Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 498, 2020 г.

**В. Р. Крым**

# ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ СХОУТЕНА И УРАВНЕНИЕ ЯКОБИ В СУБРИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

## §1. Введение

*Распределением* на гладком многообразии $N$ называется семейство подпространств $\mathcal{A}(x) \subset T_xN$, гладко параметризованное точками многообразия. Общая теория вариационного исчисления с неголономными ограничениями $\varphi(t, x, \dot{x}) = 0$ построена в книге [1]. Распределения получаются, если ограничения линейны по скоростям: $\omega_x(\dot{x}) = 0$, где $\omega$ – 1-форма [2, 3]. Распределение *голономно*, если существует подмногообразие $M \subset N$, такое, что распределение $\mathcal{A}$ совпадает с касательным расслоением $TM$. Субриманова структура на распределении – это скалярное произведение на слоях, гладко зависящее от точки. В субримановой геометрии распределение предполагается *вполне неголономным* (условие Хёрмандера) [4, 5], т.е. последовательные коммутаторы базисных векторных полей распределения порождают все касательное пространство. Любые две точки связного субриманова многообразия можно соединить горизонтальным путем (теорема Рашевского–Чжоу) [6, 7].

В 1928 г. румынский математик Врэнчану впервые четко сформулировал понятие неголономной структуры на римановом многообразии и ее отношение к динамике неголономных систем [8, 9]. Голландский геометр Схоутен определил усеченную связность и тензор кривизны для горизонтальных векторных полей [10, 11]. Наконец, советский геометр В. В. Вагнер построил общий тензор кривизны, продолжающий тензор Схоутена, который отвечал всем обычным требованиям, например, он обращается в нуль в том и только в том случае, когда связность Схоутена–Врэнчану – плоская [12]. В 1985 г. эти работы были изложены на современном языке Е. М. Горбатенко [13] (Томск).

---

*Ключевые слова*: неголономные распределения, субриманова геометрия, сопряженные точки, группа Гейзенберга, достаточные условия оптимальности.

Нами установлено, что если распределение и его метрический тензор не зависят от “вертикальных” координат, то тензор кривизны Схоутена вычисляется так же, как тензор кривизны в римановой геометрии. Это позволяет записать уравнение Якоби в геометрически ковариантной форме.

## §2. Связность и кривизна распределения

Рассмотрим распределение $\mathcal{A}$ размерности $m$ на гладком многообразии $N$ размерности $n$. На любой достаточно малой области $U \subset N$ координаты $x^k$, $k = 1, \ldots, n$, можно выбрать так, чтобы «проекция» распределения $\mathcal{A}$ на первые $m$ координат была максимальной. Тогда базис распределения $\mathcal{A}$ можно выбрать следующим образом:

$$e_k = \partial_k - \sum_{\alpha=m+1}^{n} A_k^\alpha \partial_\alpha, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

где $\partial_k = \dfrac{\partial}{\partial x^k}$ – координатные векторные поля. Функции $A_k^\alpha$ будем называть *потенциалами распределения*. Мы предполагаем, что они $C^1$-гладкие. Распределение $\mathcal{A}$ может быть также задано дифференциальными формами

$$\omega^\alpha = \sum_{s=1}^{m} A_s^\alpha dx^s + dx^\alpha, \quad \alpha = m+1, \ldots, n. \tag{2}$$

Далее латинские индексы пробегают диапазон $1, \ldots, m$, а греческие – $m+1, \ldots, n$. Компоненты скобок Ли $[e_i, e_j] = \sum\limits_{k=1}^{m} c_{ij}^k e_k + \sum\limits_{\alpha=m+1}^{n} c_{ij}^\alpha \partial_\alpha$ будем обозначать $c_{ij}^k$. В базисе (1) отличны от нуля могут быть только компоненты $F_{ij}^\alpha = c_{ij}^\alpha$. Тензор $F_{ij}^\alpha$ – это тензор неголономности распределения.

Для каждой точки $x \in N$ на распределении $\mathcal{A}(x)$ определена квадратичная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ – метрический тензор распределения. В базисе (1)

$$g_{ij}(x) = \langle e_i, e_j \rangle_x. \tag{3}$$

Метрический тензор распределения гладко зависит от точки.

Ковариантное дифференцирование $\nabla_X Y$ на распределении определено для горизонтальных векторных полей $X, Y$, и векторное поле

$\nabla_X Y$ также горизонтально. Условие римановости связности определяется как обычно:

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle. \tag{4}$$

Тензором кручения неголономной связности называется тензор $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - \mathrm{pr}([X,Y])$, где $\mathrm{pr} = \sum\limits_{k=1}^{m} e_k \otimes dx^k$ – (горизонтальная) проекция на распределение [13]. Условие симметричности связности означает, что кручение равно нулю:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \mathrm{pr}([X,Y]). \tag{5}$$

