Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 498, 2020 г.

**К. П. Кохась, А. С. Латышев**

# ИГРА “HATS”. СИЛА КОНСТРУКТОРОВ

## §1. Введение

Игра “Hats” восходит к давней популярной олимпиадной задаче; её обобщение на произвольные графы привлекло недавно интерес математиков (см., например, [1, 2, 3]). Теория игры базируется на методах комбинаторной теории графов.

В данной работе мы рассматриваем вариант игры, в котором мудрецы, находящиеся в вершинах графа, пытаются угадать цвета своих шляп, видя только цвета шляп, надетых на мудрецов в смежных вершинах графа. При этом мудрецы действуют сообща, пользуясь фиксированной в начале детерминированной стратегией, и считается, что мудрецы побеждают, если хотя бы один из них сумел угадать цвет.

В большинстве работ, изучающих эту игру, рассматривается вариант, в котором каждому из мудрецов могут выдать шляпу одного из $k$ цветов. Максимальное $k$, при котором мудрецы гарантированно одерживают победу на графе $G$, называется *шляпным числом* (hat guessing number) графа $G$ и обозначается $\mathrm{HG}(G)$. Вычисление шляпного числа конкретного графа – сложная задача, в данный момент она решена лишь для некоторых классов графов: для полных графов, деревьев (фольклор), графов-циклов [4] и псевдодеревьев [5]. Также некоторые результаты получены для “графов-книжек” и “графов-мельниц” в работе [2].

Н. Алон и др. в работе [3] исследовали связь шляпного числа и других параметров графа. Вопрос о том, накладывает ли планарность графа какие-либо ограничения на шляпное число, упоминался в работах [1, предположение 4] и [2, вопрос 5.2], где, в частности, говорится, что для планарных графов на данный момент максимальное известное шляпное число равно 12.

В своих предыдущих работах [6] и [7] (совместно с В. Ретинским) авторы рассмотрели вариант игры “Hats” с переменным числом цветов (то есть когда количество возможных цветов шляп может отличаться от мудреца к мудрецу). Этот вариант игры не только представляет

---

*Ключевые слова*: игра “Hats”, детерминированная стратегия.

собственный интерес, но и позволяет более гибко подходить к анализу классической игры “Hats”, поскольку имеет нетривиальный инструментарий для построения стратегий мудрецов.

В данной работе мы продолжаем изучение игры “Hats” с переменным числом цветов. Мы показываем, как с помощью техники конструкторов можно построить планарный граф, у которого шляпное число не меньше 14. А также совсем просто доказываем теорему о мельницах из работы [2].

Данная работа структурирована следующим образом.

Во втором параграфе мы даем необходимые определения и обозначения, приводим несколько теорем-конструкторов из наших работ [6, 7] и в качестве примера использования этих теорем приводим простое доказательство теоремы о мельницах из [2].

В третьем параграфе мы строим внешнепланарный граф с шляпным числом не меньше 6 (пример 3.4) и планарный граф с шляпным числом не меньше 14 (теорема 3.6).

## §2. Конструкторы

**2.1. Определения и обозначения.** Введем следующие обозначения.

• $G = \langle V, E\rangle$ – граф видимости, т. е. граф, в вершинах которого расположены мудрецы; мы будем отождествлять мудрецов с вершинами графа.

• $h\colon V \to \mathbb{N}$ – *функция “шляпности”*, обозначающая, сколько различных цветов шляп может получить каждый мудрец. Для мудреца $A \in V$ значение $h(A)$ будем называть *шляпностью* мудреца $A$. Можно считать, что цвет шляпы мудреца $A$ – это число от 0 до $h(A) - 1$, или что это остаток по модулю $h(A)$.

