксимаций регуляризованного решения $u^{(\varepsilon\alpha)}$, что продемонстрировано в [34]. По аналогии с [2], преимущества использования регуляризованной задачи могут быть также артикулированы в терминах обработки изображений. Действительно, выражение в скобках в (4) или (7) может быть интерпретировано как диффузионный член, сглаживающий изображение при эволюции в направлениях, ортогональных его градиенту. Это означает, что изображение сглаживается в основном там, где градиент мал, и почти не сглаживается там, где градиент достаточно большой. Уравнения движения потока под влиянием средней кривизны поверхности уровня решения с успехом используются в вычислительной правктике для устранения шума и реставрации изображений [24, 37]. Поскольку возмущенные данные имеют большую среднюю кривизну, шум подавляется, тогда как скачки, ответственные за контрастное разрешение, хорошо реконструируются.

С точки зрения вычислительной математики, основная проблема заключается в построении вычислительных алгоритмов, обеспечивающих сходимость регуляризованных решений $u^{(\varepsilon\alpha)}(x, t)$ к решению гибридной обратной задачи визуализации электрической проводимости, то есть, к некоторому стационарному решению, при $t \rightarrow \infty$ и $\varepsilon, \alpha \rightarrow 0$. Это обусловлено тем, что задача (4)–(6) может иметь континуум стационарных (equilibria) решений даже при $w \equiv 1$ [30]. В этой статье при условии допустимости данных и определенных условиях на w устанавливается равномерная сходимость к единственному решению вариационной задачи (3), то есть, к функции наименьшего градиента с весом. В вычислительных экспериментах демонстрируется, что указанные пределы коммутируют, то есть, имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\alpha \rightarrow 0} u^{(\varepsilon\alpha)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} u^{(\varepsilon\alpha)}.$$

Статья организована следующим образом. В следующей секции формулируются некоторые достаточные условия равномерной сходимости регуляризованных решений к функции наименьшего градиента с весом. В секции 3 дается описание предлагаемого численного метода приближенного решения гибридной обратной задачи визуализации электрической проводимости. §4 посвящен описанию вычислительных экспериментов и их результатов. Статья завершается некоторыми замечаниями в секции 5.

§2. СХОДИМОСТЬ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ

Прежде всего, сформулируем условия единственности решения вариационной задачи (3), поскольку для произвольной весовой функции w решения этой задачи могут не удовлетворять задаче (1)–(2), то есть, они могут быть лишены физического смысла. Чтобы устранить возможность этого, вводится условие допустимости данных f и $w = |J|$, [20].

Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с липшецевой границей $\partial\Omega$. Пара данных $(f, w) \in H^{1/2}(\partial\Omega) \times L^2(\Omega)$ называется допустимой если найдется электрическая проводимость $\sigma \in L^\infty$, удовлетворяющая неравенствам

$$0 < \sigma_* \leq \sigma \leq \sigma^*, \quad \sigma_*, \quad \sigma^* = \text{const}, \quad (11)$$

и такая, что если $u \in H^1(\Omega)$ есть обобщенное решение задачи (1)–(2), то $\sigma|\nabla u| = w$. В этом случае функция σ порождает пару данных (f, w) .

Заметим также, что условие (11) является естественным для многих приложений.

Исходя из физического содержания обратной задачи, мы будем полагать, что (11) влечет соответствующее условие

$$0 < w_* \leq w \leq w^*, \quad w_*, w^* = \text{const} \quad (12)$$

почти всюду в Ω , хотя, насколько известно автору, доказательство истинности такой импликации отсутствует в литературе.

Утверждение 1. [20] Пусть граница $\partial\Omega$ — $C^{1,\nu}$ -гладкая и связная, $\nu \in (0, 1)$. Пусть пара данных $(f, w) \in C^{1,\nu}(\partial\Omega) \times C^\nu(\bar{\Omega})$ является допустимой и порожденной некоторой электрической проводимостью $\sigma \in C^\nu(\bar{\Omega})$. Предположим, что $w > 0$ почти всюду в Ω . Тогда вариационная задача (3) разрешима единственным образом. Если \hat{u} есть ее решение в C^ν , то $\hat{\sigma} = w/|\nabla\hat{u}|$ есть единственная электрическая проводимость, генерирующая w в Ω при f на $\partial\Omega$.

Подчеркнем, что условие связности границы является критическим при доказательстве единственности. В его отсутствие единственность не может быть гарантирована. В работе [11] при доказательстве единственности в $BV(\Omega)$ условия допустимости не требуется, но вместо его весовая функция w должна удовлетворять (12) и $w \in C^{1,1}(\Omega)$. Поскольку условие допустимости отражает физическое содержание обратной задачи, мы сохраним его в дальнейшем. Кроме того, здесь и далее предполагаются выполненными следующие условия:

- (i) $\Omega \subset R^n$ — ограниченная C^2 -гладкая область, ее граница $\partial\Omega$ — липшецева, связная и имеет положительную среднюю кривизну, ограниченную снизу положительной константой;
- (ii) $f \in C^2(\partial\Omega)$, $u_0 \in C^2(\bar{\Omega})$ и $w \in C^{1,\nu}$, $\nu \in (0, 1)$ удовлетворяет (12).

При выполнении этих условий из [30] следует, что $u^{(\varepsilon\alpha)}$ является классическим решением задачи (10), (8), (9) и при $\varepsilon, \alpha \in (0, 1)$ существует константа $m > 0$, не зависящая от t и ε, α и такая, что равномерная липшецева оценка имеет место

$$\|u^{(\varepsilon\alpha)}\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega} \times [0, \infty))} \leq m. \quad (13)$$

Далее, наряду с регуляризованной задачей (7)–(9), рассмотрим ε -параметрическое семейство вспомогательных задач

$$u_t^{(\varepsilon)} = S_\varepsilon^{-1}(u^{(\varepsilon)}) \nabla \cdot \left(w(x) \nabla u^{(\varepsilon)} S_\varepsilon(u^{(\varepsilon)}) \right) \text{ in } \Omega \times (0, \infty), \quad (14)$$

$$u^{(\varepsilon)} = f(x) \text{ on } \partial\Omega \times [0, \infty), \quad (15)$$

$$u^{(\varepsilon)} = u_0(x) \text{ in } \bar{\Omega} \times \{0\}. \quad (16)$$

При фиксированном $\varepsilon > 0$ классическое решение $u^{(\varepsilon)}$ задачи получается предельным переходом $\lim_{\alpha \rightarrow 0} u^{(\varepsilon\alpha)}$ и имеет место следующее

