Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 499, 2021 г.

О. Л. Виноградов

НЕНАСЫЩЕННЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ФОРМУЛЫ КОТЕЛЬНИКОВА

§1. Введение

В дальнейшем $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ –множества комплексных, вещественных, неотрицательных вещественных, целых, натуральных чисел соответственно. Пространства функций обозначаются: $L_p(E)$ – стандартные пространства Лебега на множестве E с нормой $\|\cdot\|_p$, $L_p = L_p(\mathbb{R})$, UCB – пространство равномерно непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с равномерной нормой $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$, $\mathbf{E}_\sigma$ – множество целых функций экспоненциального типа, не превосходящего σ. Если из контекста не следует противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными.

Преобразование Фурье функции $f \in L_1$ и коэффициенты Фурье 2π-периодической функции f, суммируемой на периоде, определяются равенствами

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-iyt}\,dt \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt,$$

$\operatorname{sinc} z = \frac{\sin \pi z}{\pi z}$ – синк-функция. Символом $\mathbf{A}$ обозначается алгебра Винера, то есть множество функций f, представимых в виде

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(y)e^{ixy}\,dy, \quad g \in L_1.$$

Мы будем обозначать $\widehat{f} = g$, не предполагая при этом, что f принадлежит L_1 или L_2. Норма в $\mathbf{A}$ определяется равенством $\|f\|_{\mathbf{A}} = \|\widehat{f}\|_1$. Ясно, что если $f \in \mathbf{A}$, то $f \in UCB$ и $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_{\mathbf{A}}$.

Ключевые слова: формула Котельникова, наилучшее приближение, алгебра Винера.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 18-11-00055).

Равенство

$$f(x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j)\operatorname{sinc}(x-j) \tag{1}$$

называется формулой Котельникова или формулой отсчетов. Оно известно в следующих трех случаях:

1) $f\in\mathbf{E}_\pi\cap L_p$, $p\in[1,+\infty)$;
2) $f\in\mathbf{E}_\sigma\cap L_\infty$, $\sigma<\pi$;
3) $f\in\mathbf{E}_\pi\cap\mathbf{A}$.

Первые два случая содержатся, например, в [1, лекции 20 и 21], третий – в [2], см. далее §3. В §2 мы расширим класс функций, для которых верно равенство (1).

Обозначим правую часть формулы (1) через $Uf(x)$ и при $T>0$ положим $U_T(f,x)=U\left(f\left(\frac{\cdot}{T}\right),Tx\right)$ в предположении, что правая часть имеет смысл. Тогда

$$U_Tf(x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{j}{T}\right)\operatorname{sinc}(Tx-j).$$

Будем называть U_Tf суммой Котельникова. В §3 и 4 устанавливаются новые оценки погрешности $f-U_Tf$ в различных ситуациях.

§2. Точное равенство в формуле Котельникова

Обозначим через W множество измеримых функций f, таких что $\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{|f(t)|}{1+|t|}\,dt<+\infty$. Ввиду неравенства Гельдера $L_p\subset W$ при всех $p\in[1,+\infty)$.

Лемма 1. *Если $\sigma>0$, $f\in\mathbf{E}_\sigma\cap W$, то*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{|f(j)|}{1+|j|}\leqslant C(\sigma)\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{|f(t)|}{1+|t|}\,dt.$$

Доказательство. Оценим разность между суммой и интегралом по формуле [3, задача VI.3.16]

$$\left|\sum_{j=M}^{N} g(j)-\int\limits_{N-1/2}^{M+1/2} g\right|\leqslant\frac{1}{2}\bigvee_{N-1/2}^{M+1/2} g,\quad M,N\in\mathbb{Z},M\leqslant N.$$

Получим

$$2\left|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{|f(j)|}{1+|j|}-\int_{\mathbb{R}}\frac{|f(t)|}{1+|t|}\,dt\right|\leqslant\bigvee_{\mathbb{R}}\frac{|f(t)|}{1+|t|}\leqslant\bigvee_{\mathbb{R}}\frac{f(t)}{1+|t|}$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\left(\frac{f(t)}{1+|t|}\right)'\right|dt\leqslant\int_{\mathbb{R}}\frac{|f'(t)|}{1+|t|}\,dt+\int_{\mathbb{R}}\frac{|f(t)|}{(1+|t|)^2}\,dt.$$

По весовому неравенству Бернштейна [4]

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{|f'(t)|}{1+|t|}\,dt\leqslant C_1(\sigma)\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{|f(t)|}{1+|t|}\,dt,$$

откуда

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{|f(j)|}{1+|j|}\leqslant\frac{3+C_1(\sigma)}{2}\int_{\mathbb{R}}\frac{|f(t)|}{1+|t|}\,dt.$$