**Определение.** Игрой “Hats” мы называем пару $\mathcal{G} = \langle G, h\rangle$, где граф $G$ – граф видимости, а $h$ – функция шляпности. Итак, мудрецы находятся в вершинах графа видимости $G$ и участвуют в *тесте.* Во время теста каждый мудрец $v$ получает шляпу одного из $h(v)$ цветов. Мудрецы, не общаясь, пытаются угадать цвета своих шляп, и если хотя бы один из них справляется с этой задачей, то будем говорить, что мудрецы *выигрывают*, или что игра выигрышная. Граф в этом случае мы тоже называем выигрышным, держа в уме, что это свойство зависит и от функции шляпности. Игры, для которых у мудрецов не существует выигрышной стратегии, назовем *проигрышными.*

Классическую игру “Hats”, в которой функция шляпности принимает постоянное значение $m$, будем обозначать $\langle G, \star m\rangle$. Будем говорить, что игра $\mathcal{G}_1 = \langle G_1, h_1\rangle$ *мажорирует* игру $\mathcal{G}_2 = \langle G_2, h_2\rangle$, если $G_1 = G_2$ и $h_1(v) \geqslant h_2(v)$ для всех вершин $v$. Очевидно, что если выигрышная игра $\mathcal{G}_1$ мажорирует игру $\mathcal{G}_2$, то игра $\mathcal{G}_2$ тоже выигрышная. И наоборот: если проигрышная игра $\mathcal{G}_2$ мажорируется игрой $\mathcal{G}_1$, то игра $\mathcal{G}_1$ тоже проигрышная.

Пусть $m = \min\limits_{A\in V(G)} h(A)$. Тогда игра $\langle G, h\rangle$ мажорирует игру $\langle G, \star m\rangle$. Если при этом игра $\mathcal{G} = \langle G, h\rangle$ выигрышная, то $\mathrm{HG}(G) \geqslant m$.

**2.2. Конструкторы.** Конструкторами мы называем теоремы, с помощью которых можно строить выигрышные графы, объединяя тем или иным способом графы, выигрышность которых уже установлена. Вот несколько конструкторов из работ [6, 7].

**Определение.** Пусть $G_1 = \langle V_1, E_1\rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2\rangle$ – два графа с одной общей вершиной $A$. Назовем *суммой графов* $G_1$, $G_2$ *по вершине* $A$ граф $\langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2\rangle$. Такую сумму будем обозначать $G_1 +_A G_2$.

Пусть $\mathcal{G}_1 = \langle G_1, h_1\rangle$ и $\mathcal{G}_2 = \langle G_2, h_2\rangle$ – две игры, такие, что выполнено условие $V(G_1) \cap V(G_2) = \{A\}$. Назовем *произведением* этих игр *по вершине* $A$ игру $\mathcal{G} = \langle G_1 +_A G_2, h\rangle$, где $h$ совпадает с $h_i$ на $V(G_i) \setminus \{A\}$ и $h(A) = h_1(A) \cdot h_2(A)$ (рис. 1). Произведение игр по вершине $A$ мы будем обозначать $\mathcal{G}_1 \times_A \mathcal{G}_2$.

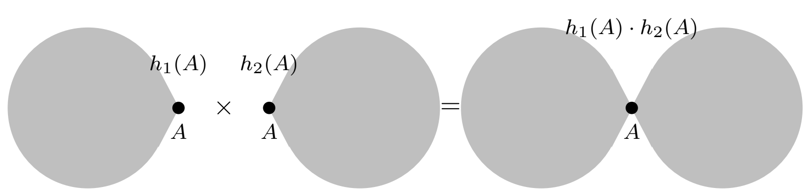


Рис. 1. Произведение игр.

**Теорема 2.1** (о произведении игр, [6, теорема 3.1])**.** *Пусть игры* $\mathcal{G}_1 = \langle G_1, h_1\rangle$ *и* $\mathcal{G}_2 = \langle G_2, h_2\rangle$ *– выигрышные, причем* $V(G_1) \cap V(G_2) = \{A\}$. *Тогда мудрецы выигрывают и в игре* $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times_A \mathcal{G}_2$.