Утверждение 2. Пусть условия (i)–(ii) выполнены. Тогда существует функция $u^{(\varepsilon)} \in C^2(\Omega \times (0, \infty))$ такая, что она является липшицевой на $\partial\bar{\Omega} \times [0, \infty)$ и $u^{(\varepsilon\alpha)}$ сходится равномерно в $\Omega \times (0, T)$ к $u^{(\varepsilon)}$, $\nabla u^{(\varepsilon\alpha)}$ и $u_t^{(\varepsilon\alpha)}$ сходятся слабо в $L^2(\Omega \times (0, T))$ к $\nabla u^{(\varepsilon)}$ и $u_t^{(\varepsilon)}$ при $\alpha \rightarrow 0$. Функция $u^{(\varepsilon)}$ удовлетворяет задаче (14)–(16) и имеет место равномерная липшицева оценка

$$\|u^{(\varepsilon)}\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega} \times [0, \infty))} \leq m. \quad (17)$$

Доказательство. Доказательство следует аргументам доказательств теоремы 2.4 из [30]. Заметим только, что вместо (2.18) в [30], для $T > 0$ и тестовой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times (0, T))$ используется выражение

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \varphi u^{(\varepsilon\alpha)} dx dt &= - \int_0^T \int_\Omega \left(1 + \frac{\alpha}{w}\right) w \nabla \varphi \cdot \nabla u^{(\varepsilon\alpha)} dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_\Omega w S_\varepsilon(u^{(\varepsilon\alpha)}) \nabla S_\varepsilon^{-1}(u^{(\varepsilon\alpha)}) \cdot \nabla u^{(\varepsilon\alpha)} \varphi dx dt. \quad \square \end{aligned}$$

Взаимосвязь между регуляризованными решениями $u^{(\varepsilon\alpha)}$ задачи (7)–(9) и функцией наименьшего градиента с весом, удовлетворяющей задаче (3), устанавливается следующим утверждением.

Утверждение 3. Пусть условия (i)–(ii) выполняются, а пара данных (f, w) является допустимой. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $v^{(\varepsilon)} \in C^\infty(\Omega)$, которая липшицева на $\bar{\Omega}$ и такая, что

(1) она удовлетворяет задаче Дирихле

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla v^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\nabla v^\varepsilon|^2}} \right) = 0 \text{ в } \Omega, \quad (18)$$

$$v^\varepsilon = f \text{ на } \partial\Omega; \quad (19)$$

(2) $|\nabla v^\varepsilon| \leq m$ на $\bar{\Omega}$;

(3) $\lim_{t \rightarrow \infty} u^\varepsilon(x, t) = v^\varepsilon(x)$ равномерно в Ω .

Последовательность $\{v^\varepsilon\}$ сходится равномерно на $\bar{\Omega}$ к липшицевой функции v , являющейся единственным решением вариационной задачи (3).

Доказательство. Доказательство следует аргументам доказательств теорем 3.3 и 3.5 из [30], но вместо (3.1) в [30], для последовательности $\{t_i\}$ используется выражение

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\Omega} \varphi u^{(\varepsilon\alpha)} dx dt = - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\Omega} w S_\varepsilon(u^{(\varepsilon\alpha)}) \nabla u^{(\varepsilon\alpha)} \cdot \nabla (S_\varepsilon^{-1}(u^{(\varepsilon\alpha)})\varphi) dx dt,$$

а единственность решения вариационной задачи (3) с непрерывными граничными данными следует из утверждения 1. \square

§3. СХЕМА МЕТОДА

Представим решение задачи (7)–(9) в виде

$$u^{(\alpha\varepsilon)}(x, t) = v(x, t) + u_h(x), \quad (20)$$

где функция u_h есть решение задачи Дирихле

$$\Delta u_h = 0 \text{ в } \Omega, \quad (21)$$

$$u_h = f \text{ на } \partial\Omega \quad (22)$$

В соответствии с таким представлением, гармоническая функция u_h может быть интерпретирована как стационарная часть потенциала, индуцированного функцией f в области Ω , заполненной средой с электрической проводимостью $\sigma = 1$, тогда как потенциал $v(x, t)$, модулируемый весовой функцией w и стационарной частью, представляет собой эволюционирующую величину. Зафиксируем число $T > 0$ и обозначим через $Q_T = \Omega \times (0, T)$ пространственно-временной цилиндр.

Тогда при $u_0 = u_h$, задача (7)–(9) преобразуется в начально-краевую задачу с однородными условиями

$$v_t = S_\varepsilon^{-1}(u_h + v)\{\nabla \cdot (\sigma(x, |\nabla(u_h + v)|))\nabla v\} \quad (23)$$

$$+ \nabla \cdot (\sigma(x, |\nabla(u_h + v)|)\nabla u_h)\} \text{ в } Q_T,$$

$$v(x, t) = 0 \text{ на } \partial\Omega \times [0, T), \quad (24)$$

$$v(x, 0) = 0 \text{ в } \bar{\Omega} \times \{0\}, \quad (25)$$

где $\sigma(x, p) = w(x)S_\varepsilon(p) + \alpha$. Заметим, что представление (20) хорошо согласуется с условием из [14], в соответствии с которым равенство нулю функции $v(x, t)$ на латеральной поверхности цилиндра Q_T требуется для доказательства сходимости метода Ротэ [23]. Выбор метода Ротэ [23] для численного решения задачи (23)–(25) мотивирован тем фактом, что именно он был использован Ладыженской в [14] для доказательства существования и единственности решения задачи Дирихле для квазилинейных параболических уравнений. Ее доказательства конструктивны в рассматриваемом случае в том смысле, что они опираются на существование предела последовательности функций Ротэ. Мы используем это наблюдение применительно к задаче (23)–(25).