□

Теорема 1. *Если $f\in\mathbf{E}_\pi\cap W$, то*

$$f(z)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}f(j)\,\mathrm{sinc}(z-j),\qquad z\in\mathbb{C}.$$

Доказательство. По лемме 1 ряд в правой части сходится абсолютно и равномерно на любом компакте. Поэтому его сумма – целая функция и достаточно доказать равенство для $z=x\in\mathbb{R}$. При $\tau\in(0,1)$ положим $f_\tau(z)=f(\tau z)\mathrm{sinc}((1-\tau)z)$. Тогда $f_\tau\in\mathbf{E}_\pi\cap L_1$ и потому

$$f_\tau(x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}f_\tau(j)\,\mathrm{sinc}(x-j).$$

Устремим τ к 1. Левая часть, очевидно, стремится к $f(x)$. Чтобы перейти к пределу под знаком суммы в правой части, проверим равномерную сходимость ряда относительно $\tau\in\left[\frac12,1\right]$. Пусть $N_1=N-\frac12>2|x|$. Имеем

$$\sum_{|j|>N}|f_\tau(j)\,\mathrm{sinc}(x-j)|\leqslant C(x)\sum_{|j|>N}\frac{|f(\tau j)|}{|x-j|}$$
$$\leqslant C(x)\int_{|t|>N_1}\frac{|f(\tau t)|}{|x-t|}\,dt+\frac{C(x)}{2}\int_{|t|>N_1}\left|\left(\frac{f(\tau t)}{x-t}\right)'\right|dt,$$

где $C(x) = \frac{1}{\pi}|\sin\pi x|$. Равномерное стремление к нулю первого интеграла очевидно. Далее,

$$\int\limits_{|t|>N_1} \left|\left(\frac{f(\tau t)}{x-t}\right)'\right| dt \leqslant \tau \int\limits_{|t|>N_1} \left|\frac{f'(\tau t)}{x-t}\right| dt$$
$$+ \int\limits_{|t|>N_1} \frac{|f(\tau t)|}{(x-t)^2}\, dt \leqslant \int\limits_{|u|>\tau N_1} \left|\frac{f'(u)}{x-u/\tau}\right| du$$
$$+ \frac{1}{\tau} \int\limits_{|u|>\tau N_1} \frac{|f(u)|}{(x-u/\tau)^2}\, du \leqslant \int\limits_{|u|>\frac{N_1}{2}} \frac{|f'(u)|}{|u|-|x|}\, du$$
$$+ 2 \int\limits_{|u|>\frac{N_1}{2}} \frac{|f(u)|}{(|u|-|x|)^2}\, du.$$

Первое слагаемое бесконечно мало по весовому неравенству Бернштейна, а для второго это очевидно. □

Замечание 1. Если $\sigma > 0$, то $\mathbf{E}_\sigma \cap \mathbf{A} \not\subset W$.

Для построения примера воспользуемся следующим утверждением [5, теорема 6]; см. также [6, теорема 9.3]. Пусть $a \in L(0,+\infty)$, a монотонна вблизи 0 и $+\infty$, $a(y) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, a имеет конечную вариацию на любом отрезке $[\alpha,\beta]$ $(0<\alpha<\beta<+\infty)$, и пусть $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} a(y)\cos xy\, dy$. Тогда суммируемость $\frac{f(x)}{x}$ на $(1,+\infty)$ и суммируемость $a(y)\ln y$ на $(0,1)$ равносильны.

Ясно, что функция $f_1(x) = \int\limits_0^{\sigma} \frac{\cos xy\, dy}{y(1+\ln^2 y)}$ принадлежит $\mathbf{E}_\sigma \cap \mathbf{A}$. Однако $f_1 \notin W$, поскольку интеграл $\int\limits_0^{\sigma} \frac{\ln y\, dy}{y(1+\ln^2 y)}$ расходится.

Замечание 2. Если $\sigma > 0$, то $\mathbf{E}_\sigma \cap W \not\subset L_\infty$.

