Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 499, 2021 г.

П. А. Андрианов

ДИСКРЕТНЫЙ ПЕРИОДИЧЕСКИЙ КРАТНОМАСШТАБНЫЙ АНАЛИЗ

§1. Введение

Периодические системы всплесков с непрерывным аргументом и алгоритмы разложения по ним широко изучались в литературе (см. [1–4], [5, §2.6, §3.1]). В частности, ряд работ посвящён изучению систем всплесков, построенных на базе периодического кратномасштабного анализа (см. [6–10, 14]). Однако, при обработке цифровых сигналов приближаемые функции имеют дискретную природу, поэтому для работы с ними представляется целесообразным построение теории всплесков для дискретного случая. Различные примеры дискретных систем всплесков и кратномасштабных анализов для дискретного периодического случая также рассматривались в литературе (например, см. [11–13]). Мы вводим общее определение дискретного периодического кратномасштабного анализа (далее, для краткости, КМА). Определение КМА, наиболее близкое к рассматриваемому нами, и определение соответствующих систем всплесков было дано А. П. Петуховым в работе [13]. Однако, это определение налагает на масштабирующие последовательности, которые порождают КМА, некоторые условия, исключающие из рассмотрения многие периодические объекты, "заслуживающие" называться системами всплесков. Мы приводим пример одной из таких систем, которую можно считать аналогом классической в непериодическом случае системы всплесков Котельникова-Шеннона. Этот пример порождён КМА, соответствующим данному нами определению. Основным результатом работы является характеризация КМА в терминах коэффициентов Фурье функций, формирующих масштабирующую последовательность.

Ключевые слова: дискретные всплески, дискретный кратномасштабный анализ, периодические всплески, периодический кратномасштабный анализ.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 18-11-00055).

§2. Определения и вспомогательные утверждения

Пусть $N = 2^n$, где $n \in \mathbb{N}$. Мы будем рассматривать пространство N-периодических комплекснозначных функций целочисленного аргумента, которое обозначим через $\widetilde{\mathbb{C}}^N$. Для данного пространства введем скалярное произведение

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)\overline{g(k)}.$$

Определим на $\widetilde{\mathbb{C}}^N$ оператор сдвига $S_p^j f$, для $j = 0, \ldots, n$, и $p \in \mathbb{Z}$:

$$S_p^j f(x) := f(x + 2^{n-j}p).$$

Для произвольной функции $f \in \widetilde{\mathbb{C}}^N$, её дискретное преобразование Фурье будем обозначать

$$\widehat{f}(k) := \sum_{m=0}^{N-1} f(m) e^{-\frac{2\pi i}{N} mk}.$$

Пусть $f \in \widetilde{\mathbb{C}}^N$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x) + f(x + N/2) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \widehat{f}(m)(e^{\frac{2\pi i}{N} mx} + e^{\frac{2\pi i}{N} m(x+\frac{N}{2})}) \\ &= \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N/2-1} \widehat{f}(2m) e^{\frac{2\pi i}{N} m2x}. \end{aligned}$$

Введём оператор Gf,

$$Gf := \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N/2-1} \widehat{f}(2m) e^{\frac{2\pi i}{N} m\cdot}.$$

Легко видеть, что $Gf(2x) = f(x) + f(x + N/2)$.

Определение 1. *Последовательность линейных пространств* $\{V_j\}_{j=0}^n$ *называется кратномасштабным анализом в пространстве* $\widetilde{\mathbb{C}}^N$, *если она удовлетворяет следующим условиям:*
MR1. $V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n$.
MR2. $V_n = \widetilde{\mathbb{C}}^N$.
MR3. a) $\dim V_j = 2^j$, *для всех* $j = 0, \ldots, n$; b) V_0 *состоит из констант.*

MR4. $\dim\{f \in V_j : S_1^j f = \lambda f\} \leqslant 1$.
MR5. $f \in V_j \Leftrightarrow S_k^j f \in V_j$, $k = 0, \ldots, 2^j - 1$.
MR6. a) *если* $f \in V_j$, *то найдётся такая функция* $g \in V_{j+1}$, *что* $g(\cdot) = f(2\cdot)$; b) *если* $f \in V_{j+1}$, *то* $Gf \in V_j$.

Определение 2. *Пусть* $\{V_j\}_{j=0}^n$ – *КМА в* $\widetilde{\mathbb{C}}^N$. *Последовательность функций* $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$, $\varphi_j \in V_j$, *называется масштабирующей, если функции* $S_r^j \varphi_j$, $r = 0, \ldots, 2^j - 1$, *образуют базис пространства* V_j.

Определим операторы ω_k^j, $j = 0, \ldots, n$, $k = 0, \ldots, 2^j - 1$ по формуле

$$\omega_k^j f(x) := \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2^{n-j}-1} \widehat{f}(2^j m + k) e^{\frac{2\pi i}{N}(2^j m + k)x},$$

то есть $\widehat{\omega_l^j f}(k) = \widehat{f}(k)$, если $k \equiv l \pmod{2^j}$, и $\widehat{\omega_l^j f}(k) = 0$, если $k \not\equiv l \pmod{2^j}$.

