Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 499, 2021 г.

Е. А. Лебедева, И. А. Щербаков

МАСШТАБИРУЮЩИЕ МАСКИ ЖЁСТКИХ ФРЕЙМОВ ВСПЛЕСКОВ

§1. Введение

Фреймы всплесков, как переполненные системы, дают вариативность и быстрые вычислительные алгоритмы, необходимые для представления данных, с которыми исследователи имеют дело при обработке сигналов, математическом моделировании, анализе временных рядов. Жесткие фреймы всплесков имеют в этих вопросах преимущество, поскольку для жесткого фрейма всегда легко найти канонический двойственный. Одним из главных средств построения жестких фреймов всплесков является унитарный принцип расширения (УПР) Рона и Шена [1, 2]. Напомним его для полноты изложения.

Унитарный принцип расширения. Пусть $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ – масштабирующая функция, то есть она удовлетворяет масштабирующему уравнению

$$\widehat{\varphi}(\xi) = m_0(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2) \text{ п.в.}, \tag{1}$$

при этом функция $m_0 \in L_2(0, 1)$ называется масштабирующей маской. Пусть $\widehat{\varphi}$ непрерывна в нуле, а $m_1, \dots, m_r$ – 1-периодические функции из $L_2(0, 1)$, называемые масками всплесков, такие что матрица

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} m_0(\xi) & m_1(\xi) & \dots & m_r(\xi) \\ m_0(\xi+1/2) & m_1(\xi+1/2) & \dots & m_r(\xi+1/2) \end{pmatrix}$$

удовлетворяет уравнению

$$M(\xi)M^*(\xi) = I_2, \text{ п.в.}, \tag{2}$$

где I_2 – единичная матрица второго порядка. Определим в Фурье-области всплеск-функции $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r)}$ так

$$\widehat{\psi^{(k)}}(\xi) = m_k(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2) \text{ п.в.}, k = 1, \dots, r \tag{3}$$

Ключевые слова: масштабирующие маски, элементарные симметрические полиномы, жесткие фреймы всплесков.

Первый автор поддержан грантом Российского Научного Фонда No. 18-11-00055 (Постановка задачи, теорема 2 и часть теоремы 4 принадлежат первому автору.)

Тогда система функций $\psi^{(k)}_{j,k}$, $j,k \in \mathbb{Z}$, $k = 1,\dots,r$, образует жесткий фрейм в $L_2(\mathbb{R})$ с границами $A = B = |\widehat{\varphi}(0)|^2$.

Петухов в [3] показал, что общая постановка вместе с неравенством

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + 1/2)|^2 \leqslant 1 \text{ п.в.}, \tag{4}$$

всегда обеспечивает решение матричного уравнения (2) и реализует схему УПР. В результате получаются фреймы с двумя всплесковыми генераторами $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$. Точнее, имеет место следующая теорема.

Теорема 1 ([3]). *Если функция $\widehat{\varphi} \in L_2(\mathbb{R})$ непрерывна в нуле, удовлетворяет* (1)*, и ее маска удовлетворяет* (4)*, то существуют функции $\psi^{(1)}, \psi^{(2)} \in L_2(\mathbb{R})$, такие что система $\psi^{(k)}_{j,k}$, $j,k \in \mathbb{Z}$, $k = 1,2$, образует жесткий фрейм в $L_2(\mathbb{R})$.*

Можно строить фреймы всплесков, начиная с масштабирующей маски. В этом случае масштабирующая функция определяется с помощью бесконечного произведения $\widehat{\varphi}(\xi) = \prod\limits_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j)$, и нужно проверять, что $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$. Это можно сделать с помощью следующего результата.

Теорема Малла ([4, Лемма 4.1.3]). Пусть $m_0(\xi) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k\xi}$, $m_0(0) = 1$, $c_k = O(|k|^{-2-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, и выполняется (4). Определим $\widehat{\varphi}(\xi) = \prod\limits_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j)$. Тогда $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, and $\|\varphi\| \leqslant 1$.