Ядро проекции $\mathrm{pr}_x^{-1}(0)$ также задает распределение на $N$, оно предполагается голономным. Координаты $\{x^\alpha | \, \alpha = m{+}1,\dots,n\}$ на соответствующем интегральном подмногообразии будем называть *вертикальными*. Легко получить аналог формулы Кошуля:

$$\begin{aligned}2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \big(X\langle Y,Z\rangle - \langle Y, \mathrm{pr}[X,Z]\rangle\big) + \big(Y\langle Z,X\rangle - \langle X, \mathrm{pr}[Y,Z]\rangle\big)\\ - \big(Z\langle X,Y\rangle - \langle Z, \mathrm{pr}[X,Y]\rangle\big).\end{aligned} \tag{6}$$

Определим символы Кристоффеля для связности на распределении: $\nabla_{e_p} e_r = \sum\limits_{k=1}^{m} \Gamma^k_{pr} e_k$. Так как в базисе (1) $\mathrm{pr}[e_p, e_r] = 0$, имеем

$$\Gamma^l_{pr} = \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{m} g^{lq} \sum_{i=1}^{n} \Big( e^i_r \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^i} + e^i_p \frac{\partial g_{rq}}{\partial x^i} - e^i_q \frac{\partial g_{pr}}{\partial x^i} \Big), \quad l,p,r = 1,\dots,m. \tag{7}$$

Таким образом, симметричная риманова связность распределения определяется только метрическим тензором распределения и его потенциалами.

**Лемма 1.** *Если метрический тензор распределения не зависит от вертикальных координат $x^\alpha$, то символы Кристоффеля будут вычисляться так же, как и на римановом многообразии размерности $m$: $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \sum\limits_{s=1}^{m} g^{sk}\big(\partial_i g_{js} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}\big)$.*

**Тензор Схоутена.** Для каждой точки $x \in N$ и любых трех векторов $u, v, w \in \mathcal{A}(x)$ *преобразование кривизны распределения* $\mathcal{A}$ в точке $x$ определяется тензором Схоутена [10, 11, 13]

$$R(u,v)w = \nabla_{\widetilde{u}} \nabla_{\widetilde{v}} \widetilde{w} - \nabla_{\widetilde{v}} \nabla_{\widetilde{u}} \widetilde{w} - \nabla_{\mathrm{pr}[\widetilde{u},\widetilde{v}]} \widetilde{w} - \mathrm{pr}\big[(1-\mathrm{pr})[\widetilde{u},\widetilde{v}], \widetilde{w}\big], \tag{8}$$

где $\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{w}$ – распространения векторов $u, v, w$ до гладких горизонтальных векторных полей на окрестности точки $x$ ($\widetilde{u}(x) = u$, $\widetilde{v}(x) = v$, $\widetilde{w}(x) = w$). Преобразование кривизны не зависит от способа распространения векторов $u, v, w$ до векторных полей, т.е. является тензорным полем на многообразии. Векторное поле $\widetilde{w}$ будем выбирать так, чтобы оно не зависело от вертикальных координат $x^\alpha$. Рассмотрим $R(e_i, e_j)e_k$ для базиса распределения (1). Горизонтальная проекция производной Ли по вертикальному векторному полю $\mathrm{pr}\big[(1–\mathrm{pr})[e_i, e_j], e_k\big]$ равна нулю, потому что $e_k$ не зависит от координат $x^\alpha$, а результат дифференцирования скобки Ли $[e_i, e_j]$ по $e_k$ обнуляется проекцией. Поэтому в базисе (1) формула для преобразования кривизны упрощается: $R(e_i, e_j)e_k = \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}e_k - \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}e_k - \nabla_{\mathrm{pr}[e_i,e_j]}e_k$ [14]. Слагаемое $\nabla_{\mathrm{pr}[e_i,e_j]}e_k$ равно нулю, потому что $\mathrm{pr}[e_i, e_j] = 0$. В римановой геометрии соответствующий член также равен нулю для любых координатных векторных полей, так как $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Поэтому формула для тензора кривизны распределения в базисе (1) совпадает с формулой для тензора кривизны в римановой геометрии: $R_{ijkl} = \langle R(e_k, e_l)e_j, e_i\rangle$ и

$$R^i{}_{jkl} = \partial_k\Gamma^i_{lj} - \partial_l\Gamma^i_{kj} + \sum_{s=1}^{m}\big(\Gamma^s_{lj}\Gamma^i_{ks} - \Gamma^s_{kj}\Gamma^i_{ls}\big). \tag{9}$$

**Теорема 1.** *Если распределение и его метрический тензор не зависят от вертикальных координат, то его тензор кривизны Схоутена совпадает с римановым тензором кривизны многообразия с метрикой* (3).

В физике при описании электромагнетизма почти исключительно используется калибровочно инвариантный тензор $F_{ij}$, который совпадает с тензором неголономности некоторого распределения [15].