В соответствии с методом Ротэ, пересечем цилиндр Q_T гиперплоскостями $t_k = k\tau$, $\tau = T/K$, ($k = 0, 1, \dots, K$). Пусть Ω_k есть k -ое поперечное сечение цилиндра. Для каждого $t = t_k$ определим функцию $v_\tau(x, t_k)$, удовлетворяющую линейному эллиптическому уравнению

$$(v_\tau)_{\bar{\Omega}}(x, t_k) = S_\varepsilon^{-1}(u_h + v^{(k-1)})\{\nabla \cdot (\sigma(x, |\nabla(u_h + v^{(k-1)})|))\nabla v^{(k)}\} \\ + \nabla \cdot (\sigma(x, |\nabla(u_h + v^{(k-1)})|)\nabla u_h)\} \text{ in } \Omega_k, \quad (26)$$

и условию Дирихле на границе

$$v_\tau^{(k)} = 0 \text{ on } \partial\Omega_k, \quad (27)$$

где $v^{(k)}(x) = v_\tau(x, t_k)$. Производная по переменной t левой части уравнения (23) аппроксимируется конечной разностью

$$(v_\tau)_{\bar{\Omega}}(x, t_k) = \frac{v^{(k)}(x) - v^{(k-1)}(x)}{\tau}.$$

Таким образом, при фиксированном целом K получим конечную последовательность $\{v^{(k)}(x)\}$ решений эллиптических задач (26)–(27). Пусть $\{v_\tau(x, t)\}$ - последовательность функций $v_\tau(x, t)$, $(x, t) \in Q_T$ таких, что $v_\tau(x, 0) = 0$. В качестве примера таких функций приведем

функции Ротэ, то есть, линейные интерполлянты по переменной t

$$v_\tau(x, t) = v^{(k-1)}(x) + \frac{t - t_{k-1}}{\tau} (v^{(k)}(x) - v^{(k-1)}(x)) \text{ for } t_{k-1} \leq t \leq t_k \quad (28)$$

В работе [14] существование и единственность классического и обобщенного решений квазилинейных параболических уравнений установлены с помощью предельного перехода $v_\tau(x, t)$ при $\tau \rightarrow 0$. Применительно к рассматриваемому случаю сходимость устанавливается следующим утверждением.

Утверждение 4. Пусть Ω – ограниченная область с $C^{2,\nu}$ -гладкой границей и $w \in C^{1,\nu}(\Omega)$. Тогда для произвольного фиксированного $T > 0$ и фиксированных параметрах $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \alpha < 1$ последовательность функций Ротэ $\{v_\tau(x, t)\}$ равномерно сходится к единственному обобщенному решению $v(x, t)$ задачи (23)–(25) при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство основано на теории Шаудера [9, 25] и следует аргументам работы [14].

Таким образом, применяя метод Ротэ к задаче (23)–(25), сведем ее к семейству линейных эллиптических задач (26)–(27) с однородными условиями. Далее, для каждого $t = t_k$, $k \geq 1$ перепишем задачу (26)–(27) в виде

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma^{(k-1)} \frac{\partial v_\tau^{(k)}}{\partial x_i} \right) + q^{(k-1)}(x) v_\tau^{(k)} = F^{(k-1)}(x) \text{ in } \Omega_k, \quad (29)$$

$$v_\tau^{(k)} = 0 \text{ on } \partial\Omega_k, \quad (30)$$

где

$$g_\varepsilon^{(k)} = g_\varepsilon(|\nabla(u_h + v^{(k)})|),$$

$$\sigma^{(k)} = \frac{|J|(x)}{g_\varepsilon^{(k)}} + \alpha,$$

$$q^{(k)} = \frac{1}{\tau g_\varepsilon^{(k)}},$$

$$F^{(k)} = \nabla \cdot (\sigma^{(k)} \nabla u_h) + q^{(k)} v_\tau^{(k)}.$$

Заметим, что также как в [14], априорная оценка $|v_\tau(x, t_k)| \leq C$, $C > 0$ имеет место для всех $t_k \leq T$. В соответствии с теорией Шаудера [9, 25], ее выполнение обеспечивает единственную разрешимость задачи (29)–(30).

Несколько эффективных конечно-разностных схем опубликованы в математической литературе [6, 12, 26–28]). Без ограничения общности, рассмотрим двумерную задачу (29)–(30) и ее дискретный аналог, следуя работе [27]. Пусть $\bar{\Omega}_k$ – единичный квадрат

$$\bar{\Omega}_k = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_i \leq 1, (i = 1, 2)\}$$

на котором определены сетки

$$\begin{aligned} \bar{g} &= \{(x_1, x_2) : x_{1l} = lh, x_{2m} = mh, hN = 1, (l, m = 0, 1, \dots, N)\}, \\ g &= \{(x_1, x_2) : x_{1l} = lh, x_{2m} = mh, hN = 1, (l, m = 1, 2, \dots, N - 1)\}, \end{aligned}$$

так что $\gamma = \bar{g} \setminus g$ есть дискретная граница. На \bar{g} определим сеточную функцию $y = y_{lm}$ и на g аппроксимируем дифференциальный оператор в левой части уравнений (29) следующим образом

$$\widehat{L}y = (s_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} + (s_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2}, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} (s_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} &= \frac{1}{h^2} [(s_1)_{l+1m} (y_{l+1m} - y_{lm}) - (s_1)_{lm} (y_{lm} - y_{l-1m})], \\ (s_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2} &= \frac{1}{h^2} [(s_2)_{lm+1} (y_{lm+1} - y_{lm}) - (s_2)_{lm} (y_{lm} - y_{lm-1})], \\ (s_1)_{lm} &= \frac{1}{2} [\sigma(x_{1l-1}, x_{2m}) + \sigma(x_{1l}, x_{2m})], \\ (s_2)_{lm} &= \frac{1}{2} [\sigma(x_{1l}, x_{2m-1}) + \sigma(x_{1l}, x_{2m})]. \end{aligned}$$

Обозначив $\widehat{q} = q(x_{1l}, x_{2m})$, $\widehat{F} = F(x_{1l}, x_{2m})$, получим следующую конечно-разностную схему

$$-Ly + \widehat{q}y = \widehat{F}, \quad x \in g, \quad (32)$$

$$y = 0, \quad x \in \gamma. \quad (33)$$

Как следует из [27], эта схема аппроксимирует задачу (29)–(30) со вторым порядком. Если $v(x, t)$ является классическим решением этой задачи, то сходимость разностной задачи в дискретных L_2 и W_2^1 нормах следует из [27]. Кроме того, имеют место оценки погрешности

$$\begin{aligned} \|y - \widehat{v}\|_{L_2} &\leq \mu_1 h^2, \quad \|u - \widehat{v}\|_{W_2^1} \leq \mu_2 h^{3/2} \text{ если } w \text{ гладкий,} \\ \|u - \widehat{v}\|_{W_2^1} &\leq \mu_3 h^{1/2} \text{ если } w \text{ разрывный,} \end{aligned}$$

где $\hat{v} = v(x_{1l}, x_{2m})$, а константы $\mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0$ не зависят от h . Аналогичные оценки также имеют место и для обобщенных решений этой задачи [12]).