Лемма 1. *Пусть* $\{V_j\}_{j=0}^n$ – *КМА в* $\widetilde{\mathbb{C}}^N$. *Тогда в каждом пространстве* V_j *существует базис* $\{v_k^j\}_{k=0}^{2^j-1}$, *удовлетворяющий условиям:*
V1. $\widehat{v_k^j}(l) = 0$ *для всех* $l \not\equiv k \pmod{2^j}$.
V2. *если* $\widehat{v_k^j}(l) \neq 0$, *то* $\widehat{v_k^j}(m) = \widehat{v_k^{j+1}}(m)$ *для всех* $m \equiv l \pmod{2^{j+1}}$.
V3. $\widehat{v_{2k}^{j+1}}(2l) = \widehat{v_k^j}(l) + \widehat{v_k^j}(l + N/2)$ *для всех* $l = 0, \ldots, 2^{n-1} - 1$.

Для удобства положим $v_l^j := v_k^j$, если $l \equiv k \pmod{2^j}$.

Доказательство. Проведём индукцию по j. База для $j = 0$ очевидна, так как все целые числа сравнимы между собой по модулю 1, и значит выполняется условие **V1**, а остальные условия не требуют проверки.

Предположим, что в пространствах V_j, $j = 0, \ldots, j_0$ существуют базисы, удовлетворяющие **V1**–**V3**. Введём пространства

$$V_j^{(k)} := \{f \in V_j : \widehat{f}(m) = 0 \text{ для всех } m \not\equiv k \pmod{2^j}\}.$$

Пусть $g \in V_j$, тогда

$$g = \sum_{k=0}^{2^j-1} \omega_k^j g = \sum_{k=0}^{2^j-1} g_k, \quad \text{где } g_k \in V_j^{(k)}.$$

То есть, $V_j = \sum\limits_{k=0}^{2^j-1} V_j^{(k)}$, а значит

$$2^j = \dim V_j \leqslant \sum_{k=0}^{2^j-1} \dim V_j^{(k)}. \tag{1}$$

Найдём размерность пространства $V_j^{(k)}$. Если $f \in V_j^{(k)}$, то

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2^{n-j}-1} \widehat{f}(2^j m + k) e^{\frac{2\pi i}{N}(2^j m+k)x}.$$

Применяя оператор сдвига, получим

$$\begin{aligned} S_p^j f(x) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2^{n-j}-1} \widehat{f}(2^j m + k) e^{\frac{2\pi i}{N}(2^j m+k)(x+2^{n-j}p)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2^{n-j}-1} \widehat{f}(2^j m + k) e^{\frac{2\pi i}{N}(2^j m+k)x} e^{2\pi i m} e^{2\pi i 2^{-j} kp}, \end{aligned}$$

то есть $S_p^j f(x) = e^{2\pi i 2^{-j} pk} f(x)$. Отсюда, в силу **MR4** и (1), получаем $\dim V_j^{(k)} = 1$.

Построим базис $\{v_k^{j_0+1}\}_{k=0}^{2^{j_0+1}-1}$. Для начала рассмотрим такие номера $l \not\equiv 0 \pmod 2$, что $\widehat{v_l^{j_0}}(k) = 0$ для всех $k \equiv l \pmod{2^{j_0+1}}$. Построим функции $v_l^{j_0+1}$, задав их коэффициенты Фурье по следующему алгоритму:

1) Для всех номеров $k \not\equiv l \pmod{2^{j_0+1}}$ положим $\widehat{v_l^{j_0+1}}(k) = 0$.

2) Зададим произвольный набор чисел a_s, $s = 0, \dots, 2^n - 1$.

3) Для оставшихся k, таких что $0 < k < 2^{n-1}$, положим $\widehat{v_l^{j_0+1}}(k) = a_k$.

4) На очередном шаге, для оставшихся k, таких что

$$(2^s - 2) \cdot 2^{n-s} \leqslant k \leqslant (2^s - 1) \cdot 2^{n-s},$$

выберем числа $a_k^{(s)}$, исходя из условий $a_k^{(s)} \neq -a_{k-N/2}$,

$$a_k^{(s)} \neq -a_{k-N/4} - a_{k-2N/4} - a_{k-3N/4}, \dots, a_k^{(s)} \neq -\sum_{m=1}^{2^s-1} a_{k-mN/2^s},$$

и положим $\widehat{v_l^{j_0+1}}(k) = a_k^{(s)}$.

При таком способе задания $v_l^{j_0+1}$ свойство **V1** следует из того, что мы выбирали ненулевыми только коэффициенты с номерами $l \equiv k \pmod{2^{j_0+1}}$, а свойства **V2** и **V3** не требуют проверки. Далее будем считать, что функции v_l^j, при указанных выше номерах l, были построены согласно этому алгоритму не только для $j = j_0+1$, но и при всех $j = 1, \ldots, j_0$.