## §3. Геодезический поток

В субримановой геометрии[1] рассматривается неголономная вариационная задача на минимум длины на римановом многообразии, ограничения в которой задаются неголономным распределением. Решения

[1]В неголономной механике уравнения движения механической системы определяются принципом Лагранжа–Даламбера [16, 17, 18]. Иногда их траектории называют *прямейшими*, в отличие от *кратчайших* в субримановой геометрии.

этой задачи – неголономные геодезические – удовлетворяют уравнениям Эйлера–Лагранжа условной задачи. Их совокупность порождает неголономный геодезический поток, заданный на смешанном расслоении, являющемся прямой суммой распределения и его аннулятора в кокасательном расслоении. Построенный поток позволяет обобщить на неголономный случай понятие экспоненциального отображения [2, 19, 20, 21].

Рассмотрим классическую задачу вариационного исчисления: найти абсолютно непрерывную вектор-функцию, которая доставляет экстремум функционалу

$$J(x(\cdot)) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T} \langle \dot{x}(t), \dot{x}(t)\rangle\, dt \tag{10}$$

на множестве абсолютно непрерывных путей $\gamma : [t_0, T] \to N$ с закрепленными концами, $x(t_0) = x_0$, $x(T) = x_1$, причем моменты времени $t_0$, $T$ также закреплены. Предположим, что допустимые пути удовлетворяют условиям $\omega^\alpha(\gamma') = 0$, $\alpha = m+1, \ldots, n$. Тогда лагранжиан условной вариационной задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(t, x, u, \lambda) = a_0\langle u(t), u(t)\rangle + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \lambda_\alpha \omega^\alpha(u). \tag{11}$$

Обозначим $\dfrac{Du}{dt}$ ковариантную производную вектора скорости кривой вдоль пути: $\left(\dfrac{Du}{dt}\right)^l = \dot{u}^l + \sum\limits_{i,j=1}^{m} \Gamma^l_{ij} u^i u^j$ и $\widehat{F}_s{}^{\alpha l} = \sum\limits_{k=1}^{m} g^{lk} F^\alpha_{ks}$, где $(g^{lk})_{l,k=1,..,m}$ – матрица, обратная к матрице метрического тензора распределения.

**Теорема 2.** *Решение вариационной задачи* (10) *почти везде удовлетворяет системе уравнений* (12)*:*

$$\begin{cases} a_0\left(\frac{Du}{dt}\right)^l + \sum\limits_{\alpha=m+1}^{n} \lambda_\alpha \sum\limits_{s=1}^{m} F_s{}^{\alpha l} u^s = 0, & l = 1, \ldots, m, \\ \dot{\lambda}_\beta - \sum\limits_{\alpha=m+1}^{n} \lambda_\alpha \sum\limits_{s=1}^{m} \dfrac{\partial A^\alpha_s}{\partial x^\beta} u^s - \frac{a_0}{2} \sum\limits_{i,j=1}^{m} \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^\beta} u^i u^j = 0, & \beta = m+1, \ldots, n. \end{cases} \tag{12}$$

*Если* $a_0 \neq 0$*, то это система дифференциальных уравнений. Если* $a_0 = 0$*, то это уравнение на нулевое собственное значение* [22].

Если для распределения выполняется условие цикличности по $x^\alpha$, т.е. метрический тензор распределения $g_{ij}$ и потенциалы $A^\alpha_k$ не зависят от координат $x^\alpha$, $\alpha = m{+}1,\dots,n$, то $\dot\lambda_\alpha = 0$, т.е. $\lambda_\alpha = \mathrm{const}$. Если $a_0 = 0$, то геодезическая называется *анормальной* [23, 24, 25, 26].

В субримановой геометрии начальные данные задачи Коши включают не только начальную скорость, т.е. допустимый вектор $v \in \mathcal{A}(x_0)$, но и ковектор $\omega_{x_0}$, поскольку необходимо задать начальные значения для множителей Лагранжа. Дифференциальные формы $\{\omega^\alpha | \alpha = m{+}1,\dots,n\}$ задают кораспределение $\mathcal{A}^\perp$ в $T^*N$, дуальное к распределению $\mathcal{A}$ («аннулятор распределения»). Расслоение $\mathrm{ken}\mathcal{A} = \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^\perp$ над $N$ называется *смешанным расслоением (“кентавром”)*, порожденным распределением $\mathcal{A}$ [2]. Смешанное расслоение есть фазовое пространство для неголономных динамических систем. Уравнения Эйлера–Лагранжа для неголономной задачи определяют векторное поле в смешанном расслоении. На полном римановом многообразии для любого вполне неголономного распределения глобально определен поток в $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^\perp$. Этот поток называется *неголономным геодезическим потоком.*