Не умаляя общности, можно считать, что $\sigma = \pi$. Построим функцию $f_2 \in \mathbf{E}_\pi \cap W$, неограниченную на $\mathbb{R}$. Положим

$$f_2(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2^n-n}^{2^n} (-1)^k \operatorname{sinc}(z-k).$$

Поскольку ряд в правой части сходится равномерно на любом компакте, $f_2 \in \mathbf{E}_\pi$. Пользуясь неравенством $|\operatorname{sinc} t| \leqslant \max\left\{1, \frac{1}{\pi|t|}\right\}$, находим

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|f_2(x)|}{1+|x|}\,dx \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2^n-n}^{2^n}\Biggl(\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(1-x)(k-x)} \\ + \int\limits_{0}^{k-1}\frac{dx}{(1+x)(k-x)} + \int\limits_{k-1}^{k+1}\frac{\pi dx}{1+x} \\ + \int\limits_{k+1}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)(x-k)}\Biggr) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2^n-n}^{2^n}\left(\frac{\ln k}{k-1}+\frac{2\ln k}{k+1}\right. \\ \left. + \pi\ln\left(1+\frac{2}{k}\right) + \frac{\ln(k+2)}{k+1}\right) < +\infty,\end{aligned}$$

откуда $f_2 \in W$. Далее, при $N-1 \in \mathbb{N}$

$$f_2\left(2^N+\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{\pi}\sum_{k=2^N-N}^{2^N}\frac{1}{2^N+\frac{1}{2}-k} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{k=2^n-n}^{2^n}\frac{1}{k-2^N-\frac{1}{2}}.$$

Оценим суммы:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2^N-N}^{2^N}\frac{1}{2^N+\frac{1}{2}-k} = \sum_{s=0}^{N}\frac{1}{s+\frac{1}{2}} \asymp \ln N, \\ \sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{k=2^n-n}^{2^n}\frac{1}{k-2^N-\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n-2^N-n+\frac{1}{2}} \\ = \frac{16}{3}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n} = o(1)\end{aligned}$$

(мы воспользовались неравенствами $2^N \leqslant \frac{1}{2}2^n$ и $n-\frac{1}{2} \leqslant \frac{5}{16}2^n$ при $n \geqslant N+1 \geqslant 3$). Следовательно, $f_2\left(2^N+\frac{1}{2}\right) \asymp \ln N$.

§3. Оценки в винеровских нормах

При $R > 0$, $p \in [1, +\infty]$ обозначим через $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_{p,R}$ пространство функций f, заданных на $\mathbb{R}$ и таких что

$$F = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |f(\cdot + 2lR)| \in L_p[-R, R],$$

с нормой $\|f\|_{\mathcal{L}_{p,R}} = \|F\|_{L_p[-R,R]}$. Пусть еще Ясно, что $\mathcal{L}_{1,R} = L_1$, $\mathcal{L}_{s,R} \subset \mathcal{L}_{r,R}$ при $s > r$. Пусть еще $\mathbf{A}_{p,R}$ – пространство функций f, таких что $\widehat{f} \in \mathcal{L}_{p,R}$, с нормой $\|f\|_{p,R} = \|\widehat{f}\|_{\mathcal{L}_{p,R}}$. Таким образом, $\mathbf{A}_{1,R} = \mathbf{A}$. Наилучшее приближение функции f целыми функциями типа не выше σ в пространстве $\mathbf{A}_{p,R}$ обозначается $A_\sigma(f)_{p,R}$.

Для $f \in \mathbf{A}$ Браун [2] (см. также [7]) получил оценку

$$\|f - U_T f\|_\infty \leqslant 2 \int\limits_{\mathbb{R} \setminus [-T\pi, T\pi]} |\widehat{f}| \tag{2}$$

и доказал, что константа 2 точная.

Неравенство (2) можно усилить, заменив равномерную норму в его левой части винеровской. Интеграл в правой части при этом можно трактовать как наилучшее приближение f в винеровской норме. Кроме того, мы обобщим неравенство (2) на p-аналоги винеровской нормы.

Теорема 2. *Пусть $p \in [1, +\infty]$, $T > 0$, $f \in \mathbf{A}_{p,T\pi}$. Тогда*

$$\|f - U_T f\|_{p,T\pi} \leqslant 2A_{T\pi}(f)_{p,T\pi}. \tag{3}$$

Константа точная. В частности, при $p = 1$

$$\|f - U_T f\|_{\mathbf{A}} \leqslant 2A_{T\pi}(f)_{\mathbf{A}}.$$

Доказательство. Из формулы суммирования Пуассона легко следует [7], что

$$U_T f(x) = \int\limits_{-T\pi}^{T\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(y + 2lT\pi) e^{ixy}\, dy,$$

что равносильно

$$\widehat{U_T f}(y) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(y + 2lT\pi) \chi_{(-T\pi, T\pi)}(y),$$

где χ_D – характеристическая функция множества D. Отсюда при $|y| < T\pi$

$$\begin{aligned}\sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|(\widehat{f} - \widehat{U_T f})(y + 2lT\pi)\right| = |\widehat{f}(y) - \widehat{U_T f}(y)| \\ + \sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\widehat{f}(y + 2lT\pi)| = \left|\sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \widehat{f}(y + 2lT\pi)\right| \\ + \sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\widehat{f}(y + 2lT\pi)| \leqslant 2 \sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\widehat{f}(y + 2lT\pi)|.\end{aligned} \tag{4}$$