В этой работе мы получаем условия, достаточные для того, чтобы тригонометрический полином был масштабирующей маской некоторого жесткого фрейма всплесков. Прежде всего, внимательное чтение процитированных теорем показывает, что неравенство (4) на самом деле уже обеспечивает условия, при которых тригонометрический полином является масштабирующей маской некоторого жесткого фрейма всплесков. А именно, имеет место

Теорема 2. *Если m_0 – тригонометрический полином, $m_0(0) = 1$, и m_0 удовлетворяет* (4)*, тогда m_0 является является масштабирующей маской некоторого жесткого фрейма всплесков.*

Доказательство. Пусть m_0 – тригонометрический полином и $m_0(0)$=1. Хорошо известно, что $\widehat{\varphi}(\xi) = \prod\limits_{j=1}^{\infty} m_0(\xi/2^j)$ – целая функция экспоненциального типа, поэтому $\widehat{\varphi}$ непрерывна в нуле. Если дополнительно m_0 удовлетворяет неравенству (4), тогда, согласно теореме Малла, $\widehat{\varphi}(\xi) \in L_2(\mathbb{R})$. И из теоремы 1 следует, что $\widehat{\varphi}$ является Фурье-образом масштабирующей функции и, значит, порождает жесткий фрейм по УПР. □

Из теоремы 2 видно, что неравенство (4) – краеугольный камень для построения жестких фреймов. Поэтому в остальной части статьи мы получаем условия, при которых тригонометрический полином m_0 удовлетворяет неравенству (4). Мы формулируем эти условия в терминах корней полинома. Следует отметить, что в случае ортогональных всплесков условия на масштабирующие маски намного ограничительнее (см. [4, теорема 4.1.2]). Дальнейшее изложение в статье построено следующим образом. В разделе 2, мы сначала рассматриваем полиномы малых степеней (2 и 3) и получаем для них не только достаточные, но и необходимые условия для выполнения (4). Эти результаты приведены в предложении 1 и предложении 2. Затем в теореме 3 мы рассматриваем полином произвольной степени и получаем наше главное достаточное условие для выполнения (4). Частный, легко проверяемый случай теоремы 3 сформулирован в следствии 2. Наконец, мы собираем все наши находки в теореме 4. В разделе 3, представлен код на $C++$ для проверки достаточного условия, найденного в теореме 3.

§2. Результаты

2.1. Предварительные сведения. Не умаляя общности считаем, что $m_0(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k e^{2\pi i k\xi}$. Рассмотрим алгебраический многочлен $P(z)$, ассоциированный с тригонометрическим многочленом m_0, то есть $m_0(\xi) = P(e^{2\pi i\xi})$. Тогда неравенство

$$|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 \leqslant 1 \text{ п.в. на } \mathbb{T} \tag{5}$$

равносильно (4), а $m_0(0) = 1$ выполнено тогда и только тогда, когда $P(1) = 1$.

Замечание 1. *Если многочлен $P(z)$ удовлетворяет неравенству* (5) *и условию $P(1) = 1$, то он имеет корень в точке $z = -1$.*

Замечание 2. *Если $P(1)=1$, то многочлен P может быть записан в виде $P(z)=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{z-z_i}{1-z_i}$, где $z_i\neq 1$.*

Замечание 3. *Многочлен $P(z)$ степени не ниже второй удовлетворяет (5) тогда и только тогда, когда (5) выполнено для $Q(z)=zP(z)$.*