Пусть $\gamma_u^\lambda$ – геодезическая с начальными значениями $\lambda$ и начальным вектором скорости $u \in \mathcal{A}(x)$, выходящая из точки $x \in N$. Заметим, что $\gamma_{tu}^{t\lambda}(1) = \gamma_u^\lambda(t)$. Для некоторой точки $x \in N$ и любого вектора $(u,\lambda) \in \mathcal{A}(x) \times \mathbb{R}^{n-m}$ обозначим $\exp_x^\lambda u = \gamma_u^\lambda(1)$, если геодезическая $\gamma_u^\lambda$ продолжима до значения параметра $t = 1$. Отображение $\exp_x$, действующее по правилу $\exp_x^\lambda u = \gamma_u^\lambda(1)$, называется *экспоненциальным отображением.* Отображение $\exp_x$ не является диффеоморфизмом ни для какой окрестности нуля в $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^\perp$. Например, при нулевой начальной скорости $\exp_x^\lambda 0 = x$ при любых $\lambda$. Однако если рассматривать проколотую окрестность (начальная скорость не ноль), то экспоненциальное отображение ведет себя достаточно регулярно. Обозначим $d_u \exp_x^\lambda(v)$ значение на векторе $v \in T_u\mathcal{A}(x)$ дифференциала отображения $\exp_x^\lambda$ в точке $u \in \mathcal{A}(x)$. Будем считать, что второе касательное пространство канонически отождествлено с первым. Тогда дифференциал экспоненциального отображения при нулевых множителях Лагранжа является тождественным отображением $\mathcal{A}(x)$ на себя: $d_0 \exp_x^0 = \mathrm{id}_{\mathcal{A}(x)}$. Поэтому существует окрестность нуля $\Lambda \subset \mathbb{R}^{n-m}$, такая, что $d_0 \exp_x^\lambda$ имеет максимальный ранг на этой окрестности (множители Лагранжа фиксированы и не меняются со временем в силу предположения цикличности).

**Теорема 3.** *Пусть для распределения выполняется условие цикличности. Пусть матрица* $(\langle \widehat{F}^\alpha v, \widehat{F}^\beta v\rangle)_{\alpha,\beta=m+1,\dots,n}$ *невырождена для некоторого вектора* $v \in \mathcal{A}(x_0)$, $x_0 \in N$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}^{n-m}$, *причем* $|v|^2{+}|\lambda|^2 = 1$.

*Тогда при достаточно малых* $t \neq 0$ *отображение* $\exp_{x_0}$ *по совокупности аргументов является диффеоморфизмом для некоторой окрестности точки* $(vt, \lambda t)$ [22].

## §4. Вариации и уравнения вариаций

*Горизонтальной вариацией* горизонтального пути $\gamma\colon [t_0, T] \to N$ называется $C^2$-гладкое однопараметрическое семейство $\sigma(\cdot,\tau)\colon [t_0,T]\to N$, $|\tau| < \varepsilon$, где на “центральной линии” $\sigma(t,0) \equiv \gamma(t)$ и $\dfrac{\partial\sigma}{\partial t} \in \mathcal{A}(\sigma(t,\tau))$ при всех допустимых $t$ и $\tau$. С каждой вариацией связаны два векторных поля вдоль отображения $\sigma$: $X = \dfrac{\partial\sigma}{\partial t}$ и $Y = \dfrac{\partial\sigma}{\partial\tau}$. Векторное поле $Y(\cdot,0)$ вдоль $\gamma$ будем называть *основным векторным полем* и обозначать просто $Y$.

Горизонтальная вариация удовлетворяет условиям $\omega^\alpha(\frac{\partial\sigma}{\partial t}) = 0$. Дифференцируя это тождество по $\tau$, получим

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial\omega^\alpha_k}{\partial x^j}\frac{\partial\sigma^j}{\partial\tau}\frac{\partial\sigma^k}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\omega^\alpha_k\frac{\partial^2\sigma^k}{\partial t\partial\tau} = 0.$$

При $\tau = 0$ получим *уравнения вариаций вдоль* $\gamma$*:*

$$\sum_{k=1}^{n}\omega^\alpha_k\frac{dY^k}{dt} + \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial\omega^\alpha_k}{\partial x^j}\gamma'^k Y^j = 0, \quad \alpha = m+1,\ldots,n. \tag{13}$$

Эти уравнения мы будем обозначать $\Phi^\alpha(Y', Y) = 0$, $\alpha = m+1,\ldots,n$. Это система из $n - m$ дифференциальных уравнений, и ранг матрицы $(\omega^\alpha_k)$ равен $n - m$. Поэтому горизонтальная проекция основного векторного поля $Y$ может быть выбрана произвольно, а вертикальные компоненты $Y^\alpha$ определяются начальным условием.

Двухпараметрической вариацией $\sigma$ геодезической $\gamma$ называется семейство кривых $\sigma(t,\varphi,\tau)$, такое, что $\sigma(t,0,0) \equiv \gamma(t)$. Геодезическая $\gamma$ и ее вариация $\sigma$ предполагаются $C^2$-гладкими. Кроме того, мы предполагаем, что третьи производные $\dfrac{\partial^3\sigma}{\partial\varphi\partial t\partial\tau}$, $\dfrac{\partial^3\sigma}{\partial t\partial\varphi\partial\tau}$ существуют при всех допустимых $t$, $\varphi$, $\tau$ и непрерывны вдоль $\gamma$.