Теперь, если $\widehat{v_l^{j_0}}(l) \neq 0$, положим $v_l^{j_0+1} := \omega_l^{j_0+1} v_l^{j_0}$, тогда свойства **V1**, **V2** будут выполнены по определению ω_l^j. Проверим **V3**. Пусть $l \equiv 0 \pmod 2$, $k \equiv l \pmod{2^{j_0+1}}$, тогда, по индукционному предположению,

$$\begin{aligned}\widehat{v_l^{j_0+1}}(k) = \widehat{v_l^{j_0}} &= \widehat{v_{l/2}^{j_0-1}}(k/2) + \widehat{v_{l/2}^{j_0-1}}(k/2+N/2)\\ &= \widehat{v_{l/2}^{j_0}}(k/2) + \widehat{v_{l/2}^{j_0}}(k/2+N/2).\end{aligned}$$

Пусть теперь $\widehat{v_l^{j_0}}(k) = 0$ для всех $k \equiv l \pmod{2^{j_0+1}}$, и $k \equiv 0 \pmod 2$, тогда положим $v_l^{j_0+1}(x) := v_{l/2}^{j_0}(2x)$. Имеем,

$$\begin{aligned}\widehat{v_l^{j_0+1}}(k) &= \sum_{m=0}^{N-1} v_l^{j_0+1}(m) e^{-\frac{2\pi i}{N}mk} = \sum_{m=0}^{N-1} v_{l/2}^{j_0}(2m) e^{-\frac{2\pi i}{N}mk}\\ &= \sum_{m=0}^{N/2-1} v_{l/2}^{j_0}(2m) e^{-\frac{2\pi i}{N}mk} + \sum_{m=N/2}^{N-1} v_{l/2}^{j_0}(2m) e^{-\frac{2\pi i}{N}mk}\\ &= \sum_{m=0}^{N/2-1} v_{l/2}^{j_0}(2m)(e^{-\frac{2\pi i}{N}mk} + e^{-\frac{2\pi i}{N}(m+N/2)k})\\ &= 2\sum_{m=0}^{N/2-1} v_{l/2}^{j_0}(2m) e^{-\frac{2\pi i}{N}mk} = \sum_{m=0}^{N-1} v_{l/2}^{j_0}(m) e^{-\frac{2\pi i}{N}m\frac{k}{2}}(1+e^{\pi i m})\\ &= \sum_{m=0}^{N-1} v_{l/2}^{j_0}(m)(e^{-\frac{2\pi i}{N}m\frac{k}{2}} + e^{-\frac{2\pi i}{N}m(\frac{k}{2}+\frac{N}{2})})\\ &= \widehat{v_{l/2}^{j_0}}(k/2) + \widehat{v_{l/2}^{j_0}}(k/2+N/2).\end{aligned}$$

Таким образом, **V3** выполнено, **V1** выполнено по индукционному предположению, **V2** не требует проверки. Отметим, что сумма двух слагаемых в правой части не равна нулю, если оба слагаемых не равны нулю, в связи с выбором коэффициентов Фурье с нечётными номерами. Таким образом, в пространстве V_{j_0+1} мы выбрали 2^{j_0+1} ненулевых элементов, принадлежащих соответствующим пространствам $V^{(k)}_{j_0+1}$, и удовлетворяющих свойствам **V1-V3**. $\square$

Лемма 2. *Если в каждом пространстве* $V_j \subset \widetilde{\mathbb{C}}^N$, $j = 0, \dots, n$, *существует базис* $\{v^j_k\}_{k=0}^{2^j-1}$, *удовлетворяющий* **V1**, *то выполнена аксиома* **MR4**.

Доказательство. Пусть $0 \leqslant r < 2^j$, f собственный вектор оператора S^j_r, то есть $S^j_r f = \lambda_r f$, и пусть $f = \sum\limits_{k=0}^{2^j-1} \alpha^j_k v^j_k$. Так как выполнено **V1**, оператор S^j_r действует на v^j_k как оператор умножения на $e^{2\pi i 2^{-j} kr}$. Применяя S^j_r к f, получим

$$S^j_r f(x) = \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha^j_k S^j_r v^j_k(x) = \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha^j_k e^{2\pi i 2^{-j} kr} v^j_k(x).$$

Имеем,

$$0 = S^j_r - \lambda_r f(x) = \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha^j_k (e^{2\pi i 2^{-j} kr} - \lambda_r) v^j_k(x).$$

Так как функции v^j_k линейно независимы, отсюда следует, что $\alpha^j_k(e^{2\pi i 2^{-j} kr} - \lambda_r) = 0$ для всех $k = 0, \dots, 2^j - 1$. Предположим, что $\alpha^j_{k_0} \neq 0$, $\alpha^j_{k_1} \neq 0$, при $k_0 \neq k_1$. Тогда

$$(e^{2\pi i 2^{-j} k_0 r} - \lambda_r) - (e^{2\pi i 2^{-j} k_1 r} - \lambda_r) = 0,$$

или $e^{2\pi i 2^{-j}(k_0 - k_1) r} = 1$. Учитывая, что $0 \leqslant k_0, k, 1 \leqslant 2^j$, получаем, что $\alpha^j_k \neq 0$ только при $k = k_0$, а значит функция f пропорциональна $v^j_{k_0}$, и, кроме того,

$$\lambda_r = e^{2\pi i 2^{-j} k_0 r}. \qquad (2)$$

Пусть теперь $g = \sum_{k=0}^{2^j-1} \beta^j_k v^j_k$ – другой собственный вектор всех операторов S^j_r, $r = 0, \dots, 2^j - 1$. Для него также $\beta^j_k \neq 0$ лишь для одного номера k. Пусть $\beta^j_{k_1} \neq 0$, $k_1 \neq k_0$. Тогда, аналогично (2), имеем

$$\lambda_r = e^{2\pi i 2^{-j} k_1 r},$$

и отсюда и из (2), получаем

$$\lambda_r = e^{2\pi i 2^{-j}(k_0-k_1)r} = 1.$$

Аналогично, учитывая, что $0 \leqslant k_0, k_1 \leqslant 2^j$, получаем, что $k_0 = k_1$. Таким образом, g пропорционально $v^j_{k_0}$, и следовательно, размерность любого собственного подпространства оператора сдвига S^j_1 не превосходит 1. □