Пусть функция ψ_{z_0} задана соотношением $z\in\mathbb{T}\to\psi_{z_0}(z)=\left|\dfrac{z-z_0}{1-z_0}\right|^2$, где $z_0\neq 1$. Если $P(z)$ имеет корни $z_1,\dots,z_n$, а также $P(1)=1$, то согласно замечанию 2 получаем $|P(z)|^2=\prod\limits_{i=1}^{n}\psi_{z_i}(z)$. Допустим, что $\alpha\in Arg(z-z_0)$ и $\beta\in Arg(z_0)$, тогда по теореме косинусов

$$\psi_{z_0}(z)=\frac{1+|z_0|^2-2|z_0|\cos\alpha}{1+|z_0|^2-2|z_0|\cos\beta},$$
$$\psi_{z_0}(e^{i\varphi})=\frac{1+|z_0|^2-2|z_0|\cos(\varphi-\beta)}{1+|z_0|^2-2|z_0|\cos\beta}$$

Обозначив $x=\operatorname{Re}z_0$ и $y=\operatorname{Im}z_0$, получаем тригонометрический полином первой степени с коэффициентами, зависящими от переменных x,y

$$\begin{aligned}\psi_{z_0}(e^{i\varphi})&=\frac{1+x^2+y^2-2x\cos\varphi-2y\sin\varphi}{1+x^2+y^2-2x}\\&=1+\frac{2x}{(x-1)^2+y^2}-\frac{2x}{(x-1)^2+y^2}\cos\varphi-\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}\sin\varphi.\end{aligned}$$

Введем обозначения для коэффициентов:

$$\begin{aligned}F_1(x,y)&=1+\frac{2x}{(x-1)^2+y^2},\\F_2(x,y)&=-\frac{2x}{(x-1)^2+y^2},\\F_3(x,y)&=-\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}.\end{aligned}\tag{6}$$

Отсюда

$$\psi_{z_0}(z)=\psi_{z_0}(e^{i\varphi})=F_1(x,y)+F_2(x,y)\cos\varphi+F_3(x,y)\sin\varphi,$$
$$\psi_{z_0}(-z)=\psi_{z_0}(e^{i(\pi+\varphi)})=F_1(x,y)-F_2(x,y)\cos\varphi-F_3(x,y)\sin\varphi.$$

Таким образом, левая часть неравенства (4) имеет вид

$$|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = \prod_{i=1}^{n} \psi_{z_i}(z) + \prod_{i=1}^{n} \psi_{z_i}(-z) =: T(\varphi). \tag{7}$$

Далее для получения условий в терминах корней $z_1, \ldots, z_n$ достаточных для того, чтобы многочлен $P(z)$ удовлетворял (4), мы изучаем тригонометрический многочлен $T(\varphi)$. Заметим, что степень T не выше n, T неотрицателен, π-периодичен и содержит мономы только с четными углами.

2.2. Простейшие случаи. В первую очередь, рассмотрим многочлен P второй степени:

Утверждение 1. *Пусть $P(z)$ – алгебраический многочлен, для которого выполнено условие $P(1) = 1$. Числа $z_1 = -1$ и z_2 – корни многочлена $P(z)$. Тогда (5) равносильно неравенству $z_2 \leqslant 0$.*

Доказательство. Заметим, что $F_1(z_1) = F_2(z_1) = \dfrac{1}{2}$ и $F_3(z_1) = 0$, а также обозначим $A = F_1(z_2)$ и $B = F_3(z_2)$. Подстановкой в (7) получаем:

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\varphi\right)(A + (1-A)\cos\varphi + B\sin\varphi) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\varphi\right)(A - (1-A)\cos\varphi - B\sin\varphi) \\ &= A + (1-A)\cos^2\varphi + B\sin\varphi\cos\varphi \\ &= \frac{1+A}{2} + \frac{1-A}{2}\cos 2\varphi + \frac{B}{2}\sin 2\varphi \\ &\leqslant \frac{1+A}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1-A)^2 + B^2}. \end{aligned}$$

Поскольку последняя оценка точна, (5) эквивалентно неравенству

$$\frac{1+A}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(1-A)^2 + B^2} \leqslant 1, \quad \sqrt{(1-A)^2 + B^2} \leqslant 1 - A.$$

$$\begin{cases} 1 - A \geqslant 0 \Leftrightarrow F_2(z_2) \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\ z_2 \leqslant 0, \\ B = 0 \Leftrightarrow F_3(z_2) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\ z_2 = 0. \end{cases} \qquad \square$$

Аналогично можно получить необходимые и достаточные условия для $n = 3$.