**Теорема 2.2** ([7, теорема 4.1]). *Пусть* $G = G_1 +_A G_2$, *где* $G_1$ *и* $G_2$ – *графы, у которых* $V(G_1) \cap V(G_2) = \{A\}$, *а игры* $\mathcal{G}_1 = \langle G_1, h_1\rangle$ *и* $\mathcal{G}_2 = \langle G_2, h_2\rangle$ *проигрышные и при этом* $h_1(A) \geqslant h_2(A) = 2$. *Тогда игра* $\mathcal{G} = \langle G_1 +_A G_2, h\rangle$ *проигрышная, где*

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x), & x \in G_1, \\ h_2(x), & x \in G_2 \setminus A. \end{cases}$$

**Теорема 2.3** (о “конусе” с вершиной $O$ над графом $G$, [7, теорема 4.5]). *Даны выигрышная игра* $\mathcal{G} = \langle G, h\rangle$, *где* $V(G) = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, *и* $k$ *выигрышных игр* $\mathcal{G}_i = \langle G_i, h_i\rangle$, $1 \leqslant i \leqslant k$. *В каждом графе* $G_i$ *отмечена вершина* $O$, *а также одна вершина* $A_i$, *смежная с* $O$. *При этом* $h_1(O) = h_2(O) = \ldots = h_k(O)$. *Рассмотрим граф* $G' = (V(G'), E(G'))$, *где*

$$V(G') = V(G_1) \cup \ldots \cup V(G_k), \qquad E(G') = E(G_1) \cup \ldots \cup E(G_k) \cup E(G).$$

*Тогда игра* $\langle G', h'\rangle$ *выигрышная, где*

$$h'(x) = \begin{cases} h_i(x), & \text{если } x \text{ лежит в каком-то из множеств} \\ & V(G_i) \setminus \{A_i\}, \\ h_i(A_i)h(A_i), & \text{если } x \text{ совпадает с какой-то из вершин } A_i. \end{cases}$$

Для применения этих теорем-конструкторов нужны “кирпичики” – примеры выигрышных (и проигрышных) графов. Следующая теорема дает нам целый класс таких примеров.

**Теорема 2.4** ([6, теорема 2.1]). *Пусть шляпности* $n$ *мудрецов, расположенных в вершинах полного графа, равны* $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_n$. *Тогда мудрецы выигрывают в том и только том случае, если*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geqslant 1. \tag{1}$$

**2.3. Применение конструкторов: мельницы.** Покажем, как можно применять конструкторы для исследования игр с постоянной функцией шляпности. Следующая теорема доказана в [2]. Применение конструкторов делает ее почти очевидной.

Пусть $k$ и $n$ – произвольные натуральные числа и $G_1$, $G_2$, $\ldots$, $G_n$ – $n$ копий полного графа $K_k$, в каждой из которых отмечена одна вершина $A$. *Мельницей* назовем граф $W_{k,n} = G_1 +_A G_2 +_A \ldots +_A G_n$. Вершина $A$ в этом графе называется *осью* мельницы.

**Теорема 2.5** ([2, теорема 1.4]). *Пусть* $k \geqslant 2$ *и* $n \geqslant \log_2(2k-2)$. *Тогда* $\mathrm{HG}(W_{k,n}) = 2k-2$.

**Доказательство.** Сначала докажем выигрышность игры

$$\mathcal{G}_1 = \langle W_{k,n}, \star 2k-2 \rangle.$$

Рассмотрим полный граф $K_k$ с одной отмеченной вершиной $A$, зададим на нем функцию шляпности $h$, где $h(A) = 2$, а в остальных вершинах значения функции $h$ равны $2k-2$. По теореме 2.4 игра $\mathcal{G} = \langle K_k, h \rangle$ выигрышная, так как $\frac{1}{2k-2} \cdot (k-1) + \frac{1}{2} = 1$. Пользуясь теоремой 2.1, перемножим $n$ копий игры $\mathcal{G}$ по вершине $A$. Получим выигрышную игру $\mathcal{G}_2 = \langle W_{k,n}, h_2 \rangle$ на мельнице $W_{k,n}$ с осью $A$, где $h_2(A) = 2^n \geqslant 2k-2$ и $h_2$ равно $2k-2$ на остальных вершинах мельницы. Игра $\mathcal{G}_2$ мажорирует игру $\mathcal{G}_1$, значит, игра $\mathcal{G}_1$ выигрышная.