Лемма 3. *Пусть* $\{V_j\}_{j=0}^n$ *– КМА в* $\widetilde{\mathbb{C}}^N$*. Для того, чтобы последовательность* $\{\varphi_j\}_{j=0}^n \subset \widetilde{\mathbb{C}}^N$ *была масштабирующей, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varphi_j = \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha^j_k v^j_k, \quad \text{где} \quad \alpha^j_k \neq 0 \quad \text{для} \quad k = 0, \dots, 2^j-1, \tag{3}$$

и $\{v^j_k\}_{k=0}^{2^j-1}$ *– базисы пространств* V_j*, определённые в лемме* 1.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$ – масштабирующая последовательность, и α^j_k – коэффициенты разложения функций φ_j по базису $\{v^j_k\}$. Применяя оператор сдвига S^j_r к φ_j, имеем

$$S^j_r\varphi_j = \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha^j_k e^{2\pi i 2^{-j}kr} v^j_k. \tag{4}$$

Предположим, что $\alpha^j_{k_0} = 0$, тогда

$$V_j = \mathrm{span}\{S^j_r\varphi_j,\, r = 0, \dots, 2^j-1\} = \mathrm{span}\{v^j_k,\, k = 0, \dots, 2^j-1,\, k \neq k_0\},$$

что противоречит минимальности базиса $\{v^j_k\}_{k=0}^{2^j-1}$.

Достаточность. Пусть функции φ_j определены по формуле (3). Как и выше,

$$S^j_r\varphi_j = \sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha^j_k e^{2\pi i 2^{-j}kr} v^j_k, \quad r = 0, \dots, 2^j-1.$$

Рассмотрим эти равенства, как систему уравнений с неизвестными $\alpha^j_k v^j_k$. Известно, что матрица такой системы унитарна (с точностью до множителя), а при унитарном преобразовании базис переходит в базис. Следовательно, функции $S^j_r\varphi_j$, $r = 0, \dots, 2^j-1$, образуют базис пространства V_j. □

Следствие 1. *Если* $\{\varphi_j\}_{j=0}^n$ *– масштабирующая последовательность, то* $\omega_k^j\varphi_j = \alpha_k^j v_k^j$*, где* $\alpha_k^j \neq 0$*. В частности, функции* $\{\omega_k^j\varphi_j\}_{k=0}^{2^j-1}$ *образуют базис в* V_j*.*

Следует из определения операторов ω_k^j и того, что $\dim V_j^{(k)} = 1$.

Следствие 2. *В любом КМА существует масштабирующая последовательность.*

Следует из формулы (3), в которой достаточно положить $\alpha_k^j = 1$.

§3. Основные результаты

Следующая теорема представляет собой характеризацию КМА в терминах коэффициентов Фурье функций φ_j, входящих в масштабирующую последовательность.

Теорема 1. *Функции* $\varphi_j \in \widetilde{\mathbb{C}}^N$*,* $j = 0, \ldots, n$*, образуют масштабирующую последовательность для некоторого КМА в* $\widetilde{\mathbb{C}}^N$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*
Ф1. $\widehat{\varphi_0}(k) = 0$ *при* $k \neq 0$*;*
Ф2. *для любого* $j = 0, \ldots, n$*, и для любого* $l = 0, \ldots, 2^j - 1$ *существует* $k \equiv l \pmod{2^j}$*,* $0 \leqslant k < N$*, такой что* $\widehat{\varphi_j}(k) \neq 0$*;*
Ф3. *для любого* $k = 0, \ldots, N-1$*, существует* $j = 0, \ldots, n$*, такой что* $\widehat{\varphi_j}(k) \neq 0$*;*
Ф4. *для любого* $j = 1, \ldots, n$*, и для любого* $l = 0, \ldots, N-1$*, существует число* μ_l^j*, такое что* $\widehat{\varphi_{j-1}}(k) = \mu_l^j \widehat{\varphi_j}(k)$ *для всех* $k \equiv l \pmod{2^j}$*;*
Ф5. *для любого* $j = 0, \ldots, n-1$*, и для любого* $l = 0, \ldots, N-1$*, существует число* $\gamma_l^j \neq 0$*, такое что* $\widehat{\varphi_{j+1}}(2k) = \gamma_l^j(\widehat{\varphi_j}(k) + \widehat{\varphi_j}(k + N/2))$ *для всех* $k \equiv l \pmod{2^j}$*,* $k = 0, \ldots, N/2 - 1$*.*

Доказательство. Необходимость. Свойство **Ф1** следует из **MR3, b)**. Для доказательства **Ф2** воспользуемся следствием 1. Из равенства $\omega_l^j\varphi_j = \alpha_l^j v_l^j$, имеем

$$\widehat{\varphi_j}(k) = \widehat{\omega_k\varphi_j}(k) = \alpha_l^j \widehat{v_l^j}(k)$$