Следовательно, при $p < +\infty$

$$\|f - U_T f\|_{p,T\pi}^p = \int_{-T\pi}^{T\pi} \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \left|(\widehat{f} - \widehat{U_T f})(y + 2lT\pi)\right|\right)^p dy$$

$$\leqslant \int\limits_{-T\pi}^{T\pi} \left(2 \sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\widehat{f}(y + 2lT\pi)|\right)^p dy = 2^p A_{T\pi}^p(f)_{p,T\pi}.$$

Последнее равенство верно, поскольку наилучшее приближение функции f в пространстве $\mathbf{A}_{p,T\pi}$ доставляет функция u, для которой $\widehat{u} = \widehat{f}$ на $[-T\pi, T\pi]$. Рассуждение при $p = +\infty$ аналогично.

Неравенство (4) обращается в равенство почти всюду на $(-T\pi, T\pi)$, если $\widehat{f}$ существенно не меняет знака вне $(-T\pi, T\pi)$. Поэтому и неравенство (3), получающееся из (4) взятием L_p-нормы обеих частей, обращается в равенство для таких функций. □

Применяя неравенство Хаусдорфа–Юнга

$$\|F\|_q \leqslant Y_p \|\widehat{F}\|_p, \quad p \in [1, 2], \quad q = \frac{p}{p-1}, \tag{5}$$

получаем оценку L_q-норм отклонений сумм Котельникова. Неравенство (5) хорошо известно с константой $(2\pi)^{\frac{1}{q}}$; точная константа в полной общности получена Бекнером [8] и равна

$$Y_p = (2\pi)^{\frac{1}{q}} \left(p^{\frac{1}{p}} q^{-\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следствие 1. *Пусть* $p \in [1, 2]$, $q = \frac{p}{p-1}$, $T > 0$, $f \in \mathbf{A}_{p,T\pi}$. *Тогда*

$$\|f - U_T f\|_q \leqslant 2 Y_p A_{T\pi}(f)_{p,T\pi}.$$

При $p = 1$ *и* $p = 2$ *константа точная.*

Доказательство. По неравенству Хаусдорфа–Юнга

$$\|f - U_T f\|_q \leqslant Y_p \|(f - U_T f)\widehat{\ }\|_p = Y_p \|f - U_T f\|_{p,T\pi} \leqslant 2Y_p A_{T\pi}(f)_{p,T\pi}.$$

При $p = 1$ точность неравенства установлена в [2]. При $p = 2$ неравенство Хаусдорфа–Юнга является равенством (это равенство Планшереля), поэтому следствие 1 совпадает с теоремой 2. □

§4. Оценки в равномерной норме

В этом параграфе, если не указано противное, нормы функций и операторов равномерные. Модули непрерывности $\omega_r(f, h)$ и наилучшие приближения $A_\sigma(f)$ определяются равенствами

$$\omega_r(f, h) = \sup_{0 \leqslant t \leqslant h} \left\| \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} C_r^k f(\cdot + kt) \right\|, \quad A_\sigma(f) = \inf_{g \in \mathbf{E}_\sigma} \|f - g\|.$$

В серии работ немецких математиков, из которых укажем на [9–11], были получены оценки норм отклонений $\|f - U_T f\|$ на различных классах функций f. Статьи [11, 12] содержат обзор известных результатов. Приведем одну из таких оценок, наилучшую из известных для участвующего в ней класса функций [11, теорема 4]. Пусть $r + 1 \in \mathbb{N}$, $f \in UCB$, существует $f^{(r)} \in UCB$, $\alpha, \gamma \in (0, 1]$, $L, M > 0$, $\omega_1(f^{(r)}, h) \leqslant Lh^\alpha$ при всех $h > 0$, $|f(x)| \leqslant M|x|^{-\gamma}$ при всех $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда при всех $T \geqslant \exp\left(\frac{2}{r+\alpha+\gamma}\right)$ верна оценка

$$\|f - U_T f\| \leqslant M_1 T^{-r-\alpha} \ln T, \tag{6}$$

где

$$M_1 = M_1(f, r, \alpha, \gamma) = \frac{r + \alpha + \gamma}{2\gamma} \left(\gamma c_1 + 5^{\frac{\gamma}{2}} 2ec_1 + 2^{\gamma+1} ec_2\right),$$

$c_1 = 7L\left(\frac{2}{\pi}\right)^{r+\alpha}$, $c_2 = 4M + 3\|f\|$.

