

Н. А. Сафонкин

ПОЛУКОНЕЧНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА ГРАФЕ ГНЕДИНА–КИНГМАНА

§1. ВВЕДЕНИЕ

В работе Кингмана [9] были описаны случайные перестановочно-инвариантные разбиения (random exchangeable partitions) множества натуральных чисел. Такие разбиения параметризуются вероятностными мерами на симплексе Кингмана, элементы которого суть бесконечные последовательности вещественных чисел $(\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq 0)$ с условием $\sum_i \alpha_i \leq 1$. Теорему Кингмана можно переформулировать в терминах гармонических функций на некотором графе ветвления – графе Кингмана \mathbb{K} ([7, 8, 5]). Вершины этого графа соответствуют диаграммам Юнга, а ребра отвечают правилу Пиери для мономиального базиса в алгебре симметрических функций Sym .

Гнединым [1] был получен аналог теоремы Кингмана для линейно упорядоченных разбиений. В этом случае, как показано в [1], роль симплекса Кингмана играет пространство открытых подмножеств единичного интервала. Теорему Гнедина можно тоже переформулировать в терминах гармонических функций на некотором графе ветвления. Этот граф мы обозначаем через \mathbb{GK} и предлагаем называть графом Гнедина–Кингмана. Его вершины состоят из всевозможных композиций, а кратности ребер задаются правилом Пиери для мономиального базиса в алгебре *квазисимметрических* функций QSym . Эта интерпретация используется в работе Карева и Никитина [3], в которой теорема Гнедина передоказана другим методом.

Цель настоящей работы – классифицировать неразложимые *полуконечные* гармонические функции на графе Гнедина–Кингмана. Условие полуконечности предполагает, что в некоторых вершинах функция

Ключевые слова: граф Кингмана, теорема Гнедина, алгебра квазисимметрических функций, мономиальный базис, композиция.

Исследование финансировалось в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5-100".

принимает значение $+\infty$; точное определение дано в §2.1. Основной результат дается теоремой 4.6. Она показывает, что параметрами классификации служат конечные наборы непересекающихся интервалов в $(0, 1)$ плюс некоторые дискретные данные (наборы композиций).

Применительно к графу Кингмана задача о полуконечных гармонических функциях была решена Вершиком и Керовым [4, 6]. Говоря неформально, наш результат соотносится с их результатом так же, как теорема Гнедина соотносится с теоремой Кингмана.

Используя естественное вложение колец $\text{Sym} \hookrightarrow \text{QSym}$, можно установить некоторое соответствие между полуконечными гармоническими функциями на графах \mathbb{GK} и \mathbb{K} . Его точное описание дается в предложении 4.15.

В заключение отметим, что граф \mathbb{GK} служит диаграммой Браттели некоторой АГ-алгебры, а неразложимые полуконечные гармонические функции на \mathbb{GK} соответствуют нормальным факторпредставлениям этой алгебры типа I_∞ и Π_∞ .

§2. ГРАФ ГНЕДИНА–КИНГМАНА И ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Граф Гнедина–Кингмана \mathbb{GK} – это градуированный граф $\mathbb{GK} = \bigsqcup_{n \geq 0} \mathbb{GK}_n$, где \mathbb{GK}_n – это множество всех композиций (упорядоченных разбиений) числа n . По определению полагается $\mathbb{GK}_0 = \{\emptyset\}$.

Ребра между композициями с соседних уровней устроены следующим образом. Пусть $\mu = (n_1, \dots, n_k)$, $|\mu| = N$, тогда композиция μ соединена ребрами со всеми композициями ν , $|\nu| = N - 1$, которые получаются из μ

- уменьшением одного из чисел n_i на единицу при $n_i \geq 2$,
- извлечением единицы из последовательности единиц, что уменьшает длину этой последовательности на 1:

$$\underbrace{(1, \dots, 1)}_j \mapsto \underbrace{(1, \dots, 1)}_{j-1}.$$

В первом случае кратность ребра равна 1, во втором случае она равна j (см. рис. 1).

Замечание 2.1. Ребра в графе \mathbb{GK} отражают правило Пиери для мономиальных квазисимметрических функций M_λ (см. [10, (3.12)] для случая $\alpha = (1)$).

Если из ν в μ идет по крайней мере одно ребро, то мы пишем $\nu \nearrow \mu$. Кратность ребра, идущего из ν в μ , будем обозначать через $\varkappa(\nu, \mu)$. По определению полагается $\varkappa(\nu, \mu) = 0$, если $|\mu| - |\nu| \neq 1$ или же $\nu \in \mathbb{GK}_{N-1}$, $\mu \in \mathbb{GK}_N$, но ν и μ не соединены ни одним ребром.