Утверждение 2. *Пусть $P(z)$ – алгебраический многочлен, удовлетворяющий условию $P(1) = 1$, а числа $\frac{1}{2}$, z_1 и z_2 – его корни. $A_1 = F_1(z_1)$, $A_2 = F_1(z_2)$, $B_1 = F_3(z_1)$ и $B_2 = F_3(z_2)$. Тогда (5) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$\begin{cases} 1 - A_1A_2 - B_1B_2 \geqslant 0, \\ B_1 + B_2 = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Аналогично предыдущему доказательству подставим все обозначения в (7) и получим

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\varphi\Big)\Big(A_1 + (1 - A_1)\cos\varphi + B_1\sin\varphi\Big) \\ &\times \Big(A_2 + (1 - A_2)\cos\varphi + B_2\sin\varphi\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\varphi\Big) \\ &\times \Big(A_1 - (1 - A_1)\cos\varphi - B_1\sin\varphi\Big)\Big(A_2 - (1 - A_2)\cos\varphi - B_2\sin\varphi\Big) \\ &= A_1A_2 + \cos^2\varphi\Big((1 - A_1)(1 - A_2) + (1 - A_1)A_2 + (1 - A_2)A_1\Big) \\ &+ \sin^2\varphi \cdot B_1B_2 + \cos\varphi\sin\varphi\big((1-A_1)B_2 + (1-A_2)B_1 + A_1B_2 + A_2B_1\big) \\ &= \frac{1 + A_1A_2 + B_1B_2}{2} + \cos 2\varphi\frac{1 - A_1A_2 - B_1B_2}{2} + \sin 2\varphi\frac{B_1 + B_2}{2} \\ &\leqslant \frac{1 + A_1A_2 + B_1B_2}{2} + \sqrt{\frac{(1 - A_1A_2 - B_1B_2)^2}{4} + \frac{(B_1 + B_2)^2}{4}}. \end{aligned}$$

Поскольку последняя оценка точна, (7) равносильно

$$\frac{1 + A_1A_2 + B_1B_2}{2} + \sqrt{\frac{(1 - A_1A_2 - B_1B_2)^2}{4} + \frac{(B_1 + B_2)^2}{4}} \leqslant 1.$$

Это выражение может быть переписано в виде

$$\sqrt{(1 - A_1A_2 - B_1B_2)^2 + (B_1 + B_2)^2} \leqslant 1 - A_1A_2 - B_1B_2,$$

$$\begin{cases} 1 - A_1A_2 - B_1B_2 \geqslant 0, \\ B_1 + B_2 = 0. \end{cases}$$ □

Следствие 1. *Пусть $P(z)$ – алгебраический многочлен третьей степени с корнями x_1, x_2 и -1, удовлетворяющий условию $P(1) = 1$. Тогда (5) равносильно неравенству*

$$x_1x_2(x_1 + x_2 - 2) + x_1 + x_2 \leqslant 0$$

Доказательство. Заметим, что для вещественных корней $B_1{=}B_2{=}0$, поэтому условия из утверждения 2 могут быть записаны в виде

$$\Big(1{+}\frac{2x_1}{(x_1-1)^2}\Big)\Big(1{+}\frac{2x_2}{(x_2-1)^2}\Big) \leqslant 1 \Leftrightarrow 4x_1x_2{+}2x_1(x_2{-}1)^2{+}2x_2(x_1{-}1)^2 \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2(x_1+x_2-2)+x_1+x_2 \leqslant 0 \qquad \square$$