Теперь докажем проигрышность игры $\mathcal{G}_1' = \langle W_{k,n}, \star 2k-1 \rangle$. Отметим в полном графе $K_k$ две вершины $A$ и $B$ и рассмотрим игру $\mathcal{G}' = \langle K_k, h' \rangle$, где $h'(A) = 2$, $h'(B) = 2k-1$ и значения $h'$ на остальных вершинах равны $2k-2$. По теореме 2.4 игра $\mathcal{G}'$ проигрышная. При помощи теоремы 2.2 сложим $n$ копий игры $\mathcal{G}'$ по вершине $A$. Получим проигрышную игру $\mathcal{G}_2' = \langle W_{k,n}, h_2' \rangle$, где $h_2'(A) = 2$ и значения $h_2'$ равны $2k-2$ или $2k-1$ на остальных вершинах. Игра $\mathcal{G}_2'$ мажорируется игрой $\mathcal{G}_1'$, поэтому игра $\mathcal{G}_1'$ проигрышная.

Выигрышность игры $\mathcal{G}_1$ и проигрышность игры $\mathcal{G}_1'$ в точности и означают, что $\mathrm{HG}(W_{k,n}) = 2k-2$. □

Аналогично доказывается и оценка снизу на HG для теоремы 1.5 из [2]. К сожалению, для оценки сверху имеющихся у нас конструкторов недостаточно, что в очередной раз показывает, что доказательство проигрышности игры намного сложнее доказательства выигрышности.

## §3. Планарность

Напомним, что граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы его ребра пересекались только в своих концевых вершинах. Если при этом существует укладка графа, в которой все вершины принадлежат внешней грани, то граф называется *внешнепланарным*.

Один из открытых вопросов о шляпном числе – как связано число $\mathrm{HG}(G)$ с планарностью графа $G$? А именно, существуют ли планарные графы со сколь угодно большим шляпным числом? В этом параграфе мы построим внешнепланарный граф $G$, для которого $\mathrm{HG}(G) \geqslant 6$, и планарный граф $G$, для которого $\mathrm{HG}(G) \geqslant 14$. В настоящее время мы не видим каких-либо подходов, с помощью которых можно было бы увеличить эти числа.

**3.1. Планарность и конструкторы произведения и конуса.** Конструктор произведения (теорема 2.1, рис. 1), очевидно, сохраняет планарность: при “перемножении” планарных выигрышных графов получится планарный выигрышный граф.

**Определение.** *Списком значений* функции шляпности $h$ будем называть список $L(h)$ всех значений функции $h$, отсортированный по неубыванию. Например, граф $G$ на рис. 3 имеет список значений $L(G)=$ $(6, 6, \dots, 6, 8)$.

Здесь и далее мы не рассматриваем тривиальные игры, для которых $\min h = 1$.