Путь будем называть последовательность композиций $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ (конечную или бесконечную) с условием $\lambda_i \nearrow \lambda_{i+1}$ для любого i .

Будем говорить, что μ лежит выше, чем ν , если μ лежит на более высоком уровне, чем ν , и их можно соединить путем. В этом случае мы будем писать $\mu > \nu$.

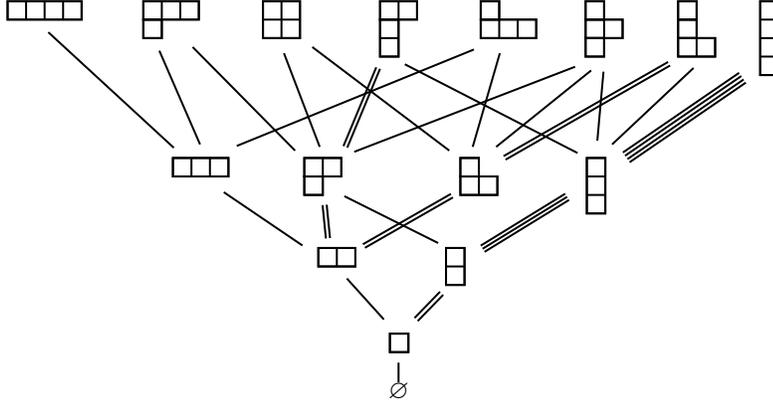


Рис. 1. Граф Гнедина–Кингмана.

Определение 2.2. Функция $\varphi: \mathbb{GK} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$, заданная на множестве вершин графа \mathbb{GK} , называется *гармонической*, если она удовлетворяет условию

$$\varphi(\lambda) = \sum_{\mu: \lambda \nearrow \mu} \varkappa(\lambda, \mu) \varphi(\mu), \quad \lambda \in \mathbb{GK}.$$

Замечание 2.3. Мы пользуемся следующими соглашениями:

- $x + (+\infty) = +\infty$, $x \in \mathbb{R}$;
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$;
- $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Наблюдение 2.4. Пусть φ – произвольная гармоническая функция. Если $\varphi(\lambda) < +\infty$, то для любой композиции μ , такой, что $\mu > \lambda$, мы

имеем $\varphi(\mu) < +\infty$. Кроме того, если $\varphi(\lambda) = 0$, то для любой композиции μ , такой, что $\mu > \lambda$, мы имеем $\varphi(\mu) = 0$.

Определение 2.5. Множество всех $\lambda \in \mathbb{G}\mathbb{K}$, для которых $\varphi(\lambda) < +\infty$, мы будем называть *идеалом конечности* функции φ . *Идеал нулей* функции φ будет обозначаться через $\ker \varphi$, а ее *носитель* $\{\lambda \in \mathbb{G}\mathbb{K} \mid \varphi(\lambda) > 0\}$ – через $\text{supp } \varphi$.

Замечание 2.6. Такие названия обусловлены тем, что множество вершин $I \subset \mathbb{G}\mathbb{K}$, удовлетворяющее свойству $\lambda \in I, \mu > \lambda \implies \mu \in I$, принято называть *идеалом* в графе ветвления [8].

Определение 2.7. Гармоническая функция φ называется *конечной*, если $\varphi(\lambda) < +\infty$ для всех $\lambda \in \mathbb{G}\mathbb{K}$.

Замечание 2.8. Конечные гармонические функции предполагаются нормированными: $\varphi(\emptyset) = 1$.

Определение 2.9. Конечная гармоническая функция φ называется *неразложимой*, если для любых конечных гармонических функций φ_1, φ_2 и положительных вещественных чисел c_1, c_2 , таких, что $c_1 + c_2 = 1$, мы имеем $\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \implies \varphi = \varphi_1$ или $\varphi = \varphi_2$.

По каждой конечной гармонической функции φ можно построить функционал $F_\varphi: \text{QSym} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F_\varphi(M_\lambda) = \varphi(\lambda),$$

где M_λ – мономиальная квазисимметрическая функция [10].

Такой функционал удовлетворяет следующим свойствам:

- (1) $F_\varphi(M_\lambda) \geq 0$;
- (2) $F_\varphi(M_{(1)}M_\lambda) = F_\varphi(M_\lambda)$;
- (3) $F_\varphi(1) = 1$.

Предложение 2.10. Соответствие $\varphi \longleftrightarrow F_\varphi$ задает биекцию между конечными гармоническими функциями на $\mathbb{G}\mathbb{K}$ и функционалами

$$\text{QSym} \rightarrow \mathbb{R},$$

удовлетворяющими свойствам (1), (2), (3).