2.3. Основной результат. Теперь вернемся к общему случаю произвольной степени n. Рассмотрим тригонометрический многочлен m_0 и алгебраический многочлен P, ассоциированный с $m_0(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k e^{2\pi i k\xi}$, где $m_0(\xi) = P(e^{2\pi i\xi})$. Допустим, что корни $z_1, \ldots, z_n$ многочлена P вещественны. Обозначим $a_i = F_1(z_i, 0)$, $i \in [1..n]$ (см. (6)). Также введем обозначения для элементарных симметрических многочленов $\sigma_k = \sum\limits_{\substack{S\subset[1..n]\\ \#S=k}} \prod\limits_{j\in S} a_j$ для любого $k \in [0..n]$ и для их средних $\rho_k := \dfrac{\sigma_k}{\binom{n}{k}}$ как в [5, page 73]. Теперь есть возможность сформулировать главную теорему:

Теорема 3. *Пусть $T(\varphi)$ – тригонометрический многочлен, построенный по полиному P как в (7). Допустим, что все корни $z_1, \ldots, z_n$ многочлена P вещественны и хотя бы один из них равен -1. Тогда если*

$$\Delta^{2k}\rho_{n-2k} = \sum_{j=n-2k}^{n} \binom{2k}{n-j}(-1)^{n-j}\rho_j \geqslant 0$$

для любого $k \in [0..[\frac{n}{2}]]$, то $T(\varphi) \leqslant 1$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Так как $z_i \in \mathbb{R}$, $i \in [1..n]$, то $F_2(z_i, 0) = 1 - a_i$ и $F_3(z_i, 0) = 0$ (см. (6)). При этом функция ψ_{z_i} принимает более простую форму:

$$\prod_{i=1}^{n}\psi_{z_i}(e^{i\varphi}) = \prod_{i=1}^{n}(a_i{+}(1{-}a_i)\cos\varphi) = \sum_{k=0}^{n}\cos^k\varphi\cdot \sum_{\substack{S\subset[1..n]\\ \#S=k}}\prod_{j\in S}(1{-}a_j)\prod_{j\notin S}a_j.$$

Для тригонометрического многочлена получаем

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= \prod_{i=1}^{n} \psi_{z_i}(e^{i\varphi}) + \prod_{i=1}^{n} \psi_{z_i}(e^{i(\pi+\varphi)}) \\ &= 2\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \cos^{2k}\varphi \cdot \sum_{\substack{S\subset[1..n]\\ \#S=2k}} \prod_{j\in S}(1-a_j)\prod_{j\notin S} a_j. \end{aligned} \tag{8}$$

Во-первых, используем формулу Эйлера для косинусов с $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} \cos^{2k}\varphi &= \Big(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\Big)^{2k} = \frac{1}{2^{2k}}\Big(\sum_{l=0}^{2k}\binom{2k}{l} e^{i\varphi l}e^{-i\varphi(2k-l)}\Big) \\ &= \frac{1}{2^{2k}}\Big(\binom{2k}{k} + \sum_{l=0}^{k-1}\binom{2k}{l}(e^{2i\varphi(l-k)}+e^{2i\varphi(k-l)})\Big) \\ &= \frac{1}{2^{2k}}\Big(\binom{2k}{k} + 2\sum_{l=0}^{k-1}\binom{2k}{l}\cos 2(l-k)\varphi\Big) \\ &= \frac{1}{2^{2k}}\Big(\binom{2k}{k} + 2\sum_{l=1}^{k}\binom{2k}{k-l}\cos 2l\varphi\Big). \end{aligned}$$