Пусть H – множество всех дискретных функций y на \bar{g} , которые равны нулю на границе γ . Если ввести в H норму и скалярное произведение следующим образом

$$\|z\| = (z, z)^{1/2}, \quad (z, w) = h^2 \sum_{l,m=1}^N z_l w_m,$$

то множество H будет пространством Гильберта, а схема (32)–(33) может быть интерпретирована как операторное уравнение

$$Dy = \hat{F}, \quad y, \hat{F} \in H, \quad (34)$$

где

$$Dy = -[(s_1 y_{\bar{x}_1})_{x_1} + (s_2 y_{\bar{x}_2})_{x_2}] + \hat{q}y.$$

Как известно из [28], используя разностный аналог формулы Грина, можно показать, что оператор $D : H \rightarrow H$ является положительно-определенным и самосопряженным. Следовательно, соответствующая матрица D является симметричной и положительно-определенной. Ее спектр состоит из положительных действительных собственных значений и он ограничен. В этом случае, существует ограниченная обратная матрица D^{-1} и, следовательно, операторное уравнение (34) имеет единственное решение. Матрица D системы (34) есть симметричная ленточная матрица, состоящая из пяти диагоналей. Ее ненулевые элементы сосредоточены на главной диагонали, на обеих над- и поддиагоналях, смежных с главной, и на двух, удаленных от главной диагоналях. Ширина ленты равна расстоянию между главной диагональю и любой удаленной от нее.

В ходе вычислительных экспериментов наблюдалось, что при достаточно малых значениях параметров α и ε и шага h и при достаточно больших вариациях $\sigma^{(k)}$, даже малые изменения элементов матрицы D и правой части \hat{F} могут привести к существенным изменениям решения уравнения (34). При таких условиях, численные методы, основанные на использовании подпространств Крылова, такие, например, как метод сопряженных градиентов, либо не обеспечивают численную сходимость, либо обладают очень малой скоростью сходимости. К счастью, существуют вычислительные процедуры, предобуславливатели, существенно понижающие число обусловленности матрицы (смотри,

например, обзоры [4, 5]). Такие процедуры гарантируют численную сходимость за приемлемое время. В наших вычислительных экспериментах для численного решения (34) использовалась одна из таких процедур – неявная версия предобусловленного метода сопряженных градиентов [28], в котором ошибка на каждой итерации минимизируется в энергетической норме и определяется корректирующий вектор из подпространства Крылова.

§4. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

В предыдущем параграфе показано, что в достаточно большой момент времени t и при достаточно малых параметрах ε, α регуляризованные решения хорошо аппроксимируют функцию наименьшего градиента с весом. Однако, неизвестно имеет ли место сходимость решений дискретного аналога задачи (7)–(9) к регуляризованным решениям. Существуют два способа ответить на этот вопрос. Можно попытаться исследовать аналитически эффект дискретизации регуляризованных решений или изучить численную сходимость. Имея ввиду наше намерение продемонстрировать вычислительную эффективность предложенного метода, выберем второй способ. В ходе исследований все вычисления производятся с двойной точностью на рабочей станции Dell Precision T5400 с использованием программного обеспечения IDL (Interactive Data Language).

4.1. Моделирование данных. Вычислительные эксперименты проводятся в плоской области $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, а для моделирования электрической проводимости используются две функции. Одна из них полагается C^∞ -гладкой и дается в виде

$$\begin{aligned} \sigma(x_1, x_2) = & 1.1 + 0.3 \left\{ 0.3(1 - 3z)^2 \cdot \exp[2z^2 + (3w - 2)^2] \right. \\ & - \left(\frac{3}{5}z - 27z^3 - (3(w - 1))^5 \right) \cdot \exp[9z^2 + 9(w - 1)^2] \\ & \left. - \exp[(3z + 1)^2 + 9(w - 1)^2] \right\}, \end{aligned}$$

где $z = 2x_1 - 1$, $w = 2x_2$. Вторая модельная функция конструируется из реального абдоминального СТ изображения человеческого тела. При этом единицы Хаунсфилда пересчитываются в единицы электрической проводимости со значениями в интервале $[1, 1.8]$ S/m, типичном для биологических тканей. Поскольку реальное СТ изображение имеет

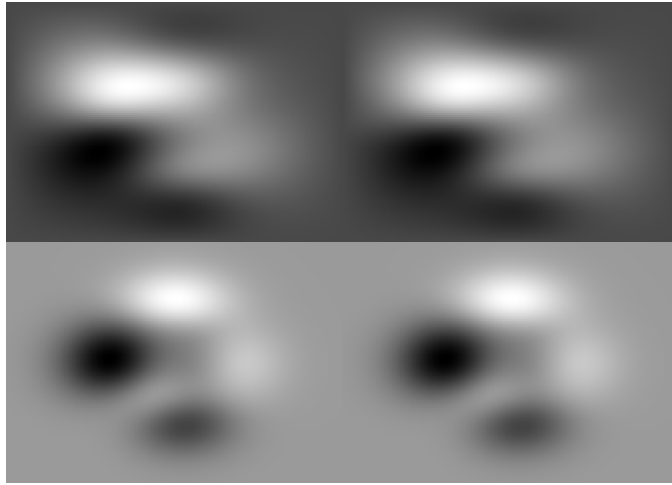


Рис. 1. C^∞ -гладкая модель. Изображения в первом столбце: u^* и σ^* для два-к-одной граничной функции. Во втором - u^* и σ^* для много-к-одной граничной функции при $A = 0.1, k = 9$.