Аналогичные оценки вида

$$\|f - U_T f\| \leqslant K\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{T}\right) T^{-r} \ln T \tag{7}$$

были установлены и для других классов функций. При этом по-прежнему предполагалось, что функции стремятся к нулю на бесконечности со скоростью не ниже степенной.

Метод приближения $\{U_T\}_{T>0}$ ненасыщен, то есть нормы отклонений $\|f - U_T f\|$ могут стремиться к нулю сколь угодно быстро при $T \to +\infty$, не обращаясь при этом в ноль. Оценки (6) и (7) не отражают этой возможности. Ее можно учесть, если вместо модулей непрерывности вести оценку через наилучшие приближения или, что равносильно, через нормы отклонений средних Валле Пуссена. Однако напрямую заменить в (7) модуль непрерывности наилучшим приближением можно не всегда. Ограничивающим фактором выступает степенная скорость стремления к нулю функции f – для более быстрого приближения требуется еще и более быстрое стремление к нулю. Для более медленного приближения степенная скорость, наоборот, избыточна.

В этом параграфе мы обобщим оценки (6) и (7) в форме, учитывающей обе характеристики функции: скорость стремления к нулю ее наилучших приближений и ее самой. Известные порядковые результаты при таком подходе получаются как следствия.

Отметим, что не все скорости стремления к нулю функции и ее наилучших приближений совместны: имеет место некий вариант принципа неопределенности. Так, ненулевая функция экспоненциального типа не может экспоненциально убывать, а ненулевая финитная функция не может приближаться с экспоненциальной скоростью (в противном случае по одной из обратных теорем теории приближений [13, п. 6.5.3] она была бы аналитической, что противоречит теореме единственности).

При $a \in (0,1)$, $R > 0$ обозначим через $V_{a,R}$ оператор усреднения типа Валле Пуссена–Мейера, который определяется так. Пусть $v_a \in L_1$, v_a четна, $\widehat{v}_a(y) = 0$ при $|y| \geqslant 1$, $\widehat{v}_a(y) = 1$ при $|y| \leqslant a$. Положим $v_{a,R}(t) = \frac{1}{R} v_a(\frac{t}{R})$, $V_{a,R}f = f * v_{a,R}$. Свертка определена для функций f, принадлежащих различным пространствам, здесь мы будем обсуждать только случай $f \in L_\infty$. Тогда $V_{a,R}f \in \mathbf{E}_R \cap L_\infty$, $V_{a,R}f = f$ при $f \in \mathbf{E}_{aR}$,

$$\|f - V_{a,R}f\| \leqslant C_a A_{aR}(f), \tag{8}$$

где

$$C_a = 1 + \|V_{a,R}\| = 1 + \int_{\mathbb{R}} |v_a|. \tag{9}$$

Для ограниченной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ обозначим через f^* ее горбатую мажоранту, то есть такую функцию $f^*\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что f^* четна, убывает на $\mathbb{R}_+$ и $|f| \leqslant f^*$. Не умаляя общности, можно считать, что $f^*(0) = \|f\|_\infty$. Класс измеримых ограниченных функций f, для которых $\int_{\mathbb{R}} \frac{f^*(x)}{1+|x|}\,dx < +\infty$, обозначим W^*. Очевидно, что для функции

$f \in W^*$ будет $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{|j|}|f(\frac{j}{T})| < +\infty$, и потому функция $U_T f$ определена.

Лемма 2. *Пусть $f \in W^*$, $R > 0$, $x \in \mathbb{R}$,*

$$\varphi(x) = \frac{\|f\|}{\|v_a\|_1} \int\limits_{\frac{R|x|}{2}}^{+\infty} |v_a| + f^*\left(\frac{x}{2}\right), \tag{10}$$

$$\psi(x) = C_a \min\left\{A_{aR}(f), \varphi(x)\right\}. \tag{11}$$

Тогда

$$|V_{a,R} f(x)| \leqslant \|v_a\|_1 \varphi(x), \tag{12}$$

$$|f(x) - V_{a,R} f(x)| \leqslant \psi(x). \tag{13}$$

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать $x \geqslant 0$. Поскольку $V_{a,R} f(x) = V_{a,1}\left(f\left(\frac{\cdot}{R}\right), Rx\right)$, достаточно доказать (12) при $R = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} |V_{a,1} f(x)| &\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |f(t) v_a(x-t)|\, dt \\ &\leqslant \int\limits_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} |f(t) v_a(x-t)|\, dt + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{x}{2},\frac{x}{2}]} f^*(t) |v_a(x-t)|\, dt \\ &\leqslant \|f\| \int\limits_{\frac{x}{2}}^{+\infty} |v_a| + f^*\left(\frac{x}{2}\right) \int\limits_{\mathbb{R}} |v_a| = \|v_a\|_1 \varphi(x). \end{aligned}$$