Во-вторых, представим коэффициенты $T(\varphi)$ как комбинации симметрических многочленов от $a_1, \ldots, a_n$:

$$\sum_{\substack{S\subset[1..n]\\ \#S=2k}} \prod_{j\in S}(1-a_j)\prod_{j\notin S} a_j = \sum_{\substack{S\subset[1..n]\\ \#S=2k}} \Big(\prod_{j\notin S} a_j \cdot \sum_{l=0}^{2k}\Big((-1)^l \sum_{\substack{T\subset S\\ \#T=l}} \prod_{m\in T} a_m\Big)\Big)$$

$$= \sum_{\substack{S\subset[1..n]\\ \#S=2k}} \sum_{l=0}^{2k}\Big((-1)^l \sum_{\substack{T\subset S\\ \#T=l}} \prod_{m\in T\cup S^C} a_m\Big) = \sum_{l=0}^{2k}\Big((-1)^l \sum_{\substack{S\subset[1..n]\\ \#S=2k}} \sum_{\substack{T\subset S\\ \#T=l}} \prod_{m\in T\cup S^C} a_m\Big)$$

$$= \sum_{l=0}^{2k}\Big((-1)^l \sum_{\substack{S\subset[1..n]\\ \#S=n-2k}} \sum_{\substack{T\cap S=\emptyset\\ \#T=l}} \prod_{m\in T\cup S} a_m\Big)$$

$$= \sum_{l=0}^{2k}\Big((-1)^l \binom{n-2k+l}{l} \sum_{\substack{S\subset[1..n]\\ \#S=n-2k+l}} \prod_{m\in S} a_m\Big)$$

$$= \sum_{l=0}^{2k} \Big((-1)^l \binom{n-2k+l}{l} \sigma_{n-2k+l} \Big) = \sum_{l=0}^{2k} \Big((-1)^l \binom{n-l}{2k-l} \sigma_{n-l} \Big)$$

Таким образом,

$$T(\varphi) = 2\sigma_n + 2 \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \left(\frac{1}{2^{2k}} \left(\binom{2k}{k} + 2 \sum_{l=1}^{k} \binom{2k}{k-l} \cos 2l\varphi \right) \right.$$
$$\left. \cdot \sum_{m=0}^{2k} \left((-1)^m \binom{n-m}{2k-m} \sigma_{n-m} \right) \right)$$
$$= 2\sigma_n + 2 \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \sum_{m=0}^{2k} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} (-1)^m \binom{n-m}{2k-m} \sigma_{n-m}$$
$$+ 4 \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \sum_{l=1}^{k} \sum_{m=0}^{2k} (-1)^m \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k-l} \cos 2l\varphi \binom{n-m}{2k-m} \sigma_{n-m}$$
$$= 2 \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \sum_{m=0}^{2k} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} (-1)^m \binom{n-m}{2k-m} \sigma_{n-m}$$
$$+ 4 \sum_{l=1}^{[\frac{n}{2}]} \cos 2l\varphi \Big(\sum_{k=l}^{[\frac{n}{2}]} \sum_{m=0}^{2k} (-1)^m \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k-l} \binom{n-m}{2k-m} \sigma_{n-m} \Big)$$

Обозначим коэффициенты многочлена T:

$$d_l = 4 \sum_{k=l}^{[\frac{n}{2}]} \sum_{m=0}^{2k} (-1)^m \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k-l} \binom{n-m}{2k-m} \sigma_{n-m},$$

где $l \in [0, \dots, [\frac{n}{2}]]$. Тогда $T(\varphi)$ записывается как $\dfrac{d_0}{2} + \sum_{l=1}^{[\frac{n}{2}]} d_l \cos 2l\varphi$. Заметим, что

$$d_l = 4 \sum_{k=l}^{[\frac{n}{2}]} \frac{1}{2^{2k}} \sum_{m=0}^{2k} (-1)^m \binom{2k}{k-l} \binom{n-m}{2k-m} \binom{n}{n-m} \rho_{n-m}$$
$$= 4 \sum_{k=l}^{[\frac{n}{2}]} \frac{1}{2^{2k}} \binom{n}{n-2k, k-l, k+l} \sum_{m=0}^{2k} (-1)^m \binom{2k}{m} \rho_{n-m}$$

$$= 4\sum_{k=l}^{[\frac{n}{2}]} \frac{1}{2^{2k}} \binom{n}{n-2k, k-l, k+l} \Delta^{2k}\rho_{n-2k} \geqslant 0$$