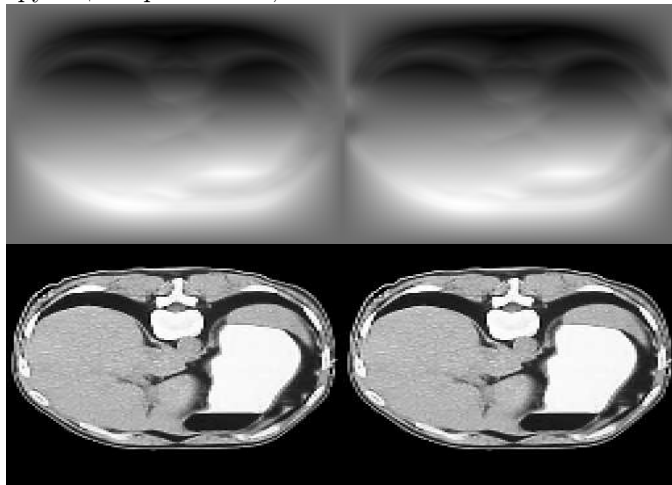


Рис. 2. Квазиреальная модель. Изображения в первом столбце: u^* и σ^* для два-к-одной граничной функции. Во втором - u^* и σ^* для много-к-одной граничной функции при $A = 0.1, k = 9$.

пиксельную структуру, вторая модельная функция является кусочно-постоянной. Для обеих модельных функций $\sigma_* = 0.9$ S/m и $\sigma^* = 2$ S/m. В [20] показано, что в плоской области условие допустимости данных эквивалентно требованию задания граничного потенциала f в форме так называемой два-к-одному функции. Такое условие гарантирует единственность решения вариационной задачи (3). Напомним, что граничная функция называется два-к-одному, если множество ее локальных максимумов состоит из одного элемента или одной связанной дуги на границе плоской области. Поэтому, при моделировании f используются две непрерывные функции, определенные на сторонах единичного квадрата. Одна из этих функций является два-к-одному и задается формулой

$$f_1(x_1, x_2) = x_2,$$

тогда как другая является много-к одному функцией и описывается выражением

$$f_2(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2) + A \sin(k\pi x_2),$$

где $0 < A < 1$ – действительное число и $k \geq 2$ есть целое. По заданной

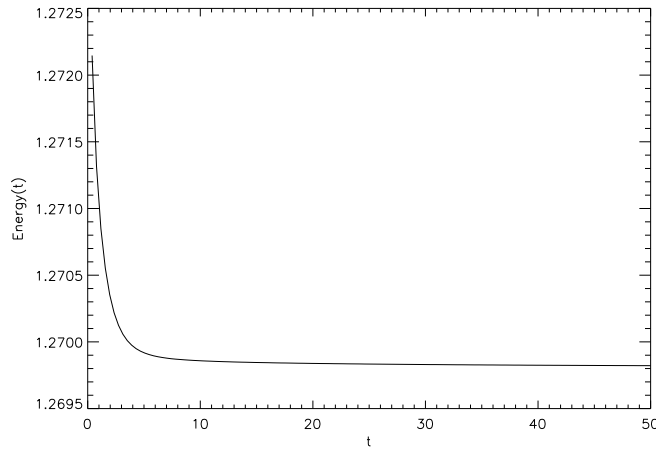


Рис. 3. Зависимость энергетического функционала от времени при $u_0 = u_h$.

паре (σ, f) сначала решается численно прямая задача (1)–(2) стандартным методом Галеркина. Пусть u_s есть ее решение. Тогда данные w

в Ω вычисляются по формуле $w = \sigma|\nabla u_s|$ чтобы обеспечить выполнение условия допустимости. Чтобы обеспечить приемлемую точность вычислений элементы базиса и шаг сетки аккуратно выбирались методом проб и ошибок. Таким образом, в вычислительных экспериментах с несколькими тестовыми задачами был выбран базис первого порядка, число элементов которого составило десятки тысяч. Такой выбор позволил обеспечить погрешность вычислений данных порядка 10^{-5} .

Далее, смоделированная пара данных (f_1, w) сначала используется для нахождения решения u_g вариационной задачи (3) и соответствующей проводимости σ_g . Для этого используется алгоритм типа Пикара [20]. При использовании пары (f_2, w) применяется алгоритм типа Брегмана [17], поскольку он обеспечивает лучшую точность. Пары функций (u, σ) показаны на рис. 1 для гладкой модельной проводимости и на рис. 2 – соответствующие пары для кусочно-постоянной модели.

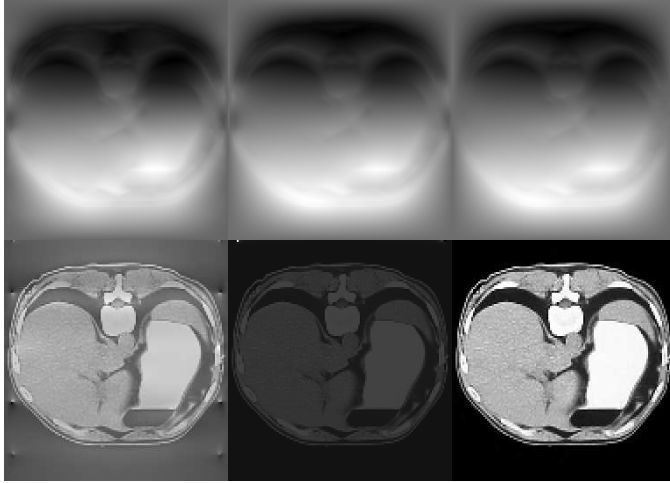


Рис. 4. Верхняя строка слева направо: изображения реконструированного потенциала $u^{(\alpha\epsilon)}$ при $\alpha = 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-5}$. Нижняя строка: соответствующие реконструированные проводимости $\sigma^{(\alpha\epsilon)}$.