## §5. Уравнение Якоби

Мы рассматриваем задачу минимизации функционала энергии

$$J(\gamma)=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T}\langle\gamma',\gamma'\rangle\,dt$$

на множестве горизонтальных путей при закрепленном времени и закрепленных концах. Уравнения Эйлера–Лагранжа для этой задачи (12) дают только необходимые, но не достаточные условия оптимальности. Чтобы найти достаточные условия оптимальности, необходимо рассмотреть задачу о минимизации второй вариации функционала энергии при выполнении уравнений вариаций $\Phi^\alpha(Y',Y)=0$, см. (13). В суммах, содержащих множители Лагранжа $\sum\limits_{\alpha=m+1}^{n}\lambda_\alpha\omega^\alpha$ и $\sum\limits_{\alpha=m+1}^{n}\lambda_\alpha F^\alpha$, индекс $\alpha$ и знак суммирования будем опускать. Будем рассматривать распределения с условием цикличности: распределение $\mathcal{A}$ и его метрический тензор не зависят от вертикальных координат $\{x^\alpha\,|\,\alpha=m+1,\dots,n\}$.

В работе [27] было показано, что вторая вариация функционала энергии для распределения имеет вид

$$\frac{\partial^2 J}{\partial\varphi\partial\tau}\bigg|_{\substack{\tau=0\\ \mu=0}}=\Big\langle\gamma',\frac{DZ}{\partial\varphi}\Big\rangle\Big|_{t_0}^{T}+\lambda\frac{\partial(\omega(Z))}{\partial\varphi}\Big|_{t_0}^{T}+I(Y,Z),$$

где $Y=\dfrac{\partial\sigma}{\partial\varphi}$, $Z=\dfrac{\partial\sigma}{\partial\tau}$. Функционал

$$\begin{aligned}I(Y,Z)=&\int\limits_{t_0}^{T}\Big(\Big\langle\frac{DY}{dt},\frac{DZ}{dt}\Big\rangle-\big\langle R(Y,\gamma')\gamma',Z\big\rangle\Big)dt\\&-\int\limits_{t_0}^{T}\lambda\Big((\nabla_Y F)(\gamma',Z)+F\big(\frac{DY}{dt},Z\big)\Big)dt\end{aligned}\tag{14}$$

назовем *индексной формой горизонтальной геодезической* $\gamma$ (здесь $R$ – преобразование кривизны распределения). Векторные поля $Y(\,\cdot\,,0,0)$, $Z(\,\cdot\,,0,0)$ вдоль $\gamma$ будем обозначать теми же буквами $Y$, $Z$. Если одно из полей $Y,Z$ вертикально, то $I(Y,Z)=0$.

Метрический тензор распределения в субримановой геометрии положительно определен. Будем рассматривать вариации с закрепленными концами. Тогда $I(Y, Y) > 0$ для достаточно коротких геодезических. Это одно из необходимых условий оптимальности. Чтобы найти уравнение Якоби, необходимо рассмотреть задачу минимизации функционала $I(Y, Y)$ при выполнении уравнений вариаций $\Phi^\alpha(Y', Y) = 0$, см. (13). Итак, минимизируем функционал

$$S(Y) = \frac{1}{2} I(Y, Y) + \int_{t_0}^{T} \mu\, \Phi(Y', Y)\, dt. \tag{15}$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа для этого функционала – это уравнение Якоби.

**Определение 1.** Пару $(Y, \mu)$, где $Y$ – векторное поле вдоль геодезической $\gamma$ с множителями Лагранжа $\lambda$, будем называть полем Якоби, если оно удовлетворяет уравнениям вариаций (13) и неголономному уравнению Якоби

$$\frac{D}{dt}\frac{DY}{dt} + R(Y, \gamma')\gamma' + \lambda \widehat{F}\Big(\frac{DY}{dt}\Big) + \lambda(\nabla_Y \widehat{F})(\gamma') + \mu \widehat{F}(\gamma') = 0. \tag{16}$$

Уравнения (13), (16) являются системой линейных однородных дифференциальных уравнений относительно переменных $(Y, \mu)$. Множество решений этой системы образует линейное пространство. Уравнение (16) определяет только первые $m$ компонент $Y^k$, $k = 1, \ldots, m$. Вертикальные компоненты $Y^\alpha$ определяются уравнением вариаций (13). В задаче с закрепленными концами условия трансверсальности имеют вид $Y^\alpha(t_0) = 0$, $\alpha = m+1, \ldots, n$. Тогда для любых $u, v \in \mathcal{A}(x_0)$, $x_0 = \gamma(t_0)$, существует единственное поле Якоби $Y_{u,v}$, такое, что $Y_{u,v}(t_0) = u$ и $Y'_{u,v}(t_0) = v$ (штрих означает ковариантное дифференцирование). Поэтому размерность пространства полей Якоби вдоль $\gamma$ равна $2m$, где $m$ – размерность распределения $\mathcal{A}$.