для любого $k \equiv l \pmod{2^j}$. Существование номера k, такого что $k \equiv l \pmod{2^j}$ и $\widehat{v_l^j}(k) \neq 0$, следует из того, что $v_l^j \not\equiv 0$, и $\widehat{v_l^j}(m) = 0$ для всех $m \not\equiv l \pmod{2^j}$. Далее, докажем свойство **Ф3** от противного. Пусть $\widehat{\varphi_j}(k) = 0$ для всех $j = 0, \ldots, n$. Это означает, что у всех функций φ_j отсутствует гармоника $e^{\frac{2\pi i}{N}kx}$. Тогда она отсутствует и во всех сдвигах $S^j_k\varphi_j$, что противоречит **MR2**. Для доказательства **Ф4** возьмём произвольный номер l, такой что $0 \leqslant l < N-1$. Рассмотрим случай, когда существует номер $k \equiv l \pmod{2^j}$, такой что $\widehat{\varphi_{j-1}}(k) \neq 0$. По следствию 1 и из определения операторов ω^j_k, имеем $\omega^j_l\varphi_j = \alpha^j_l v^j_l$, $\omega^j_l\varphi_{j-1} = \omega^j_l\omega^{j-1}_l\varphi_{j-1} = \alpha^{j-1}_l\omega^j_l v^{j-1}_l$, где $\alpha^{j-1}_l \neq 0$. Отсюда, учитывая **V2**, получаем

$$\widehat{\varphi_{j-1}}(m) = \frac{\alpha^{j-1}_l}{\alpha^j_l}\widehat{\varphi_j}(m),$$

для всех $m \equiv l \pmod{2^j}$. Осталось положить $\mu^j_l = \alpha^{j-1}_l/\alpha^j_l$. Если же $\widehat{\varphi_{j-1}}(k) = 0$ для всех $k \equiv l \pmod{2^j}$, то $\mu^j_l = 0$. Для доказательства **Ф5** опять воспользуемся следствием 1. Для $k \equiv l \pmod{2^j}$, имеем

$$\widehat{\varphi_{j+1}}(2k) = \widehat{\omega^{j+1}_{2l}\varphi_{j+1}}(2k) = \alpha^{j+1}_{2l}\widehat{v^{j+1}_{2l}}(2k),$$

где $\alpha^{j+1}_{2l} \neq 0$. С другой стороны,

$$\widehat{\varphi_j}(k) = \alpha^j_l\widehat{v^j_l}(k), \quad \alpha^j_l \neq 0.$$

Отсюда, учитывая **V3**, получаем

$$\widehat{\varphi_{j+1}}(2k) = \frac{\alpha^{j+1}_{2l}}{\alpha^j_l}(\widehat{\varphi_j}(k) + \widehat{\varphi_j}(k + \frac{N}{2})).$$

Осталось положить $\gamma^j_l = \alpha^{j+1}_{2l}/\alpha^j_l$.

Достаточность. Пусть функции $\varphi_j \in \widetilde{\mathbb{C}}^N$, $j = 0, \dots, n$, удовлетворяют условиям **Ф1-Ф5**. Положим $V_j = \mathrm{span}\{S^j_l\varphi_j,\ l = 0, \dots, 2^j - 1\}$. Покажем, что $\{V_j\}^n_{j=0}$ – КМА в $\widetilde{\mathbb{C}}^N$, а $\{\varphi\}^n_{j=0}$ – масштабирующая последовательность. Сначала проверим **MR5**. Пусть $f \in V_j$, тогда $f = \sum\limits_{k=0}^{2^j-1}\alpha_k S^j_k\varphi_j$. Применим к f оператор сдвига S^j_r, $r = 0, \dots, 2^j - 1$,

$$S^j_r f = \sum_{k=0}^{2^j-1}\alpha_k S^j_r S^j_k\varphi_j. \tag{5}$$

Из периодичности φ_j следует, что $S^j_r S^j_k\varphi_j = S^j_p\varphi_j$, где $0 \leqslant p \leqslant 2^j - 1$, $p \equiv (r+k) \pmod{2^j}$. Подставляя это равенство в (5), по определению V_j, получаем, что $f \in V_j$. В обратную сторону, если $S^j_r f \in V_j$, то по уже доказанному, получаем $f = S^j_{-r} S^j_r f \in V_j$. Докажем **MR3, a)**. Аналогично (4), имеем

$$S^j_r \varphi_j = \sum_{l=0}^{2^j-1} e^{2\pi i 2^{-j} lr} \omega^j_l \varphi_j.$$