Мы будем отождествлять φ и F_φ и использовать для них одинаковое обозначение φ .

Теорема 2.11 (теорема Вершика–Керова о кольце, [2, Proposition 8.4]). *Конечная гармоническая функция φ на графе $\mathbb{G}\mathbb{K}$ неразложима тогда и только тогда, когда она задает мультипликативный функционал: $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ для любых $a, b \in \text{QSym}$.*

2.1. Полуконечные гармонические функции и аддитивные $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -линейные отображения $K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$. Рассмотрим алгебру $R = \text{QSym}/(M_{(1)} - 1)$ и положительный конус $K \subset R$, натянутый на образы мономиальных квазисимметрических функций:

$$K = \text{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} ([M_\lambda] \mid \lambda \in \mathbb{G}\mathbb{K}),$$

где $[\cdot]: \text{QSym} \rightarrow R$ – канонический гомоморфизм. Отметим, что этот конус замкнут относительно умножения: $K \cdot K \subset K$. Конус K задает частичный порядок \geq_K на алгебре R : $a \geq_K b \iff a - b \in K$.

Каждая гармоническая функция φ задает аддитивное $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -линейное отображение $F_\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$:

$$F_\varphi([M_\lambda]) = \varphi(\lambda).$$

Напомним, что мы пользуемся соглашением $0 \cdot (+\infty) = 0$, см. замечание 2.3.

Определение 2.12. Гармоническая функция φ называется *полуконечной*, если она не является конечной и отображение

$$F_\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$$

обладает следующим свойством полунепрерывности снизу:

$$F_\varphi(a) = \sup_{\substack{b \in K: b \leq_K a, \\ F_\varphi(b) < +\infty}} F_\varphi(b), \quad a \in K. \quad (1)$$

Наблюдение 2.13. Если $F_\varphi(a) < +\infty$, то условие (1) превращается в тривиальное равенство $F_\varphi(a) = F_\varphi(a)$.

Замечание 2.14. Гармоническая функция φ является полуконечной тогда и только тогда, когда существует элемент $a \in K$, такой, что $F_\varphi(a) = +\infty$, и для любого такого a найдется последовательность $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset K$, такая, что $a_n \leq_K a$, $F_\varphi(a_n) < +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_\varphi(a_n) = +\infty$.

Замечание 2.15. Если φ – полуконечная гармоническая функция на $\mathbb{G}\mathbb{K}$, то найдется вершина $\lambda \in \mathbb{G}\mathbb{K}$, такая, что $\varphi(\lambda) = +\infty$, и для любой такой λ найдется вершина $\mu > \lambda$, такая, что $0 < \varphi(\mu) < +\infty$.

Предложение 2.16. Соответствие $\varphi \longleftrightarrow F_\varphi$ задает биекцию между полуконечными гармоническими функциями на графе $\mathbb{G}\mathbb{K}$ и $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -линейными аддитивными отображениями $K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$, удовлетворяющими свойству (1).

Мы будем отождествлять φ и F_φ и использовать для них одинаковое обозначение φ .

Определение 2.17. Полуконечная гармоническая функция φ называется *неразложимой*, если для любой конечной (не равной тождественно нулю) или полуконечной гармонической функции φ' , такой, что $\varphi \geq \varphi'$, мы имеем $\varphi = c\varphi'$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.18 ([6, р. 144]). Пусть φ – полуконечная неразложимая гармоническая функция на $\mathbb{G}\mathbb{K}$. Тогда существует ψ , конечная неразложимая гармоническая функция на $\mathbb{G}\mathbb{K}$, такая, что для любого $a \in K$ и любого $b \in K$, такого, что $\varphi(b) < +\infty$, выполнено равенство

$$\varphi(a \cdot b) = \psi(a) \cdot \varphi(b). \quad (2)$$

§3. КОНЕЧНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА ГРАФЕ ГНЕДИНА–КИНГМАНА

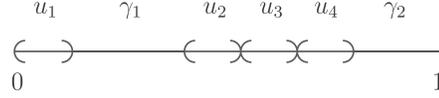
Опишем неразложимые конечные гармонические функции на графе Гнедина–Кингмана с непустым множеством нулей [3].

Определение 3.1. Пусть U_0 – множество всевозможных открытых подмножеств единичного интервала, состоящих из конечного объединения интервалов, общая длина которых равна единице. Интервалы разделяются на два типа: *h-интервалы* и *v-интервалы* (*h* – от “horizontal”, а *v* – от “vertical”). Два *v-интервала* не могут идти подряд, а *h-интервалы* могут.