**Определение 2.** Точки $t_1, t_2 \in [t_0, T]$, $t_1 \neq t_2$, называются сопряжёнными вдоль горизонтальной геодезической $\gamma$, если существует нетривиальное поле Якоби $Y$ вдоль $\gamma$, обращающееся в нуль в этих точках: $Y(t_1) = 0$ и $Y(t_2) = 0$.

Наглядно сопряженность означает следующее: если из точки $\gamma(t_1)$ выпустить геодезические, образующие с $\gamma$ углы $\varphi$, то эти геодезические будут проходить на расстоянии $o(\varphi)$ $(\varphi \to 0)$ от точки $\gamma(t_2)$.

**Теорема 4.** *Пусть $\gamma$ – геодезическая с множителями Лагранжа $\lambda$ с началом $x_1 = \gamma(t_1)$ и концом $x_2 = \gamma(t_2)$. Точка $x_1$ сопряжена с точкой $x_2$ вдоль $\gamma$ тогда и только тогда, когда ранг дифференциала $d_{(u,\lambda)} \exp_{x_1}$ не максимален, т.е. когда $(u, \lambda)$ является критической точкой отображения $(u, \lambda) \mapsto \exp^{\lambda}_{x_1}(u)$* [26].

**Теорема 5.** *Пусть для распределения выполнено условие цикличности. Пусть метрический тензор распределения положительно определён, нормальная геодезическая $\gamma$ соединяет две заданные точки $x_0 = \gamma(t_0)$ и $x_1 = \gamma(T)$ и на интервале $(t_0, T]$ нет точек, сопряжённых с $t_0$. Тогда на кривой $\gamma$ функционал энергии имеет локальный слабый минимум в задаче с закреплёнными концами* [26].

## §6. Уравнение Якоби на группе Гейзенберга

Группа Гейзенберга – это группа верхнетреугольных матриц третьего порядка. На группах Ли рассматривают левоинвариантные распределения с левоинвариантным метрическим тензором. Тогда любая горизонтальная геодезическая левоинвариантна, вектор $\gamma(t)^{-1}\dot\gamma(t)$ принадлежит алгебре Ли этой группы. На группе Гейзенберга все двумерные неголономные левоинвариантные распределения лежат на одной орбите относительно действия группы автоморфизмов алгебры Ли [2]. Будем считать, что распределение задано дифференциальной формой $\omega = x_2 dx_1 + dx_3$, а функционал энергии имеет вид $J(x(\cdot)) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \big((\dot x_1)^2 + (\dot x_2)^2\big) dt$.

Горизонтальные геодезические с началом в нуле при $\lambda \neq 0$ имеют вид

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1(t) = & \frac{1}{\lambda}\big(-v_2 + v_2\cos\lambda t + v_1 \sin\lambda t\big), \\ x_2(t) = & \frac{1}{\lambda}\big(v_1 - v_1\cos\lambda t + v_2 \sin\lambda t\big), \\ x_3(t) = & \frac{1}{4\lambda^2}\Big(2\lambda t(v_1^2 + v_2^2) + 2v_1v_2 - 4v_1v_2\cos\lambda t - 4v_1^2 \sin\lambda t \\ & +2v_1v_2\cos 2\lambda t + (v_1^2 - v_2^2)\sin 2\lambda t\Big). \end{array}\right. \tag{17}$$

Горизонтальные геодезические при $\lambda = 0$ – это прямые, и этот случай мы не рассматриваем. Отметим, что $\dot x_1(0) = v_1$ и $\dot x_2(0) = v_2$. На интервале $[0, 2\pi/|\lambda|)$ геодезическая оптимальна, т.е. является кратчайшей, соединяющей две заданные точки. Если $|\lambda t| > 2\pi$, то геодезическая

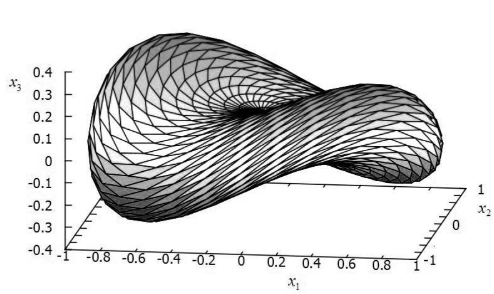


Рис. 1. Неголономная геодезическая сфера.

перестает быть кратчайшей. Неголономную геодезическую сферу радиуса $s$ можно определить следующим образом:

$$B(s) = \left\{\gamma(s) \,\middle|\, v_1, v_2, \lambda \in \mathbb{R},\ |\mathbf{v}| = 1,\ |\lambda s| \leqslant 2\pi\right\}. \tag{18}$$

В субримановой геометрии известна *теорема о параллелепипеде* [2]. Для группы Гейзенберга она утверждает, что если радиус сферы $s$ достаточно мал, то смещение вдоль координаты $x_3$ не превосходит $Cs^2$. Неголономная геодезическая сфера радиуса 1 показана на рис. 1.