Отсюда следует, что $V_j = \operatorname{span}\{\omega^j_l \varphi_j,\ l = 0, \ldots, 2^j - 1\}$. Покажем, что функции $\omega^j_l \varphi_j$, $l = 0, \ldots, 2^j - 1$, образуют базис V_j. Предположим, что они линейно зависимы, тогда существуют числа α_k, $k = 0, \ldots, 2^j - 1$, $\alpha_{k_0} \neq 0$, такие что $\sum_{k=0}^{2^j-1} \alpha_k \omega^j_k \varphi_j = 0$. Отсюда и из определения ω^j_k получаем, что $\widehat{\omega^j_{k_0} \varphi_j}(k) = \widehat{\varphi_j}(k) = 0$ для всех $k \equiv k_0 \pmod{2^j}$, что противоречит **Φ2**. Для доказательства **MR3, a)** осталось заметить, что количество функций $\omega^j_l \varphi_j$ равно 2^j. Помимо этого, так как функций $S^j_r \varphi_j$ также 2^j штук, мы установили, что набор сдвигов $\{S^j_r \varphi_j\}_{r=0}^{2^j-1}$ является базисом V_j. Свойство **MR3, b)** следует из **Φ1**. Для доказательства **MR1** надо проверить, что из $f \in V_j$ следует $f \in V_{j+1}$. Для этого достаточно рассмотреть лишь базисные функции $\omega^j_l \varphi_j$. Из определения $\omega^j_l \varphi_j$, имеем

$$\omega^j_l \varphi_j = \omega^{j+1}_l \omega^j_l \varphi_j + \omega^{j+1}_{l+2^j} \omega^j_l \varphi_j. \tag{6}$$

Используя **Φ4** и 2^{j+1}-периодичность последовательности μ^{j+1}_l по нижнему индексу, для $p = 0, 1$ имеем

$$\begin{aligned}
\omega^{j+1}_{l+2^j p} \omega^j_l \varphi_j &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2^{n-j-1}-1} \widehat{\omega^j_l \varphi_j}(2^{j+1}k + l + 2^j p) e^{\frac{2\pi i}{N}(2^{j+1}k+l+2^j p)\cdot} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2^{n-j-1}-1} \widehat{\varphi_j}(2^{j+1}k + l + 2^j p) e^{\frac{2\pi i}{N}(2^{j+1}k+l+2^j p)\cdot} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2^{n-j-1}-1} \mu^{j+1}_{2^{j+1}k+l+2^j p} \widehat{\varphi_{j+1}}(2^{j+1}k+l+2^j p) e^{\frac{2\pi i}{N}(2^{j+1}k+l+2^j p)\cdot} \\
&= \mu^{j+1}_{l+2^j p} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2^{n-j-1}-1} \widehat{\varphi_{j+1}}(2^{j+1}k + l + 2^j p) e^{\frac{2\pi i}{N}(2^{j+1}k+l+2^j p)\cdot}.
\end{aligned}$$

Правая часть этого равенства является разложением Фурье функции $\mu_{l+2^jp}^{j+1}\omega_{l+2^jp}^{j+1}\varphi_{j+1}$. Подставляя это в (6), получаем

$$\omega_l^j\varphi_j = \mu_l^{j+1}\omega_l^{j+1}\varphi_{j+1} + \mu_{l+2^j}^{j+1}\omega_{l+2^j}^{j+1}\varphi_{j+1}.$$

Учитывая, что $\omega_l^{j+1}\varphi_{j+1}, \omega_{l+2^j}^{j+1}\varphi_{j+1} \in V_{j+1}$, получаем требуемое. Выполнение свойства **MR2** следует из того, что, по определению, функции $\omega_k^n\varphi_n$ пропорциональны гармоникам $e^{\frac{2\pi i}{N}k\cdot}$.

Теперь покажем, что в V_j существует базис, удовлетворяющий свойствам леммы 1. Определим числа α_l^j, $j = 0, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}
&\alpha_0^0 := 1;\\
&\text{если } \mu_l^j \neq 0, \text{ то } \alpha_l^j := \frac{\alpha_l^{j-1}}{\mu_l^j};\\
&\text{если } \mu_l^j = 0, l \equiv 0 \pmod 2, \text{ то } \alpha_l^j := \alpha_{l/2}^{j-1}\gamma_{l/2}^{j-1};\\
&\text{если } \mu_l^j = 0, l \not\equiv 0 \pmod 2, \text{ то } \alpha_l^j := 1.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что $\alpha_l^j \neq 0$. Положим $v_l^j = \omega_l^j\varphi_j/\alpha_l^j$. Как показано выше, $\omega_l^j\varphi_j$ образуют базис пространства V_j, поэтому $\{v_l^j\}_{l=0}^{2^j-1}$ также является базисом, и нетрудно проверить, что свойства **V1-V3** выполнены.

Свойство **MR4** следует из леммы 2. Для доказательства **MR6** достаточно проверить выполнение этого условия для базисных функций $\{v_l^j\}_{l=0}^{2^j-1}$. Используя **V3**, получаем

$$\begin{aligned}
v_l^j(2x) &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\widehat{v_l^j}(m)e^{\frac{2\pi i}{N}m2x} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N/2-1}(\widehat{v_l^j}(m) + \widehat{v_l^j}(m+\frac{N}{2}))e^{\frac{2\pi i}{N}m2x}\\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N/2-1}\widehat{v_{2l}^{j+1}}(2m)e^{\frac{2\pi i}{N}m2x} = v_{2l}^{j+1}(x).
\end{aligned}$$

Выполнение **MR6, a)** следует из того, что $v_{2l}^{j+1} \in V_{j+1}$. Проверим **MR6, b)**. Пусть $l \equiv 0 \pmod 2$. Используя **V3**, получаем

$$v_l^{j+1}(\frac{x}{2}) + v_l^{j+1}(\frac{x}{2} + \frac{N}{2}) = v_{l/2}^j(x) + v_{l/2}^j(x+N).$$