Замечание 3.2. Аналогом *v-интервалов* в графе Кингмана является параметр $\gamma = 1 - \sum_i \alpha_i$, поэтому они будут обозначаться символом γ с индексом, а *h-интервалы* – символом u с индексом.

Замечание 3.3. Графически *h-интервалы* будут изображаться отрезками, окруженными круглыми скобками, а *v-интервалы* будут изображаться отрезками без каких-либо скобок.

Пример 3.4. Следующий элемент $u \in U_0$ состоит из четырех h -интервалов u_1, u_2, u_3, u_4 и двух v -интервалов γ_1, γ_2 :



Каждому элементу $u \in U_0$ соответствует конечная гармоническая функция φ_u на графе Гнедина–Кингмана $\mathbb{G}\mathbb{K}$ [1]. Описание функции φ_u будет очень похоже на конструкцию Керова границы графа Юнга, см. [2, pp. 13–18] и особенно [2, pp. 18–19, Remark 4.8].

Для того чтобы явно задать функцию φ_u , нам понадобятся следующие два гомоморфизма $\psi_+, \psi_- : \text{QSym} \rightarrow \mathbb{R}$, заданные по правилам

$$\psi_+(M_\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda = (n), \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad \psi_-(M_\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{n!}, & \text{если } \lambda = (\underbrace{1, \dots, 1}_n), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3)$$

Пусть u состоит в сумме из m интервалов. Каждому из h -интервалов поставим в соответствие гомоморфизм ψ_+ , а каждому из v -интервалов – гомоморфизм ψ_- . Тогда мы получим набор гомоморфизмов

$$\psi_1, \dots, \psi_m : \text{QSym} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Для вещественного числа $t \neq 0$ обозначим через r_t автоморфизм алгебры QSym , заданный по правилу $M_\lambda \mapsto t^{|\lambda|} M_\lambda$.

Через Δ обозначается коумножение в алгебре QSym , а отображение

$$\Delta^{(n)} : \text{QSym} \rightarrow \text{QSym}^{\otimes n}$$

определяется индуктивно:

$$\Delta^{(n+1)} = (\Delta \otimes 1) \circ \Delta^{(n)} = (1 \otimes \Delta) \circ \Delta^{(n)}, \quad \Delta^{(2)} = \Delta.$$

Обозначим через $w = (w_1, \dots, w_m)$ набор длин интервалов элемента u , взятых в естественном порядке слева направо.

Гармоническая функция φ_u определяется следующим образом:

$$\varphi_u(\lambda) = (\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_m) \circ (r_{w_1} \otimes \dots \otimes r_{w_m}) \circ \Delta^{(m)}(M_\lambda). \quad (4)$$

Замечание 3.5. При каждом фиксированном λ правая часть равенства (4) задает некоторую функцию на U_0 , которую мы будем обозначать через $M_\lambda^c(u)$.

Опишем множество $\text{supp } \varphi_u$ вершин, на которых φ_u принимает ненулевое значение. Для этого нам понадобится некоторая “бесконечная” композиция.

Определение 3.6. *Бесконечной композицией $\mathbb{G}\mathbb{K}_u$, соответствующей элементу $u \in U_0$, мы будем называть последовательность из строк и столбцов бесконечной длины. Строки соответствуют h -интервалам в u , а столбцы – v -интервалам. Строки и столбцы в бесконечной композиции идут в том же порядке, в котором шли h -интервалы и v -интервалы в u . Мы будем отождествлять эту бесконечную композицию с множеством (обычных) композиций, содержащихся внутри нее, и обозначать это множество тем же символом $\mathbb{G}\mathbb{K}_u$. Таким образом, каждая композиция из $\mathbb{G}\mathbb{K}_u$ может быть представлена в виде последовательного объединения строк и столбцов произвольной (быть может, нулевой) длины с тем условием, что строки соответствуют h -интервалам элемента u , а столбцы – v -интервалам.*

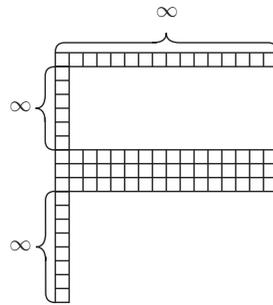


Рис. 2. Бесконечная композиция $\mathbb{G}\mathbb{K}_u$ для элемента $u \in U_0$ из примера 3.4. Строки и столбцы из белых клеток имеют бесконечную длину.

Замечание 3.7. Бесконечная композиция $\mathbb{G}\mathbb{K}_u$ никак не зависит от длин интервалов, но зависит от их взаимного расположения.

Предложение 3.8. $\text{supp } \varphi_u = \mathbb{G}\mathbb{K}_u$.