**Лемма 3.1** (о втором минимуме)**.** *Пусть* $\mathcal{G} = \langle G, h\rangle$ *– выигрышная игра на планарном графе* $G$ *и* $L(h) = (a_1, a_2, \dots)$*. Тогда существует планарный граф* $G'$*, для которого* $\mathrm{HG}(G') \geqslant a_2$*.*

**Доказательство.** Пусть $A$ – мудрец со шляпностью $a_1$. Выберем такое $k$, что $a_1^k \geqslant a_2$; это возможно, так как $a_1 > 1$. Перемножим при помощи теоремы 2.1 о произведении $k$ копий игры $\mathcal{G}$ по вершине $A$, получится выигрышная игра $\mathcal{G}' = \langle G', h'\rangle$, причем $h'(A) = a_1^k \geqslant a_2$. Игра $\mathcal{G}'$ мажорирует игру $\langle G', \star a_2\rangle$. Значит, эта игра тоже выигрышная и $\mathrm{HG}(G') \geqslant \min h'(L) = a_2$. При этом граф $G'$ планарный как сумма по вершине нескольких планарных графов. □

Неформально эта лемма означает, что при поиске планарных графов с большим шляпным числом мы можем “разрешить” одной вершине иметь маленькую шляпность (эту вершину разумно наделять шляпностью как можно меньшей, т.е. 2). Аналогичные утверждения верны для любых свойств графов, сохраняющихся при склейке графов по вершине, например для внешнепланарности.

Теорема о конусе 2.3, как и теорема о произведении, может использоваться для построения планарных графов с большим шляпным числом благодаря следующему наблюдению.

**Лемма 3.2.** *Пусть* $\mathcal{G} = \langle G, \star x \rangle$ *– выигрышная игра на внешнепланарном графе* $G$*, а* $\mathcal{G}_1 = \langle G_1, h_1 \rangle$ *– выигрышная игра на планарном графе* $G_1$ *и* $L(h_1) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$*. Тогда существует планарный граф* $G'$*, для которого* $\mathrm{HG}(G') \geqslant \min(a_2 \cdot x, a_3)$*.*

**Доказательство.** Применим теорему 2.3 для игры $\mathcal{G}$ и набора игр $\mathcal{G}_i$, $1 \leqslant i \leqslant |V(G)|$, где при всех $i$ игра $\mathcal{G}_i$ – это копия игры $\mathcal{G}_1$. В каждом графе $G_i$ в качестве вершины $O$ возьмем мудреца со шляпностью $a_1$, а в качестве вершины $A_i$ – мудреца со шляпностью $a_2$ (см. ниже рис. 2, пример 3.3 и параграф 3.3). В результате применения теоремы получится выигрышная игра $\mathcal{G}' = \langle G', h' \rangle$. Граф $G'$ планарный, поскольку при выполнении этой конструкции можно расположить все графы $G_i$ во внешней грани графа $G$.

Список $L(h')$ содержит значения $a_1, a_3, a_4, \dots$ и $a_2 \cdot x$. Второй минимум в этом списке – это либо $a_3$, либо $a_2 \cdot x$. Тогда по лемме 3.1 существует планарный граф, у которого шляпное число не меньше $\min(a_2 \cdot x, a_3)$. $\square$

Эта лемма показывает, что при построении планарных графов с большим шляпным числом функции шляпности могут иметь сравнительно небольшой второй минимум. Правда, при применении теоремы о конусе для компенсации этого недостатка потребуется использовать внешнепланарные графы с относительно большим шляпным числом.

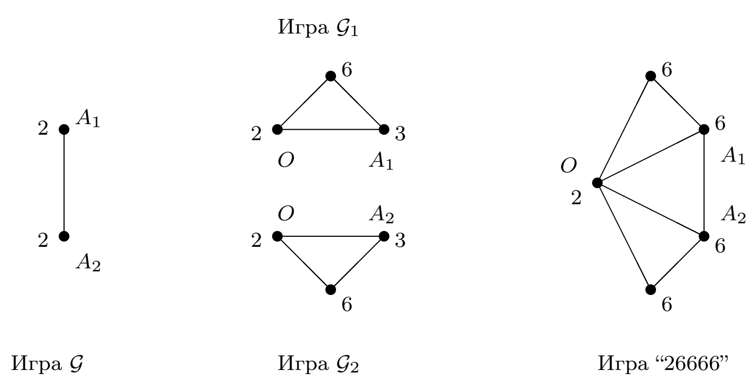


Рис. 2. Применение теоремы о конусе.