Поскольку все коэффициенты $T(\varphi)$ неотрицательны, то

$$T(\varphi) \leqslant T(0) = \prod_{i=1}^{n} \psi_{z_i}(1) + \prod_{i=1}^{n} \psi_{z_i}(-1) = 1 + \prod_{i=1}^{n}(2a_i - 1).$$

При этом хотя бы один из $z_1, \ldots, z_n$ равен -1, значит среди чисел $a_1, \ldots, a_n$ встречается $F_1(-1) = 1/2$. Следовательно, $T(0) = 1$, и теорема доказана. □

Следствие 2. *Пусть $T(\varphi)$ – тригонометрический многочлен, построенный по P как в (7). Если все корни $z_1, \ldots, z_n$ полинома P неположительны и хотя бы один из них равен -1, то $T(\varphi) \leqslant 1$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Ясно, что $z_i \leqslant 0 \Leftrightarrow a_i \leqslant 1$. Тогда, используя (8), получаем

$$T(\varphi) = 2\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \cos^{2k}\varphi \cdot \sum_{\substack{S\subset[1..n] \\ \#S=2k}} \prod_{j\in S}(1-a_j)\prod_{j\notin S} a_j \leqslant 2\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \sum_{\substack{S\subset[1..n] \\ \#S=2k}} \prod_{j\in S}(1-a_j)\prod_{j\notin S} a_j.$$

Правая часть неравенства есть в точности $T(0)$, которое в свою очередь равно 1. □

Теорема 4. *Пусть $m_0(\xi) = \sum_{k=0}^{n} c_k e^{2\pi i k\xi}$ – тригонометрический многочлен, а $P(z)$ – алгебраический многочлен, ассоциированный с $m_0(\xi)$, то есть $m_0(\xi) = P(e^{2\pi i\xi})$. Допустим, что все корни $z_1, \ldots, z_n$ многочлена P вещественны и хотя бы один из них равен -1, $a_k = 1 + 2z_k(z_k - 1)^{-2}$. Обозначим $\sigma_k := \sum_{\substack{S\subset[1..n] \\ \#S=k}} \prod_{j\in S} a_j$ и $\rho_k := \sigma_k \binom{n}{k}^{-1}$, $k \in [0 \ldots n]$. Тогда если*

$$\Delta^{2k}\rho_{n-2k} = \sum_{j=n-2k}^{n} \binom{2k}{n-j}(-1)^{n-j}\rho_j \geqslant 0,$$

для всех $k \in [0 \ldots [\frac{n}{2}]]$, то $m_0(\xi)$ является масштабирующей маской, соответствующей некоторому жёсткому фрейму всплесков. В *частности, если все корни* $z_1, \ldots, z_n$ *многочлена* P *неположительны и хотя бы один из них равен* -1*, то* $m_0(\xi)$ *– масштабирующая маска некоторого жёсткого фрейма всплесков.*

§3. Алгоритм проверки

Основываясь на выше изложенной теореме, нетрудно написать алгоритм для проверки достаточных условий. Далее представлен код алгоритма на языке C++:

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <cmath>
#include <iomanip>

int main() {
    int n;
    std::cin >> n;

    std::vector<double> x(n+1, 0);
    std::vector<double> a(n+1, 0);
    std::vector<double> sigma (n+1, 1);

    for (size_t i = 1; i <= n; i ++) // compute a_i
    {
        std::cin >> x[i];
        a[i] = 1 + 2 * x[i] / ((x[i] - 1) * (x[i] - 1));
    }

    for (int k = 1; k <= n; k ++) // compute the symmetric
        polynomials
    {
        double sum_j = 0;
        for (int j = 0; j <= k - 1; j ++)
        {
            double pkj = 0;
            for (int l = 1; l <= n; l ++)
            {
                pkj += std::pow(a[l], k-j);
            }
            sum_j += pow(-1, k-j-1 ) * sigma[j] * pkj;
        }
        sigma[k] = sum_j / (double) k;
    }
```