Оба слагаемых в правой части принадлежат V_j. Пусть теперь $l \not\equiv 0 \pmod 2$, тогда функция $v_l^{j+1}(x/2) + v_l^{j+1}(x/2 + N/2)$ имеет разложение Фурье

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2^{n-j-1}-1} (\widehat{v_l^{j+1}}(2^{j+1}m + l) e^{\frac{2\pi i}{N}(2^{j+1}m+l)\frac{x}{2}}$$
$$+ \widehat{v_l^{j+1}}(2^{j+1}m + l) e^{\frac{2\pi i}{N}(2^{j+1}m+l)(\frac{x}{2}+\frac{N}{2})})$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2^{n-j-1}-1} \widehat{v_l^{j+1}}(2^{j+1}m + l) e^{\frac{2\pi i}{N}(2^{j+1}m+l)\frac{x}{2}} (1 + e^{\frac{2\pi i}{N}(2^{j+1}m+l)\frac{N}{2}}).$$

Последний множитель равен нулю, так как $l \not\equiv 0 \pmod 2$. Таким образом, свойство **MR6, b)** также выполнено. $\square$

Нетрудно проверить, что условиям **Ф1-Ф5** удовлетворяет

Пример 1. В качестве членов масштабирующей последовательности возьмём тригонометрические полиномы с минимально возможным спектром, то есть

$$\varphi_j(x) = \sum_{m=0}^{2^j-1} 2^{-\frac{j}{2}} e^{2\pi i m x}.$$

Как и ранее, положим $V_j := \operatorname{span}\{S_l^j \varphi_j,\ l = 0, \ldots, 2^j - 1\}$. Построим пространства и базисы всплесков, соответствующие данному КМА, следуя стандартной схеме. Для этого нам потребуется найти в каждом пространстве V_{j+1} функцию ψ_j, такую что соответствующие системы сдвигов $\{S_l^j \psi_j\}_{l=0}^{2^j-1}$ являются ортонормированными, ортогональны пространству V_j и дополняют $\{S_l^j \varphi_j\}_{l=0}^{2^j-1}$ до базиса пространства V_{j+1}. Положим

$$\widehat{\psi_j}(k) = \mu_{k+2^j}^{j+1} \widehat{\varphi_{j+1}}(k),$$

где μ_k^j – коэффициенты, определённые согласно теореме 1 (для удобства полагаем, что $\mu_{k+N}^j = \mu_k^j$). Нетрудно показать, что тогда

$$\widehat{\psi_j}(k) = \begin{cases} 2^{-\frac{j}{2}}, & \text{если } 2^j \leqslant k < 2^{j+1}, \\ 0, & \text{в ост. случаях.} \end{cases} \tag{7}$$

Положим $W_j := \operatorname{span}\{S_l^j \psi_j, l = 0, \ldots, 2^j - 1\}$. Из (7) ясно, что $W_j \perp V_j$, так как если $f \in V_j$, то $\widehat{f}(k) \neq 0$ только при $k < 2^j$. Теперь, аналогично

(4), имеем

$$S_l^j \psi_j = \sum_{r=0}^{2^j-1} e^{2\pi i 2^{-j} lr} \omega_r^j \psi_j. \tag{8}$$

Из (7) следует, что функции $\omega_r^j \psi_j$ пропорциональны базисным функциям v_r^{j+1}, определённым в лемме (1), а значит $W_j \subset V_{j+1}$. Также, как упоминалось ранее, так как матрица системы (8) унитарна, функции $\omega_r^j \psi_j$ можно выразить через $S_l^j \psi_j$. Кроме того, функции $\omega_r^j \psi_j$ линейно независимы, и поэтому из этих рассуждений и свойства **MR3** следует, что $\dim W_j = 2^j$, и обе системы $\{\omega_r^j \psi_j\}_{r=0}^{2^j-1}$ и $\{S_l^j \psi_j\}_{l=0}^{2^j-1}$ являются базисами в W_j. Таким образом, сдвиги $\{S_l^j \psi_j\}_{l=0}^{2^j-1}$ дополняют $\{S_l^j \varphi_j\}_{l=0}^{2^j-1}$ до базиса пространства V_{j+1}. Осталось проверить их ортогональность. Через $\delta_k(m)$ обозначим k-периодический единичный импульс, то есть $\delta_k(0) = 1$, и $delta_k(m) = 0$ при $m = 1, \ldots, k-1$. Пользуясь известной формулой

$$\frac{1}{k} \sum_{p=0}^{k-1} e^{\frac{2\pi i}{k} sp} = \delta_k(s),$$

и учитывая (7) и ортогональность $\omega_r^j \psi_j$ при разных r, имеем

$$\begin{aligned}
(S_m^j \psi_j, S_k^j \psi_j) &= \Big(\sum_{r=0}^{2^j-1} e^{2\pi i 2^{-j} rm} \omega_r^j \psi_j, \sum_{s=0}^{2^j-1} e^{2\pi i 2^{-j} sk} \omega_s^j \psi_j \Big) \\
&= \sum_{r=0}^{2^j-1} \sum_{s=0}^{2^j-1} e^{2\pi i 2^{-j} rm} e^{-2\pi i 2^{-j} sk} (\omega_r^j \psi_j, \omega_s^j \psi_j) \\
&= \sum_{r=0}^{2^j-1} e^{2\pi i 2^{-j} r(m-k)} (\omega_r^j \psi_j, \omega_r^j \psi_j) \\
&= \sum_{r=0}^{2^j-1} e^{2\pi i 2^{-j} r(m-k)} |\widehat{\psi_j}(r + 2^j)|^2 = \delta_{2^j}(m-k).
\end{aligned}$$