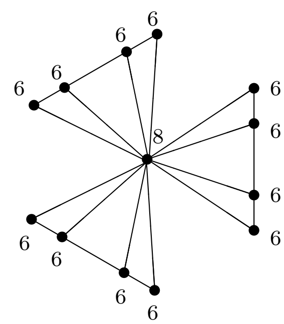


Рис. 3. Игра “Трилистник”.

**Пример 3.3.** Игра “26666” на рис. 2 выигрышная (возле каждой вершины графа указано значение функции шляпности). Она получается конструкцией из леммы 3.2, а именно, для внешнепланарного графа $G$ применяем теорему о конусе: граф $G_1$ и его копия $G_2$ склеиваются по вершине $O$, и на вершинах $A_1$, $A_2$ строится копия графа $G$.

**Пример 3.4.** Перемножая с помощью теоремы 2.1 три копии игры “26666” (рис. 2), получаем игру “Трилистник”, изображенную на рис. 3. Это пример выигрышного внешнепланарного графа, у которого шляпное число не меньше 6. Благодаря компьютерным экспериментам мы уверены, что это шляпное число в точности равно 6, но мы не будем здесь это доказывать.

### 3.2. Пример арифметической стратегии на почти полном графе.

**Определение.** Полный граф на $n$ вершинах, в котором удалено одно ребро, будем называть *почти полным графом* и обозначать $K_n^-$. Если указана нумерация вершин (например, при указании шляпностей), будем считать, что отсутствует ребро между последними двумя вершинами.

В работе [7] приведено доказательство теоремы 2.4, в котором предъявлены стратегии мудрецов на полных графах, основанные на арифметических соображениях. Мы используем этот подход для доказательства выигрышности следующей игры на почти полном графе.

**Лемма 3.5.** *Игра* $\mathcal{G} = \langle K_5^-, [2, 3, 14, 14, 14]\rangle$ *выигрышная.*

**Доказательство.** Обозначим мудрецов $A_2$, $A_3$, $A_{14}$, $B_{14}$, $C_{14}$ – индекс обозначает шляпность, ребро $B_{14}C_{14}$ отсутствует. Обозначим цвета шляп мудрецов (выданные или предполагаемые) $a_2$, $a_5$, $a_{14}$, $b_{14}$, $c_{14}$. Всюду ниже мы проводим арифметические вычисления по модулю 42. Для каждого расклада шляп положим

$$S = 21a_2 + 14a_3 + 3a_{14} \bmod 42.$$

Пусть $M$ – множество всех остатков по модулю 42. Для каждого элемента $x \in M$ будем называть 2-*орбитой* остатка $x$ множество $\{x, x + 21\} \subset M$, 3-*орбитой* – множество $\{x, x + 14, x + 28\} \subset M$, 14-*орбитой* – множество $\{x + 3i : i = 0, 1, 2, \dots, 14\} \subset M$. Множества $\mathcal{B} = \{0, 1, 2\} \subset M$ и $\mathcal{C} = \{0, 4, 8\} \subset M$ будем называть *ловушками.* Очевидно, эти множества пересекают каждую 14-орбиту ровно в одной точке.

Опишем выигрышную стратегию мудрецов. Мудрецы $B_{14}$ и $C_{14}$ видят шляпы мудрецов $A_2$, $A_3$ и $A_{14}$ и могут вычислить $S$. Пусть мудрец $B_{14}$ проверяет гипотезу $S + 3b_{14} \in \mathcal{B}$, а мудрец $C_{14}$ проверяет гипотезу $S + 3c_{14} \in \mathcal{C}$.