4.1. Первое описание функции $\varphi_{\tilde{u}}$ и основная теорема. Для того чтобы явно описать функцию $\varphi_{\tilde{u}}$, мы отдельно опишем ее носитель $\text{supp } \varphi_{\tilde{u}}$ и идеал конечности. После этого мы зададим $\varphi_{\tilde{u}}$ на тех композициях, которые одновременно лежат в $\text{supp } \varphi_{\tilde{u}}$ и в идеале конечности функции $\varphi_{\tilde{u}}$.

Мы опишем $\text{supp } \varphi_{\tilde{u}}$ по аналогии с конечными гармоническими функциями. Для них мы по каждому элементу $u \in U_0$ построили бесконечную композицию $\mathbb{G}\mathbb{K}_u$ и множество $\text{supp } \varphi_u$ состояло из всех композиций, содержащихся внутри $\mathbb{G}\mathbb{K}_u$.

Определение 4.3. *Бесконечной композицией $\mathbb{G}\mathbb{K}_{\tilde{u}}$, соответствующей элементу $\tilde{u} \in \tilde{U}_0$, мы будем называть последовательность из строк и столбцов бесконечной длины, а также обычных композиций. Строки соответствуют h -интервалам, бесконечные столбцы – v -интервалам, а конечные композиции – разделяющим композициям в \tilde{u} . Бесконечные строки, бесконечные столбцы и конечные композиции идут в $\mathbb{G}\mathbb{K}_{\tilde{u}}$ в том же порядке, в котором шли h -интервалы, v -интервалы и разделяющие композиции в \tilde{u} . Мы будем отождествлять эту бесконечную композицию с множеством композиций, содержащихся внутри нее, и обозначать это множество тем же символом $\mathbb{G}\mathbb{K}_{\tilde{u}}$.*

По определению полагается $\text{supp } \varphi_{\tilde{u}} = \mathbb{G}\mathbb{K}_{\tilde{u}}$.

Для того чтобы описать идеал конечности функции $\varphi_{\tilde{u}}$, нам понадобится специальная композиция $\lambda_{\tilde{u}}$. Будем говорить, что h -интервал *соседствует* с v -интервалом, если они находятся рядом и разделены пустой композицией. Композиция $\lambda_{\tilde{u}}$ строится следующим образом: мы берем \tilde{u} и на месте каждого h -интервала пишем 1, если он не соседствовал с v -интервалом, и 2 в противном случае; разделяющие композиции не изменяются. После этого мы считываем все числа, которые у нас получились (числа, соответствующие h -интервалам и разделяющим композициям), слева направо и обозначаем результат через $\lambda_{\tilde{u}}$.

По определению полагается, что идеал конечности функции $\varphi_{\tilde{u}}$ состоит из всех композиций, которые находятся выше, чем $\lambda_{\tilde{u}}$ (то есть $\geq \lambda_{\tilde{u}}$), или не лежат в $\mathbb{G}\mathbb{K}_{\tilde{u}}$.

Мы описали идеал конечности и множество нулей функции $\varphi_{\tilde{u}}$. Дальнейшего внимания достойно лишь множество всех композиций, которые одновременно лежат внутри $\mathbb{G}\mathbb{K}_{\tilde{u}}$ и содержат $\lambda_{\tilde{u}}$. Обозначим это множество через $(\mathbb{G}\mathbb{K}_{\tilde{u}})^{\lambda_{\tilde{u}}}$.

Композиции из $(\mathbb{G}\mathbb{K}_{\tilde{u}})^{\lambda_{\tilde{u}}}$ естественным образом отождествляются с вершинами пирамиды Паскаля \mathbb{P}_m , где m – число интервалов в \tilde{u} . Дело

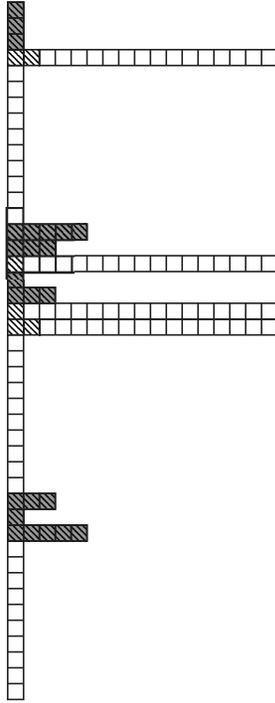


Рис. 3. Бесконечная композиция $\mathbb{G}\mathbb{K}_{\tilde{u}}$ для элемента \tilde{u} из примера 4.2. Белые клетки обозначают бесконечные строки и столбцы, а серые – композиции конечного размера. Композиция $\lambda_{\tilde{u}}$ обозначена заштрихованными клетками.