Неравенство (13) следует из соотношений (8), (12), (9) и

$$|f(x)| \leqslant f^*(x) \leqslant f^*\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant \varphi(x).$$

□

Для дальнейших рассуждений важна скорость стремления к нулю функции v_a. Известно, что v_a не может стремиться к нулю экспоненциально и, более того, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\left|\ln|v_a(x)|\right|}{x^2}\, dx < +\infty$. Если $\widehat{v}_a \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, то сама v_a стремится к нулю быстрее любой степени. В [14] доказано, что если $\omega\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\frac{\omega(x)}{x}$ убывает и $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x^2}\, dx < +\infty$, то для любого

$a \in (0,1)$ существует функция v_a с перечисленными свойствами, такая что $|v_a(x)| \leqslant C(a,\omega)e^{-\omega(|x|)}$ при всех $x \in \mathbb{R}$. В частности, для любого $b \in (0,1)$ можно взять $v_a(x) = O\big(e^{-|x|^b}\big)$ (константа в O-символе зависит от a и b).

Теорема 3. *Пусть* $f \in UCB \cap W^*$, $T > 1$, $a \in (0,1)$, *константа* C_a *и функция* φ *определены формулами* (9) *и* (10) *при* $R = T\pi$. *Тогда*

$$\|f - U_T f\| \leqslant C_a \Bigg(A_{aT\pi}(f)\left(3 + \frac{6}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln T\right) + \frac{3}{\pi}\inf_{N \geqslant 1}\left\{ A_{aT\pi}(f)\ln N + \int\limits_N^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt \right\}\Bigg). \tag{14}$$

Доказательство. По лемме 2 будет $V_{a,T\pi}f \in W^*$. Поскольку, кроме того, $V_{a,T\pi}f \in \mathbf{E}_{T\pi}$, по лемме 1 имеем $U_T(V_{a,T\pi}f) = V_{a,T\pi}f$. Отсюда

$$\|f - U_T f\| \leqslant \|f - V_{a,T\pi}f\| + \|U_T(f - V_{a,T\pi}f)\|. \tag{15}$$

Первое слагаемое оценивается по неравенству (8). Чтобы оценить второе слагаемое, оценим величину $|U_T(f - V_{a,T\pi}f, x)|$ для всех $x \in \mathbb{R}$. По неравенству (13)

$$|U_T(f - V_{a,T\pi}f)(x)| = \left|\sum_{j\in\mathbb{Z}} (f - V_{a,T\pi}f)\left(\frac{j}{T}\right)\operatorname{sinc}(Tx - j)\right| \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi\left(\frac{j}{T}\right)|\operatorname{sinc}(Tx - j)|,$$

где функция ψ задается равенством (11). Не умаляя общности, можно считать $x \geqslant 0$. Пусть сначала $x > 1$. Разобьем сумму на четыре:

$$J_1 = \sum_{Tx - T \leqslant j \leqslant Tx + T}, \quad J_2 = \sum_{0 \leqslant j < Tx - T}, \quad J_3 = \sum_{j > Tx + T}, \quad J_4 = \sum_{j<0}.$$

В сумме J_1 не более $2T+1$ слагаемых, причем $|Tx - j| < 1$ для одного или двух значений j. Для этих j используем оценку $|\operatorname{sinc} t| \leqslant 1$, а для остальных (их не более $2T$) – оценку $|\operatorname{sinc} t| \leqslant \frac{1}{\pi|t|}$. Поскольку сумма любых n различных слагаемых гармонического ряда не превосходит $1 + \ln n$, имеем

$$J_1 \leqslant \psi(0)\left(2 + \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln T\right).$$

При оценке J_2, J_3 и J_4 используем неравенство $|\operatorname{sinc} t| \leqslant \frac{1}{\pi|t|}$ и следующий очевидный факт: если функция g убывает, $a < b$, то

$$\sum_{a \leqslant j \leqslant b} g(j) \leqslant g(a) + \int\limits_a^b g.$$

Оценим J_2. Если $\{a_j\}$ и $\{b_j\}$ – конечные наборы вещественных чисел, $\{a'_j\}$ и $\{b'_j\}$ – их убывающие (или возрастающие) перестановки, то $\sum\limits_j a_j b_j \leqslant \sum\limits_j a'_j b'_j$. Индекс j меняется в пределах от 0 до $\lceil Tx-T \rceil - 1$, где $\lceil t \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geqslant t\}$. Так как ψ убывает, мы не уменьшим сумму, если переставим дроби $\frac{1}{Tx-j}$ в порядке убывания, то есть заменим j на $\lceil Tx - T \rceil - 1 - j$. Уменьшим еще знаменатели:

$$Tx - (\lceil Tx - T \rceil - 1 - j) > T + j.$$

Получим

$$J_2 \leqslant \sum_{0 \leqslant j < Tx-T} \frac{\psi\left(\frac{j}{T}\right)}{\pi|Tx - j|} \leqslant \sum_{0 \leqslant j < Tx-T} \frac{\psi\left(\frac{j}{T}\right)}{\pi(j + T)}$$

$$\leqslant \frac{\psi(0)}{T\pi} + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{Tx-T} \frac{\psi(u/T)}{u+T}\, du = \frac{\psi(0)}{T\pi}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{x-1} \frac{\psi(t)}{t+1}\, dt \leqslant \frac{2\psi(0)}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int\limits_1^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t}\, dt.$$

Оценки J_3 и J_4 очевидны:

$$J_3 \leqslant \sum_{j > Tx+T} \frac{\psi\left(\frac{j}{T}\right)}{\pi|Tx - j|} = \sum_{j > Tx+T} \frac{\psi\left(\frac{j}{T}\right)}{\pi(j - Tx)}$$

$$\leqslant \frac{\psi(x+1)}{T\pi} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{Tx+T}^{+\infty} \frac{\psi(u/T)}{u - Tx}\, du = \frac{\psi(x+1)}{T\pi}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{x+1}^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t-x}\, dt \leqslant \frac{\psi(0)}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int\limits_1^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t}\, dt,$$

$$J_4 \leqslant \sum_{j<0} \frac{\psi\left(\frac{j}{T}\right)}{\pi|Tx-j|} = \sum_{j>0} \frac{\psi\left(\frac{j}{T}\right)}{\pi(Tx+j)} \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\psi(u/T)}{Tx+u}\,du$$
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t+x}\,dt \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t+1}\,dt \leqslant \frac{\psi(0)}{\pi} + \frac{1}{\pi}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t}\,dt.$$

Таким образом,

$$|U_T(f - V_{a,T\pi}f)(x)| \leqslant \sum_{s=1}^{4} J_s \leqslant \psi(0)\left(2 + \frac{6}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln T\right) + \frac{3}{\pi}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t}\,dt. \qquad (16)$$

Эта оценка верна и при $x \in [0,1]$, так как в этом случае $J_2 = 0$, оценки J_1 и J_3 сохраняются, а вместо J_4 появляется сумма

$$J_4' \leqslant \sum_{j<Tx-T} \frac{\psi\left(\frac{j}{T}\right)}{\pi|Tx-j|} = \sum_{j>T-Tx} \frac{\psi\left(\frac{j}{T}\right)}{\pi(Tx+j)}$$
$$\leqslant \frac{\psi(1-x)}{\pi} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{T-Tx}^{+\infty} \frac{\psi(u/T)}{Tx+u}\,du = \frac{\psi(1-x)}{\pi}$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{1-x}^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t+x}\,dt \leqslant \frac{2\psi(0)}{\pi} + \frac{1}{\pi}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t}\,dt.$$

Далее, при любом $N \geqslant 1$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t}\,dt = \int\limits_1^{N} \frac{\psi(t)}{t}\,dt + \int\limits_N^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t}\,dt$$
$$\leqslant C_a A_{aT\pi}(f)\ln N + C_a \int\limits_N^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt,$$

откуда

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t}\,dt \leqslant C_a \inf_{N\geqslant 1}\left\{A_{aT\pi}(f)\ln N + \int\limits_N^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt\right\}. \qquad (17)$$

Остается сопоставить неравенства (15)–(17). □

Следствие 2. *Если в условиях теоремы* 3 *будет* $A_R(f) = o\left(\frac{1}{\ln R}\right)$ *при* $R \to +\infty$, *то*

$$\|f - U_T f\| \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Для доказательства надо под знаком инфимума положить $N = T$.

Обсудим скорость сходимости, которую гарантирует теорема 3. Прежде всего сформулируем ее следствие для финитных функций.

Следствие 3. *Если в условиях теоремы* 3 *будет* $\rho \geqslant 1$, $f(t) = 0$ *при* $|t| \geqslant 2\rho$, *то*

$$\|f - U_T f\| \leqslant C_a \Bigg(A_{aT\pi}(f)\left(3 + \frac{6}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln T\right) + \frac{3}{\pi}\left\{ A_{aT\pi}(f)\ln\rho + \frac{\|f\|}{\|v_a\|_1} \int\limits_{\frac{\rho T\pi}{2}}^{+\infty} |v_a(u)| \ln\frac{2u}{\rho T\pi}\, du \right\}\Bigg).$$

Для доказательства надо под знаком инфимума положить $N = \rho$ и поменять порядок интегрирования.