Уравнение Якоби (16) имеет вид

$$\begin{cases} \ddot{Y}_1 + \lambda \dot{Y}_2 + \mu\big(v_1 \sin \lambda t + v_2 \cos \lambda t\big) = 0, \\ \ddot{Y}_2 - \lambda \dot{Y}_1 - \mu\big(v_1 \cos \lambda t - v_2 \sin \lambda t\big) = 0, \\ \dot{Y}_3 + \frac{1}{\lambda}\big(v_1 - v_1 \cos \lambda t + v_2 \sin \lambda t\big)\dot{Y}_1 + \big(v_1 \cos \lambda t - v_2 \sin \lambda t\big) Y_2 = 0, \\ \dot{\mu} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Это система линейных однородных дифференциальных уравнений относительно переменных $Y, \mu$. Чтобы найти точки, сопряженные с $t_0 = 0$, необходимо найти решения этого уравнения, удовлетворяющие условиям $Y(0) = 0$, $Y'(0) \neq 0$. Соответствующая часть фундаментальной матрицы системы решений есть

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin \lambda t}{\lambda} & \dfrac{\cos \lambda t - 1}{\lambda} & \dfrac{(v_1 \lambda t - v_2)\cos \lambda t - (v_1 + v_2 \lambda t)\sin \lambda t + v_2}{\lambda^2} \\ \dfrac{1 - \cos \lambda t}{\lambda} & \dfrac{\sin \lambda t}{\lambda} & \dfrac{(v_1 \lambda t - v_2)\sin \lambda t + (v_1 + v_2 \lambda t)\cos \lambda t - v_1}{\lambda^2} \\ \dfrac{\begin{gathered}\big(2v_1 \lambda t - 4v_1 \sin \lambda t \\ + v_1 \sin 2\lambda t - 2v_2 \cos \lambda t \\ + v_2 \cos 2\lambda t + v_2\big)\end{gathered}}{2\lambda^2} & \dfrac{\begin{gathered}\big(2v_2 \lambda t - v_2 \sin 2\lambda t \\ + v_1 \cos 2\lambda t + v_1 \\ - 2v_1 \cos \lambda t\big)\end{gathered}}{2\lambda^2} & \dfrac{\begin{gathered}-\big((v_1^2 + v_2^2)\lambda t - 4v_1^2 \sin \lambda t + (v_1^2 - v_2^2 + 2v_1 v_2 \lambda t)\sin 2\lambda t \\ + 2(v_1 \lambda t - 2v_2)v_1 \cos \lambda t - 2v_1 v_2 \lambda t \sin \lambda t + 2v_1 v_2 \\ + (2v_1 v_2 + (v_2^2 - v_1^2)\lambda t)\cos 2\lambda t\big)\end{gathered}}{2\lambda^3} \end{pmatrix}.$$

Решение имеет вид

$$(Y_1, Y_2, Y_3)^T = P(a_1, a_2, \mu)^T, \tag{20}$$

где $a_1$, $a_2$, $\mu$ – постоянные. Определитель матрицы коэффициентов равен

$$\det P = -2t\bigl(\lambda t \cos\frac{\lambda t}{2} - 2\sin\frac{\lambda t}{2}\bigr)\sin(\frac{\lambda t}{2})(v_1^2 + v_2^2)/\lambda^4. \tag{21}$$

В сопряженной точке $\det P = 0$. Получаем два уравнения. Для первой серии сопряженных точек $\sin\frac{\lambda t}{2} = 0$ и $t_k = 2\pi k/\lambda$, $k \in \mathbb{Z}$. Соответствующее поле Якоби определяется уравнением (20) с параметрами

$$a_1 = v_2, \quad a_2 = -v_1, \quad \mu = 0. \tag{22}$$

Для второй серии сопряженных точек $\lambda t \cos\frac{\lambda t}{2} - 2\sin\frac{\lambda t}{2} = 0$. Легко найти, что $t_n \approx \pm(\pi + 2\pi n)/\lambda$ асимптотически для больши́х $n \in \mathbb{N}$. Первая сопряженная точка этой серии – $t_1 \approx 8.99/\lambda$. Соответствующее поле Якоби определяется уравнением (20) с параметрами

$$a_1 \approx 4.49 v_2/\lambda, \quad a_2 \approx -4.49 v_1/\lambda, \quad \mu = 1. \tag{23}$$