в том, что композиция $\lambda_{\tilde{u}}$ может расти внутри $\mathbb{G}\mathbb{K}_{\tilde{u}}$ очень ограниченным образом – расти могут только строки и столбцы, соответствующие h -интервалам и v -интервалам из \tilde{u} . Обозначим отображение вершин $(\mathbb{G}\mathbb{K}_{\tilde{u}})^{\lambda_{\tilde{u}}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_m$ через $\lambda \mapsto \lambda_{\pm}$. Это отображение заключается в том, что композиции, лежащей выше $\lambda_{\tilde{u}}$, мы сопоставляем набор длин “наростов” на строках и столбцах композиции $\lambda_{\tilde{u}}$, соответствующих h -интервалам и v -интервалам. Эти длины “наростов” записываются в λ_{\pm} в естественном порядке – слева направо, если говорить об интервалах,

или сверху вниз, если говорить о бесконечной композиции $\mathbb{G}\mathbb{K}_{\tilde{u}}$. Набор чисел λ_{\pm} мы можем разбить на два поднабора – числа, соответствующие h -интервалам и v -интервалам. Первый набор чисел обозначим через λ_+ , а второй через λ_- .

Для элемента $\tilde{u} \in \tilde{U}_0$ символами u и γ обозначаются наборы длин h -интервалов и v -интервалов.

Определение 4.4. Положим

$$\varphi_{\tilde{u}}(\lambda) = \begin{cases} \frac{\gamma^{\lambda_-}}{\lambda_-!} u^{\lambda_+}, & \text{если } \lambda \in (\mathbb{G}\mathbb{K}_{\tilde{u}})^{\lambda_{\tilde{u}}}, \\ +\infty, & \text{если } \lambda \in \mathbb{G}\mathbb{K}_{\tilde{u}} \setminus (\mathbb{G}\mathbb{K}_{\tilde{u}})^{\lambda_{\tilde{u}}}, \\ 0, & \text{если } \lambda \notin \mathbb{G}\mathbb{K}_{\tilde{u}}. \end{cases} \quad (5)$$

Мы пользуемся обозначениями $x^\mu = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \dots$ и $x! = x_1! x_2! \dots$ для $x = (x_1, x_2, \dots)$.

Предложение 4.5. Функция $\varphi_{\tilde{u}}$ является неразложимой, полуконечной и гармонической.

Теорема 4.6. Если φ – полуконечная неразложимая гармоническая функция на графе Гнедина–Кингмана $\mathbb{G}\mathbb{K}$, то φ пропорциональна функции $\varphi_{\tilde{u}}$ для некоторого $\tilde{u} \in \tilde{U}_0$.

4.2. Второе описание $\varphi_{\tilde{u}}$. Пусть $\tilde{u} \in \tilde{U}_0$ и ε – вещественное положительное число. Обозначим через u^ε открытое подмножество вещественной прямой, которое получается из \tilde{u} следующим образом: вместо каждой разделяющей композиции мы внедряем столько интервалов длины ε , какова была длина композиции. Длины h -интервалов и v -интервалов при этом не меняются, но сами интервалы немного сдвигаются (не имеет значения, в какую сторону от точки, в которую мы внедрились ε -интервал).

Пример 4.7. Множество u^ε для элемента $\tilde{u} \in \tilde{U}_0$ из примера 4.2:



Замечание 4.8. Переход от \tilde{u} к u^ε соответствует тому, что мы на рис. 3 заменяем все серые заштрихованные строки на бесконечные строки из белых клеток и тем самым получаем $\mathbb{G}\mathbb{K}_{u^\varepsilon}$.

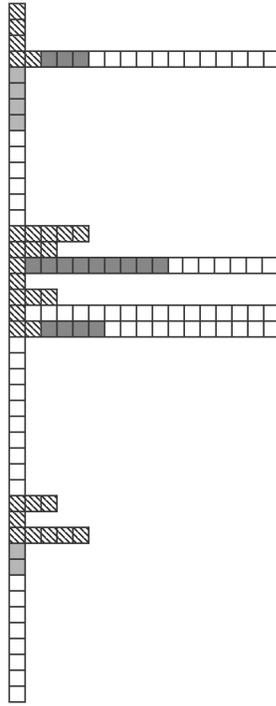


Рис. 4. “Наросты” на композиции $\lambda_{\tilde{u}}$ внутри $\mathbb{G}\mathbb{K}_{\tilde{u}}$ для элемента \tilde{u} из примера 4.2. Композиция $\lambda_{\tilde{u}}$ обозначена заштрихованными клетками. Композиция λ состоит из заштрихованных, светло-серых и темно-серых клеток. Наборы чисел $\lambda_+ = (3, 9, 0, 4)$, $\lambda_- = (4, 0, 2)$ и $\lambda_{\pm} = (3, 4, 9, 0, 4, 0, 2)$ – это наборы из длин темно-серых, светло-серых, а также и тех и других строк соответственно. Притом, если внутри белой строки или белого столбца не окажется закрашенных клеток, то на соответствующем месте в λ_{\pm} , а также в λ_+ или λ_- пишется ноль.