Если $A_R(f) = 0$ при достаточно больших R, то есть f – функция экспоненциального типа, то обе части (14) равны нулю. Если исключить этот случай из рассмотрения, то правая часть (14) не может стремиться к нулю быстрее, чем $A_{aT\pi}(f)\ln T$. Укажем достаточные условия для такой скорости приближения.

Следствие 4. *Пусть в условиях теоремы* 3 *при некоторых* $c > 0$ *и* $b > 0$ *будет*

$$\int\limits_{T^c}^{+\infty} \frac{f^*(t)}{t}\, dt = O(A_{aT\pi}(f)\ln T)$$

и $e^{-T^b} = O(A_{aT\pi}(f))$. *Тогда*

$$\|f - U_T f\| = O(A_{aT\pi}(f)\ln T).$$

Для доказательства надо взять $v_a(t) = O\left(e^{-\sqrt{|t|}}\right)$, $c > 2b$ и положить $N = 2T^c$.

Замечание 3. Ввиду обобщенного неравенства Джексона в теореме 3 и ее следствиях величину $A_{aT\pi}(f)$ можно заменить на $K(a, r)\omega_r\left(f, \frac{\pi}{T}\right)$.

Поэтому из следствия 4 вытекает (если не обращать внимания на постоянные) оценка (6). Однако у нас нет конкретных оценок норм $\|v_a\|_1$, за исключением нормы классического ядра Валле Пуссена.

Список литературы

1. B. Ya. Levin, *Lectures on entire functions*, AMS, 1996.
2. J. L. Brown Jr. *On the error of reconstructing a non-bandlimited function by means of the bandpass sampling theorem.* — J. Math. Anal. Appl. **18** (1967), 75–84.
3. Б. М. Макаров, М. Г. Голузина, А. А. Лодкин, А. Н. Подкорытов, *Избранные задачи по вещественному анализу*, СПб: Невский диалект, БХВ-Петербург, 2004.
4. D. S. Lubinsky, *Weighted Markov–Bernstein inequalities for entire functions of exponential type.* — Publications de l'institut mathématique, Nouvelle série **96** (110) (2014), 181–192.
5. B. Sz.-Nagy, *Séries et intégrales de Fourier des fonctions monotones non bornées.* — Acta Sci. Math. (Szeged) **13**, No. 2 (1949), 118–135.
6. R. P. Boas, *Integrability theorems for trigonometric transforms*, Springer-Verlag New York Inc. 1967.
7. R. P. Boas, *Summation formulas and band-limited signals.* — Tôhoku Math. J. **24**, No. 2 (1972), 121–125.
8. W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis.* — Ann. mathematics **102** (1975), 159–182.
9. W. Splettstösser, *Error estimates for sampling approximation of non-bandlimited functions.* — Math. meth. Appl. Sci. **1** (1979), 127–137.
10. R. L. Stens, *Approximation to duration-limited functions by sampling sums.* — Signal processing **2** (1980), 173–176.
11. P. L. Butzer, *A survey of the Whittaker–Shannon sampling theorem and some of its extensions.* — J. Math. research and exposition **3**, No. 1 (1983), 185–212.
12. P. L. Butzer, R. L. Stens, *Sampling theory for not necessarily band-limited functions: a historical overview.* — SIAM Review **34**, No. 1 (1992), 40–53.
13. А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Л., М. Физматгиз, 1960.
14. О. Л. Виноградов, *О скорости стремления к нулю масштабирующей функции Мейера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **491** (2020), 52–65.

Vinogradov O. L. Non-saturated estimates of the Kotelnikov formula error.

We estimate the error of approximation by Kotelnikov sums

$$U_T f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{j}{T}\right) \operatorname{sinc}(Tx-j), \quad T>0, \quad \operatorname{sinc} z = \frac{\sin \pi z}{\pi z}.$$

Let $f \in \mathbf{A}$, i.e. $f(x) = \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{ixy}\, dy$, $g \in L_1(\mathbb{R})$, and let $\|f\|_{\mathbf{A}} = \int_{\mathbb{R}} |g|$ be the Wiener norm of f. Then the sharp inequality

$$\|f - U_T f\|_{\mathbf{A}} \leqslant 2A_{T\pi}(f)_{\mathbf{A}}$$

holds, where $A_\sigma(f)_{\mathbf{A}}$ is the best approximation of f in the Wiener norm by entire functions of type not exceeding σ. We also establish non-saturated uniform estimates.

Санкт-Петербургский
государственный университет
Университетский пр., д.28,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: olvin@math.spbu.ru

Поступило 10 ноября 2020 г.