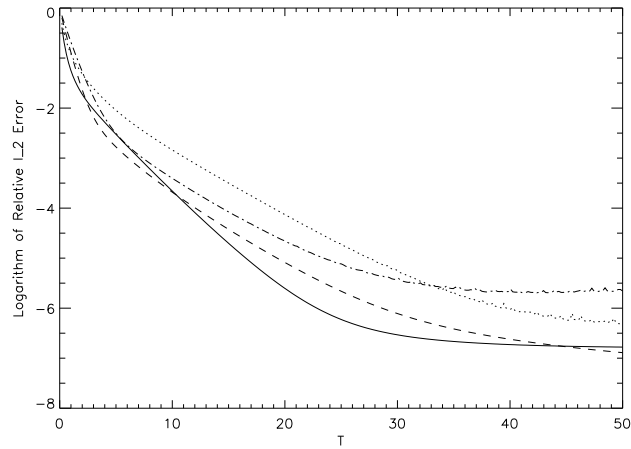


Рис. 5. Зависимость относительной погрешности от T : сплошная линия – гладкая функция проводимости и два-к-одному граничная функция, пунктирная линия – гладкая функция проводимости и много-к-одному граничная функция, штриховая линия – кусочно-постоянная функция проводимости и два-к-одному граничная функция, штрих-точечная линия – кусочно-постоянная функция проводимости и много-к-одному граничная функция.

4.2. Численное исследование поведения регуляризованных решений при больших значениях времени t . В этой секции мы продемонстрируем численную сходимость предложенного метода, то есть, покажем, что регуляризованные решения $u^{(\alpha\varepsilon)}$ сгущаются вблизи решения u_g вариационной задачи (3) при возрастании t и стремлении регуляризирующих параметров α and ε к нулю. В работе [20] доказано, что энергетический функционал в (3) не возрастает при $t \rightarrow \infty$. Это свойство является критическим при доказательстве существования и

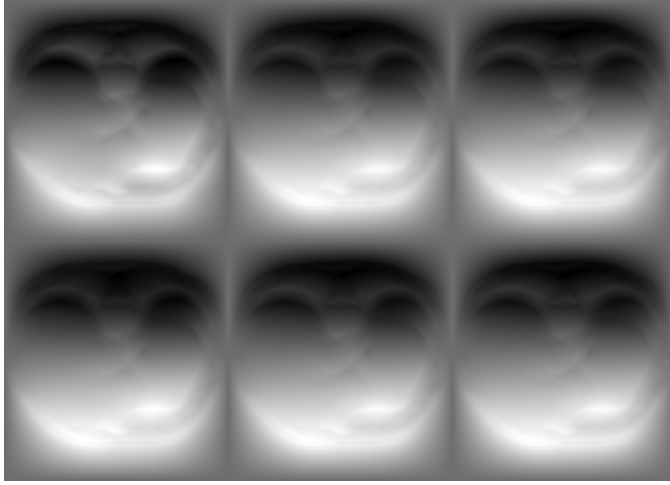


Рис. 6. В первой строке показаны изображения потенциала $u^{(\alpha, \epsilon)}$ при $T = 0.1, 1, 50$ и фиксированном $\tau = 0.195$, в во второй строке – при $\tau = 1.56, 0.39, 0.195$ для фиксированного $T = 50$.

единственности решения вариационной задачи (3). Поэтому, естественно ожидать аналогичного свойства и для функционала

$$\int_{\Omega} w(x) |\nabla u^{(\alpha, \epsilon)}(x, t)| dx$$

при любых фиксированных $u^{(\alpha, \epsilon)} \in (0, 1)$. Действительно, на рис. 3 видно, что функционал монотонно убывает с ростом t . При заведомо большом финальном времени $T = 100$ α -зависимость регуляризованных решений показана на рис. 4 для кусочно-постоянной модельной проводимости и много-к-одному граничной функции f_2 и $\epsilon = 10^{-5}$. При фиксированном $\alpha = 10^{-5}$ имеет место аналогичная ϵ -зависимость. На основании этих результатов, значения α и ϵ выбираются равными 10^{-5} для проведения дальнейших вычислительных экспериментов, описываемых в этой секции.

Рисунок 5 демонстрирует T -зависимость относительной ошибки

$$E = \frac{\|u^{\alpha, \epsilon} - u^*\|_2}{\|u^*\|_2}$$

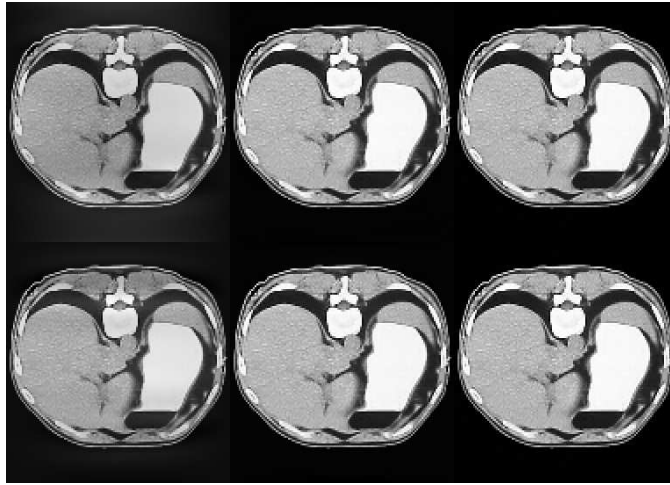


Рис. 7. В первой строке показаны $\sigma^{(\alpha\varepsilon)}$ при $T = 0.1, 1, 50$ и фиксированном $\tau = 0.195$, а во второй строке – при $\tau = 1.56, 0.39, 0.195$ и фиксированном $T = 50$.

для рассматриваемых модельных проводимостей и граничных функций. Мы наблюдаем, что в случае невозмущенных данных w относительная ошибка достигает уровня $1.17 \cdot 10^{-3}$ при $T = 50$ для обеих гладкой и кусочно-постоянной модельных проводимостей и слабо флуктуирует около этого уровня при возрастании T вследствие ошибок округлений и “обрезания” рядов и последовательностей. В случае много-к-одному граничной функции T -зависимость относительной погрешности качественно остается такой же. Однако, количественно она достигает уровней $1.84 \cdot 10^{-3}$ и $3.78 \cdot 10^{-3}$ для гладкой и кусочно-постоянной модельных проводимостей.