Замечание 4.9. Отметим, что u^ε уже не будет подмножеством единичного интервала, однако правая часть формулы (4) по-прежнему

имеет смысл. Таким образом, определено выражение $M_\lambda^\circ(u^\varepsilon)$. Кроме того, $\{\lambda \in \mathbb{GK} \mid M_\lambda^\circ(u^\varepsilon) > 0\} = \mathbb{GK}_{u^\varepsilon}$.

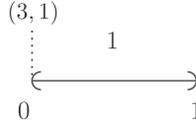
Пусть $\tilde{u} = (u, \gamma; \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Введем следующее обозначение: $n(\tilde{u}) = |\lambda_0| + |\lambda_1| + \dots + |\lambda_m|$.

Предложение 4.10. *Имеем*

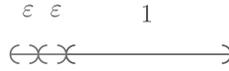
$$\varphi_{\tilde{u}}(\lambda) = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{n(\tilde{u})}} \cdot M_\lambda^\circ(u^\varepsilon), & \text{если } \lambda \supseteq \lambda_{\tilde{u}}, \\ 0, & \text{если } \lambda \notin \mathbb{GK}_{\tilde{u}}, \\ +\infty & \text{иначе.} \end{cases} \quad (6)$$

Замечание 4.11. В правой части формулы (6) первый и второй случай могут пересекаться. В предложении 4.10 утверждается, в частности, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{n(\tilde{u})}} \cdot M_\lambda^\circ(u^\varepsilon) = 0$, если $\lambda \notin \mathbb{GK}_{\tilde{u}}$ и $\lambda \supseteq \lambda_{\tilde{u}}$.

Пример 4.12. Давайте посчитаем предел из формулы (6) для следующего элемента $\tilde{u} \in \tilde{U}_0$:



В этом случае u^ε имеет вид



Кроме того, $\lambda_{\tilde{u}} = (3, 1, 1)$ и $\mathbb{GK}_{\tilde{u}}, \mathbb{GK}_{u^\varepsilon}$ имеют следующий вид (заштрихованными клетками обозначена композиция $\lambda_{\tilde{u}}$):



Далее мы предполагаем, что $\lambda \supseteq (3, 1, 1)$.

- Если $\lambda \notin \mathbb{GK}_{u^\varepsilon}$, то $M_\lambda^\circ(u^\varepsilon) = 0$.

- Если $\lambda \in \mathbb{GK}_{u^\varepsilon}$, то $\lambda = (n, m, k)$ при $n \geq 3, m, k \geq 1$. Тогда из формулы (4) имеем $M_\lambda^\circ(u^\varepsilon) = \varepsilon^{n+m}$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{n(\bar{u})}} \cdot M_\lambda^\circ(u^\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{n-3+m-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 3, m = 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{n(\bar{u})}} \cdot M_\lambda^\circ(u^\varepsilon) = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda = (3, 1, k), k \geq 1, \\ 0, & \text{если } \lambda \notin \mathbb{GK}_{\bar{u}}, \lambda \supseteq (3, 1, 1). \end{cases}$$

4.3. Мультипликативность функций $\varphi_{\bar{u}}$. Теперь опишем конечную гармоническую функцию на графе \mathbb{GK} , возникающую в свойстве мультипликативности для полуконечных неразложимых гармонических функций (теорема 2.18). Обозначим через \bar{u} открытое подмножество единичного интервала, которое получается из $\tilde{u} \in \tilde{U}_0$ грубым отбрасыванием всех разделяющих композиций. При таком отбрасывании v -интервалы, стоящие рядом, склеиваются в один, а h -интервалы – нет.

Пример 4.13. Множество \bar{u} для элемента $\tilde{u} \in \tilde{U}_0$ из примера 4.2 совпадает с элементом $u \in U_0$ из примера 3.4 для подходящих длин h -интервалов и v -интервалов. В частности, необходимо, чтобы интервал γ_2 из примера 3.4 был равен сумме γ_2 и γ_3 из примера 4.2.