```
std::vector<std::vector<double> >
    c(n+1, std::vector<double>(n+1, 1));
for(int i = 0; i <= n; ++i) // compute the binomial
    coefficients
{
    for (int j = 1; j < i; ++j)
    {
        c[i][j] = c[i - 1][j - 1] + c[i - 1][j];
    }
}

std::vector<double> ro(n+1, 0);
for (int k = 0; k <= n; k++) // the symmetric means
{
    ro[k] = sigma[k] / c[n][k];
}

std::vector<std::vector<double> >
    deltaRo(n+1, std::vector<double>(n+1, 0));
for (int i = 0; i <= n; i++)
{
    deltaRo[0][i] = ro[i];
}

for (int i = 1; i <= n; i++) // the divided differences
{
    for (int j = i; j <= n; j++)
    {
        deltaRo[i][j] = deltaRo[i-1][j] - deltaRo[i-1][j
            -1];
    }
}

for (int i = 0; i <= n; ++i) // output
{
    for (int j = 0; j <= n; ++j)
        std::cout << deltaRo[i][j] << " ";
    std::cout << std::endl;
}

bool isDone = true;
for (int k = 0; k <= n/2; k ++)
    if (deltaRo[2 * k][n] < 0)
        isDone = false;

if (isDone)
```

```
        std::cout << "[TRUE] The inequality holds" << std::
            endl;
    else
        std::cout << "[FALSE] The criteria doesn't answer"
            << std::endl;
    return 0;
}
```

Данная программа в качестве входных данных принимает натуральное число n, которое является степенью многочлена, и затем n вещественных чисел – его корни. Заметим, что хотя бы один из них обязан быть равен -1. Значения элементарных симметрических многочленов вычисляются рекурсивно с использованием формулы Ньютона: $\sigma_k = \frac{1}{k}\sum\limits_{i=0}^{k-1}\left((-1)^{k-i-1}\sigma_i \sum_{j=1}^{n} a_j^{k-i}\right)$. На экран выводятся таблица разделенных разностей для ρ_k и результат проверки достаточных условий.

Список литературы

1. A. Ron, Z. Shen, *Affine systems in $L_2(\mathbb{R}^d)$: the analysis of the analysis operator.* — J. Funct. Anal. **148** (1997), 408–447.
2. A. Krivoshein, V. Protasov, and M. Skopina, *Multivariate Wavelet Frames, Industrial and Applied Mathematics.* Springer, Singapore, 2016.
3. A. Petukhov, *Explicit construction of framelets.* — Appl. Comput. Harmon. Anal. **11** (2001), 313–327.
4. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков.* Физматлит, М., 2005.
5. G. V. Milovanovic, D. S. Mitrinovic, Th. M. Rassias, *Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros.* World Scientific Pub Co Inc, 1994

Lebedeva E. A., Sherbakov I. A. Refinement masks of tight wavelet frames.

In the paper we obtain sufficient conditions for a trigonometric polynomial to be a refinement mask corresponding to a tight wavelet frame. The condition is formulated in terms of the roots of a mask. In particular, it is proved that any trigonometric polynomial can serve as a mask if its

associated algebraic polynomial has only nonpositive roots (at least one of them, of course, equals -1).

С.-Петербургский государственный
университет, Университетский пр. 28,
198504, Петергоф, С.-Петербург, Россия
E-mail: ealebedeva2004@gmail.com

Поступило 28 октября 2020 г.

С.-Петербургский государственный
университет, Университетский пр. 28,
198504, Петергоф, С.-Петербург, Россия
E-mail: stscherbakov99@yandex.ru