## Список литературы


1. G. A. Bliss, *Lectures on the Calculus of Variations*, Chicago, The University of Chicago Press, 1963.
2. А. М. Вершик, В. Я. Гершкович, *Неголономные динамические системы, геометрия распределений и вариационные задачи.* — В сб.: Итоги науки и техники, сер. Совр. пробл. мат., фунд. напр. **16** (1987), сс. 5–85.
3. П. Я. Грозман, Д. А. Лейтес, *Неголономные тензоры Римана и Вейля для флаговых многообразий.* — Теор. матем. физ. **153**, вып. 2 (2007), 186–219.
4. M. Gromov, *Carnot–Carathéodory spaces seen from within.* — In: A. Bellaïche, J.-J. Risler (eds.), *Sub-Riemannian Geometry,* Basel, Birkhäuser, 1996, pp. 79–323.
5. R. S. Strichartz, *Sub-Riemannian geometry.* — J. Differ. Geom. **24** (1986), 221–263.
6. W.-L. Chow, *Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.* — Math. Ann. **117** (1939), 98–105.
7. П. К. Рашевский, *Любые две точки вполне неголономного пространства могут быть соединены допустимой кривой.* — Уч. зап. Моск. пед. ин-та им. Либкнехта, сер. физ.-мат. **2** (1938), 83–94.
8. G. Vranceanu, *Parallelisme et courbure dans une variété non holonome.* — In: Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna, Vol. 5, 1929, pp. 61–68.
9. G. Vranceanu, *Les espaces non holonomes et leurs applications mécaniques*, Paris, Gauthier-Villars, 1936.
10. J. A. Schouten, E. R. van Kampen, *Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde.* — Math. Ann. **103** (1930), 752–783.
11. J. A. Schouten, W. van der Kulk, *Pfaff's Problem and its Generalizations*, Oxford, Clarendon Press, 1949.

12. В. В. Вагнер, *Дифференциальная геометрия неголономных многообразий*, Казань, Изд-во Казанского физ.-мат. общ., 1939.
13. Е. М. Горбатенко, *Дифференциальная геометрия неголономных многообразий* (*по В.В. Вагнеру*). — Геом. сб. Томского ун-та **26** (1985), 31–43.
14. В. Р. Крым, Н. Н. Петров, *Тензор кривизны и уравнения Эйнштейна для четырехмерного неголономного распределения.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, вып. **3** (2008), 68–80.
15. В. Р. Крым, *Уравнения геодезических для заряженной частицы в объединенной теории гравитационных и электромагнитных взаимодействий.* — Теор. матем. физ. **119**, вып. 3 (1999), 517–528.
16. А. В. Борисов, И. С. Мамаев, И. А. Бизяев, *Динамические системы с неинтегрируемыми связями: вакономная механика, субриманова геометрия и неголономная механика.* — УМН **72**, вып. 5 (2017), 3–62.
17. А. М. Вершик, Л. Д. Фаддеев, *Дифференциальная геометрия и лагранжева механика со связями.* — ДАН СССР **202** (1972), 555–557.
18. А. М. Вершик, Л. Д. Фаддеев, *Лагранжева механика в инвариантом изложении.* — В сб.: Проблемы теоретической физики, т. 2. Л.: Изд-во ЛГУ, 1975.
19. А. М. Вершик, О. А. Граничина, *Редукция неголономных вариационных задач к изопериметрическим и связности в главных расслоениях.* — Мат. заметки **49**, вып. 5 (1991), 37–44.
20. А. М. Вершик, В. Я. Гершкович, *Геодезический поток на $SL(2,\mathbb{R})$ с неголономными ограничениями.* — Зап. научн. сем. ЛОМИ **155** (1986), 7–17.
21. В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева, *Субриманово расстояние в группе Ли $SL(2)$.* — Сиб. матем. журн. **58**, вып. 1 (2017), 22–35.
22. В. Р. Крым, *Неголономные геодезические как решения интегральных уравнений Эйлера–Лагранжа и дифференциал экспоненциального отображения.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, вып. **3** (2009), 31–40.
23. Н. Н. Петров, *Существование анормальных кратчайших геодезических в субримановой геометрии.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, вып. **3** (1993), 28–32.
24. R. Montgomery, *A survey of singular curves in sub-Riemannian geometry.* — J. Dyn. Control Syst. **1**, No. 1 (1995), 49–90.
25. R. Montgomery, *Book review of: A. Agrachev et al., A Comprehensive Introduction to Sub-Riemannian Geometry. From the Hamiltonian Viewpoint.* — Bull. Amer. Math. Soc., New Ser. **57**, No. 4 (2020), 657–677.
26. В. Р. Крым, *Уравнение Якоби для горизонтальных геодезических на неголономном распределении и тензор кривизны Схоутена.* — Дифф. ур. проц. упр. **3** (2018), 64–94.
27. В. Р. Крым, *Поля Якоби для неголономного распределения.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, вып. 4 (2010), 51–61.

Krym V. R. The Schouten curvature and the Jacobi equation in sub-Riemannian geometry.

We show that if a distribution does not depend on the vertical coordinates, then the Schouten curvature tensor coincides with the Riemannian curvature. The Schouten curvature tensor and the nonholonomicity tensor are used to write the Jacobi equation for the distribution. This leads to a study of second-order optimality conditions for horizontal geodesics in sub-Riemannian geometry. We study conjugate points for horizontal geodesics on the Heisenberg group as an example.

Автотранспортный и
электромеханический колледж,
С.-Петербург, Россия
*E-mail*: vkrym12@yandex.ru

Поступило 3 сентября 2020 г.