Напомним, что рассмотренные выше конечно-разностные схемы являются однородными и неявными. Сходимость и точность таких схем для квазилинейных параболических уравнений хорошо изучены в работе [26]. В частности, показано, что шаги τ и h могут быть выбраны независимо. Далее, мы продемонстрируем как временной шаг τ , характеризуемый числом Куранта

$$C = \max \left(\sigma(\nabla|u^{(\alpha\varepsilon)}|) \frac{\tau}{h^2} \right),$$

влияет на точность определения $u^{(\alpha\varepsilon)}$ и $\sigma^{(\alpha\varepsilon)} = w/|\nabla u^{(\alpha\varepsilon)}|$. Хотя мы демонстрируем лишь результаты для два-к-одному граничной функции и при $N = 128$ ($h = 7.81 \cdot 10^{-3}$), аналогичные результаты имеют место и для много-к-одному граничной функции. По заданному максимальному значению регуляризованной проводимости $\sigma^{(\alpha\varepsilon)}$ установлены следующие значения шага по времени 1.56, 0.39, and 0.195. Соответствующие числа Куранта равны 63935, 15983, and 7993. На рис. 6 и рис. 7 показаны регуляризованные потенциалы и проводимости $u^{(\alpha\varepsilon)}$ и $\sigma^{(\alpha\varepsilon)}$. Мы наблюдаем, что при вычислениях с конечной точностью имеет место эффект так называемого насыщения, когда существуют T и C или τ такие, что дальнейшее увеличение T и уменьшения C не приводит к существенному повышению точности.

4.3. Робастность. Для моделирования возмущенных данных \tilde{w} используется простая стохастическая модель аддитивного нормально-распределенного шума

$$\tilde{w} = w + \delta \cdot \frac{\|w\|_2}{\|R\|_2} R, \quad (35)$$

где $\delta > 0$ – уровень шума и $R = R(0, 1)$ – нормально распределенная псевдо-случайная матрица с нулевым средним и стандартным отклонением 1. Оригинальные и возмущенные данные с уровнем шума 5% для гладкой и кусочно-постоянной модельных проводимостей показаны на рис. 8. Чтобы обеспечить стохастичность данных \tilde{w} , псевдо-случайная матрица R генерируется двадцать раз и выборка из реконструированных проводимостей формируется для каждого заданного уровня шума δ . На рис. 9 демонстрируются средние по каждой выборке при $T = 50$, $K = 256$. Также как в работе [2], мы наблюдаем, что регуляризованная средняя кривизна обуславливает диффузию потенциала $u^{(\alpha\varepsilon)}$ лишь в направлениях, ортогональных градиенту $\nabla u^{(\alpha\varepsilon)}$. Из этого следует, что в процессе эволюции при $t \rightarrow \infty$ начальное условие $u_0^{(\alpha\varepsilon)}$ вырождается, а потенциал $u^{(\alpha\varepsilon)}$ подвергается диффузии везде, кроме многообразий, где градиент $\nabla u^{(\alpha\varepsilon)}$ достаточно большой.

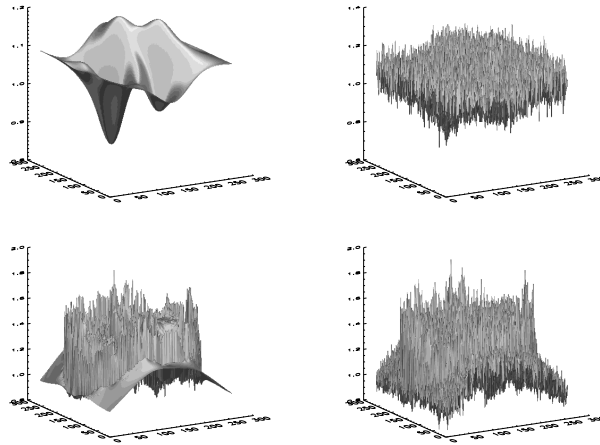


Рис. 8. В первой строке показаны затененные поверхности w и \tilde{w} для гладкой модельной проводимости, а во второй строке – для кусочно-постоянной модельной проводимости. Уровень шума равен 5%.

§5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Предложен новый метод численного решения гибридной обратной задачи визуализации электрической проводимости, основанный на использовании регуляризованного уравнения движения потока под влиянием взвешенной средней кривизны поверхности уровня решения. Предложенный метод является альтернативой существующему методу, основанному на решении задачи о нахождении функции наименьшего градиента с весом. Практическая реализация и вычислительная эффективность предложенного метода продемонстрированы в вычислительных экспериментах. В частности показано, что при достаточно большом времени эволюции регуляризованные решения хорошо аппроксимируют функцию наименьшего градиента с весом при использовании возмущенных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Acar, C. R. Vogel, *Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems*. — *Inverse Problems* **10** (1994), 1217–1229.

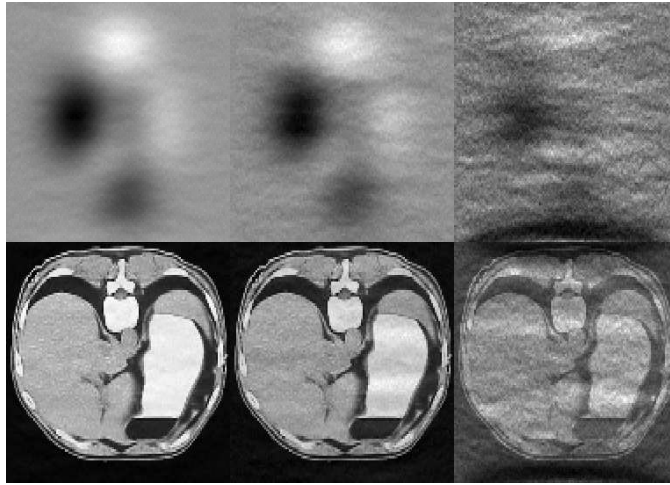


Рис. 9. В первой строке показаны средние реконструированные проводимости для гладкой модели при уровне шума 0.5, 1, 5%. Во второй строке – для кусочно-постоянной модели при тех же уровнях шума.