Предложение 4.14.

$$\varphi_{\bar{u}}(M_\lambda M_\mu) = M_\mu^\circ(\bar{u}) \varphi_{\bar{u}}(M_\lambda), \text{ если } \lambda \supseteq \lambda_{\bar{u}} \text{ или } \lambda \notin \mathbb{GK}_{\bar{u}}.$$

4.4. “Проекция” на граф Кингмана. Каждая полуконечная гармоническая функция на графе \mathbb{GK} задает аддитивное $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -линейное отображение $K^{\text{QSym}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$, где K^{QSym} – положительный конус в QSym , натянутый на мономиальные квазисимметрические функции M_λ . Каждое такое отображение можно ограничить на положительный конус $K^{\text{Sym}} \subset K^{\text{QSym}}$, соответствующий мономиальным симметрическим функциям m_λ . Тогда мы получим некоторую (бесконечную) гармоническую функцию на графе Кингмана.

Для описания этого ограничения нам потребуется следующий набор данных:

- Набор невозрастающих положительных чисел – набор длин h -интервалов в \tilde{u} взятых в порядке убывания длины. Обозначим

этот невозрастающий набор через $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ и положим $\gamma = 1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_k) = \sum_i \gamma_i$.

- “Нарост” в виде диаграммы Юнга – все разделяющие композиции склеиваются в одну диаграмму Юнга. То есть они объединяются в одну композицию, и потом ее строки упорядочиваются по убыванию длины сверху вниз. Обозначим эту диаграмму Юнга через ν .

Полуконечную гармоническую функцию на графе Кингмана, соответствующую набору (α, ν) , обозначим через $\varphi_{\alpha, \nu}^{\mathbb{K}}$, см. [4].

Предложение 4.15. *Если \tilde{u} не имел ни одного ν -интервала или никакая из разделяющих композиций не имела строк длины 1, то*

$$\varphi_{\tilde{u}}(m_\lambda) = \varphi_{\alpha, \nu}^{\mathbb{K}}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

В противном случае

$$\varphi_{\tilde{u}}(m_\lambda) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \varphi_{\alpha, \nu}^{\mathbb{K}}(\lambda) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следует отметить, что во втором случае гармоническая функция не является полуконечной.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает искреннюю благодарность Григорию Иосифовичу Ольшанскому за постановку задачи и полезные стимулирующие обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. V. Gnedin, *The representation of composition structures.* — Ann. Probab. **25**, No. 3 (1997), 1437–1450.
2. A. Gnedin, G. Olshanski, *Coherent permutations with descent statistic and the boundary problem for the graph of zigzag diagrams.* — Int. Math. Res. Not. **2006**, Art. ID 51968 (2006).
3. M. V. Karev, P. P. Nikitin, *The boundary of the refined Kingman graph.* — Zap. Nauchn. Semin. POMI **468** (2018), 58–74.
4. S. V. Kerov, *Combinatorial examples in the theory of AF-algebras.* — Zap. Nauchn. Semin. LOMI **172** (1989), 55–67.
5. S. V. Kerov, *Asymptotic Representation Theory of the Symmetric Group and Its Applications in Analysis*, Transl. Math. Monographs. **219**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

6. S. V. Kerov, A. M. Vershik, *The K -functor (Grothendieck group) of the infinite symmetric group*. — Zap. Nauchn. Semin. LOMI **123** (1983), 126–151.
7. S. V. Kerov, A. M. Vershik, *Locally semisimple algebras. Combinatorial theory and the K_0 -functor*. — J. Sov. Math. **38**, No. 2 (1987), 1701–1733.
8. S. Kerov, A. Vershik, *The Grothendieck group of infinite symmetric group and symmetric functions (with the elements of the theory K_0 -functor of AF-algebras)*. — In: A. M. Vershik, D. P. Zhelobenko, (eds.), Representation of Lie Groups and Related Topics, Adv. Stud. Contemp. Math. **7**, 1990, pp. 39–117.
9. J. F. C. Kingman, *The representation of partition structures*. — J. London Math. Soc. (2) **18** (1978), 374–380.
10. K. Luoto, S. Mykytiuk, S. van Willigenburg, *An Introduction to Quasisymmetric Schur Functions*, Springer, New York, 2013.

Safonkin N. A. Semifinite harmonic functions on the Gnedin–Kingman graph.

We study the Gnedin–Kingman graph, which corresponds to the Pieri rule for the monomial basis $\{M_\lambda\}$ in the algebra QSym of quasisymmetric functions. The paper contains a detailed announcement of results concerning the classification of indecomposable semifinite harmonic functions on the Gnedin–Kingman graph. For these functions, we also establish a multiplicativity property, which is an analog of the Vershik–Kerov ring theorem.

Сколковский институт
науки и технологий
и Национальный
исследовательский университет
“Высшая школа экономики”,
Москва, Россия
E-mail: safonkin.nik@gmail.com

Поступило 24 августа 2020 г.