Таким образом, при любом $j = 0, \ldots, n-1$ имеет место разложение $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, а система $\{\psi_j\}_{j=0}^{n-1}$ есть набор всплеск-функций, порождённый кратномасштабным анализом, указанным в примере 1.

Замечание 1. Из определения КМА, данного А. П. Петуховым в работе [13], следует, что коэффициенты $\widehat{\varphi_j}(k) \neq 0$ при $k \not\equiv 0 \pmod 2$,

$j = 1, \ldots, n$. Достаточные условия для того, чтобы набор функций образовывал масштабирующую последовательность (см. [13, §1]), представляют собой соотношения, которые аналогичны рассмотренным нами при построении базисов v_l^j в лемме 1. Хотя мы и не требуем этого в явном виде, нетрудно проверить, что выполнение этих соотношений следует из свойств **Ф2**, **Ф5**. Таким образом, любая масштабирующая последовательность, соответствующая определению из работы [13], может быть получена и в рамках нашего определения. Более того, если задать $\widehat{\varphi_1}(k)$ так, что $\widehat{\varphi_1}(k) \neq 0$ при $k \not\equiv 0 \pmod 2$, и выполнены вышеупомянутые соотношения, то в работе [13] остальные функции из масштабирующей последовательности определяются автоматически. В нашем же случае, ввиду определённой свободы выбора μ_l^j, мы можем строить различные масштабирующие последовательности. Кроме этого, как иллюстрирует пример 1, нашему определению соответствует ещё более широкий класс объектов, включающий в себя КМА, порождённые такими масштабирующими последовательностями, что $\widehat{\varphi_j}(k) = 0$ при некоторых $k \not\equiv 0 \pmod 2$.

Список литературы

1. B. Han, *On dual wavelet tight frames.* — ACHA, **4** (1997), 380–413.
2. B. Han, *Compactly supported tight wavelet frames and orthonormal wavelets of exponential decay with a general dilation matrix.* — J. Comput. Appl. Math. **155** (2003), 43–67.
3. A. Ron, Z. Shen, *Gramian analysis of affine bases and affine frames. Approximation Theory VIII, V. 2: Wavelets (C.K. Chui and L. Schumaker, eds) World Scientific*, Publishing Co. Inc (Singapore) (1995), 375–382.
4. A. Ron, Z. Shen, *Frame and stable bases for shift-invariant subspaces of L2(Rd).* — Canad. J. Math. **47**, No. 5 (1995), 1051–1094.
5. A. Krivoshein, V. Protasov, M. Skopina, *Multivariate Wavelet Frames.* Springer Singapore, 2016.
6. C. K. Chui, J. Z. Wang, *A general framework of compact supported splines and wavelets.* — J. Approx. Theory **71** (1992), 263–304.
7. S. S. Gon, S. Z. Lee, Z. Shen, W. S. Tang, *Construction of Schauder decomposition on banach spaces of periodic functions*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society **41**, No. 1 (1998), 61–91.
8. A. P. Petukhov, *Periodic wavelets.* — Mat. Sb. **188**, No. 10 (1997), 69–94.
9. V. A. Zheludev, *Periodic splines and wavelets*, in: Proc. of the Conference “Math. Analysis and Signal Processing,” Cairo, Jan. 2–9, 1994.
10. M. Skopina, *Multiresolution analysis of periodic functions.* — East Journal on Approximations **3**, No. 2 (1997), 203–224.
11. J. A. Gubner, W.-B. Chang, *Wavelet transforms for discrete-time periodic signals.* — Signal Processing **42** (1995) 167–180.

12. V. A. Kirushev, V. N. Malozemov, A. B. Pevnyi, *Wavelet Decomposition of the Space of Discrete Periodic Splines.* — Mathematical Notes **67**, No. 5 (2000), 603–610.
13. A. P. Petukhov, *Periodic discrete wavelets.* — Algebra i Analiz, **8**, No. 3 (1996), 151–183.
14. M. A. Skopina, *Local convergence of Fourier series with respect to periodized wavelets.* — J. Approxim. Theory, **94**, No. 2 (1998), 191–202.

Andrianov P. A. Discrete periodic multiresolution analysis.

Multiresolution analyses in the space of discrete periodic complex-valued functions are studied. Characterization of a multiresolution analysis in terms of Fourier coefficients of functions that form a corresponding scaling sequence is obtained. An example of a multiresolution analysis with scaling sequence that consists of trigonometric polynomials with minimally supported spectrum is provided.

С.-Петербургский государственный университет
Университетская наб. 7/9
199304 С.-Петербург
E-mail: p.andrianov@spbu.ru

Поступило 9 ноября 2020 г.