2. L. Alvarez, P.-L. Lions, J.-M. Morel, *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion II*. — SIAM J. Numer. Anal., **29** (1992), 845–866.
3. A. Bakushinsky, A. Goncharsky, *Ill-Posed Problems: Theory and Applications*. Springer, New York, 1999.
4. M. Benzi, M. Tuma, *A comparative study of sparse approximate inverse preconditioners*. — Appl. Num. Math., **30** (1999), 305–340.
5. M. Benzi, *Preconditioning techniques for large linear systems: A survey*. — J. Comp. Phys., **182** (2002), 418–477.
6. J. H. Bramble, B. E. Hubbard, T. Vidar, *Convergence estimates for essentially positive type discrete Dirichlet problem*. — Math. Comput., **23** (1969), 695–709.
7. Y.-G. Chen, Y. Giga, S. Goto, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*. — J. Differ. Geom., **33** (1991), 749–786.
8. L. C. Evans, J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature. I*. — J. Differ. Geometry, **33** (1991), 635–681.
9. D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 2001.
10. V. Isakov, *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Springer, 2nd ed., New York, 2006.
11. R. L. Jerrard, A. Moradifam, A. Nachman, *Existence and uniqueness of minimizers of general least gradient problems*. — J. Reine Angew. Math., **734** (2018), 71–97.

12. B. S. Jovanović, E. Süli, *Analysis of Finite Difference Schemes for Linear Partial Differential Equations with Generalized Solutions*. Springer, London, 2014.
13. S. Kim, O. Kwon, J. K. Seo et al., *On a nonlinear partial differential equation arising in magnetic resonance electrical impedance tomography*. — SIAM J. Math. Anal., **34** (2002), 511–526.
14. O. A. Ladyzhenskaya, *Solution of the first boundary problem in the large for quasilinear parabolic equations*. — Trudy Moscov. Mat. Obsč., **7** (1958), 149–177 (in Russian).
15. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Uraltseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. AMS, Providence, RI, 1968.
16. A. Lichnewsky, R. Temam, *Pseudosolutions of the time-dependent minimal surface problem*. — J. Differ. Eq., **30** (1978), 340–364.
17. A. Moradifam, A. Nachman, A. Timonov, *A convergent algorithm for the hybrid problem of reconstructing conductivity from minimal interior data*. — Inverse Problems, **28** (2012), 084003.
18. A. Moradifam, A. Nachman, A. Tamasan, *Uniqueness of minimizers of weighted least gradient problems arising in conductivity imaging*. — Calculus of Variations, PDE, **57** (2018).
19. A. Nachman, A. Tamasan, A. Timonov, *Conductivity imaging with a single measurement of boundary and interior data*. — Inverse Problems, **23** (2007), 2551–2563.
20. A. Nachman, A. Tamasan, A. Timonov, *Recovering the conductivity from a single measurement of interior data*. — Inverse Problems, **25** (2009), 035014.
21. A. Nachman, A. Tamasan, A. Timonov, *Reconstruction of planar conductivities in subdomains from incomplete data*. — SIAM J. Appl. Math. **70** (2010), 3342–3362.
22. A. Nachman, A. Tamasan, J. Veras, *A weighted minimum gradient problem with complete electrode model boundary conditions for conductivity imaging*. — SIAM J. Appl. Math. **76** (2016), 1321–1343.
23. E. Rothe, *Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben*. — Math. Ann., **102** (1930), 650–670.
24. L. I. Rudin, S. Osher, E. Fatemi, *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*. — Physica D, **60** (1992), 259–268.
25. J. Schauder, *Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung*. — Math. Zeitschr., **38** (1934), 257–283.
26. A. A. Samarskii, *On the convergence and accuracy of homogeneous difference schemes for one-dimensional and multidimensional parabolic equations*. — USSR Comp. Math., Math. Phys., **2** (1963), 654–696.
27. A. A. Samarskii, I. V. Fryazinov, *On finite-difference schemes for solving the Dirichlet problem for an elliptic equation with variable coefficients in an arbitrary region*. — USSR Comp. Math., Math. Phys., **11** (1971), 109–639.
28. A. A. Samarskii, *Theory of Difference Schemes*. Marcell Decker Inc., New York, 2001.
29. G. C. Scott, M. L. Joy, R. L. Armstrong, R. M. Henkelman, *Measurement of nonuniform current density by magnetic resonance*. — IEEE Trans. Med. Imag., **10** (1991), 362–374

30. P. Sternberg, W. P. Ziemer, *Generalized motion by curvature with a Dirichlet condition*. — J. Differ. Eq., **114** (1994), 580–600.
31. A. Tamasan, A. Timonov, J. Veras, *Stable reconstruction of regular 1-harmonic maps with a given trace at the boundary*. — Appl. Anal., (2014) (<https://doi.org/10.1080/00036811.2014.918260>).
32. A. Tamasan, A. Timonov, *A regularized weighted least gradient problem for conductivity imaging*. — Inverse Problems, **35** (2019), 045006.
33. A. N. Tikhonov, A. V. Goncharsky, V. V. Stepanov, A. G. Yagola, *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems*. Springer, Dordrecht, 1995 (the original Russian edition, Moscow, Nauka, 1990).
34. A. Timonov, *Numerical solution of a regularized weighted mean curvature flow problem for electrical conductivity imaging*. — SIAM J. Sci. Comput., **41**(5) (2019), B1137–B1154.
35. C. R. Vogel, M. E. Oman, *Iterative methods for total variation denoising*. — SIAM J. Sci. Comput., **17** (1996), 227–238.
36. C. R. Vogel, *Computational Methods for Inverse Problems*. SIAM, Philadelphia, 2002.
37. W. Zhu, T. Chan, *Image denoising using mean curvature of image surface*. — SIAM J. Imag. Sci., **5** (2012), 1–32.

Timonov A. A novel method for the numerical solution of a hybrid inverse problem of electrical conductivity imaging.

A novel method for the numerical solution of a hybrid (coupled physics) inverse problem is proposed. Based on a regularized weighted mean curvature flow equation, this method can be considered as an alternative to the variational approach to solving weighted least gradient Dirichlet problems arising in electrical conductivity imaging, in particular, in Current Density Impedance Imaging (CDII). Utilizing the Sternberg-Ziemer arguments, convergence of regularized solutions to a unique function of weighted least gradient is established. The numerical convergence study is also conducted to demonstrate the computational effectiveness of the proposed method.

Ст.-Петербургское отделение
Математического Института
им. В. А. Стеклова
Российской Академии Наук,
Ст.-Петербург, Россия;
University of South Carolina Upstate,
Spartanburg, USA
E-mail: altim@pdmi.ras.ru

Поступило 11 сентября 2020 г.