Мудрецы $A_2$, $A_3$ и $A_{14}$ видят, какие шляпы надеты на $B_{14}$ и $C_{14}$, и делают отсюда вывод, что если

$$S \in (\mathcal{B} - 3b_{14}) \quad \text{или} \quad S \in (\mathcal{C} - 3c_{14})$$

(сдвиги по модулю 42), то $B_{14}$ или $C_{14}$ угадают свой цвет. Таким образом, при $S \notin (\mathcal{B} - 3b_{14}) \cup (\mathcal{C} - 3c_{14})$ угадать должны мудрецы $A_2$, $A_3$ или $A_{14}$. Для этого построим (попарно непересекающиеся) множества $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_{14}$, такие, что

$$\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_{14} \cup (\mathcal{B} - 3b_{14}) \cup (\mathcal{C} - 3c_{14}) = M.$$

Каждый из мудрецов $A_i$, где $i = 2$, 3, 14, подберет предполагаемый цвет своей шляпы так, чтобы с этим предположением оказалось, что $S \in \mathcal{A}_i$. Этого заведомо можно добиться, если множество $\mathcal{A}_i$ пересекается с каждой $i$-орбитой в одной точке. Для этого будем выбирать в качестве множества $\mathcal{A}_2$ промежуток вида $[x, x + 20]$, состоящий из 21 последовательного остатка, а в качестве множества $\mathcal{A}_3$ – промежуток вида $[x, x+13]$. Множество $\mathcal{A}_{14}$ должно состоять из трех чисел, дающих разные остатки при делении на 3. Таким образом, если для выданного расклада шляп выполнено условие $S \in \mathcal{A}_i$, мудрец $A_i$ угадает цвет своей шляпы.

С точностью до циклических сдвигов имеется 14 случаев взаиморасположения сдвинутых ловушек $\mathcal{B}-3b_{14}$ и $\mathcal{C}-3c_{14}$. Не умаляя общности, можно считать, что ловушка $\mathcal{C}=\{0,4,8\}$ не сдвинута, а ловушка $\mathcal{B}$ заняла одно из положений $\{3i,3i+1,3i+2\}$, $i=0,1,2,\ldots,13$. В каждом из этих случаев зададим множества $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_{14}$ как указано в таблице.

| $\mathcal{C}$ | $\mathcal{B}$ | $\mathcal{A}_2$ | $\mathcal{A}_3$ | $\mathcal{A}_{14}$ | Наложения |
|---|---|---|---|---|---|
| 0, 4, 8 | 0, 1, 2 | $[5,25]$ | $[26,39]$ | 40, 41, 3 | 0, 8 |
| 0, 4, 8 | 3, 4, 5 | $[7,27]$ | $[28,41]$ | 1, 2, 6 | 4, 8 |
| 0, 4, 8 | 6, 7, 8 | $[11,31]$ | $[32,3]$ | 5, 9, 10 | 0, 8 |
| 0, 4, 8 | 9, 10, 11 | $[15,35]$ | $[36,7]$ | 12, 13, 14 | 0, 4 |
| 0, 4, 8 | 12, 13, 14 | $[15,35]$ | $[36,7]$ | 9, 10, 11 | 0, 4 |
| 0, 4, 8 | 15, 16, 17 | $[21,41]$ | $[1,14]$ | 18, 19, 20 | 4, 8 |
| 0, 4, 8 | 18, 19, 20 | $[21,41]$ | $[1,14]$ | 15, 16, 17 | 4, 8 |
| 0, 4, 8 | 21, 22, 23 | $[25,3]$ | $[5,18]$ | 19, 20, 24 | 0, 8 |
| 0, 4, 8 | 24, 25, 26 | $[29,7]$ | $[9,22]$ | 23, 27, 28 | 0, 4 |
| 0, 4, 8 | 27, 28, 29 | $[5,25]$ | $[32,3]$ | 26, 30, 31 | 0, 8 |
| 0, 4, 8 | 30, 31, 32 | $[9,29]$ | $[33,4]$ | 5, 6, 7 | 0, 4 |
| 0, 4, 8 | 33, 34, 35 | $[12,32]$ | $[36,7]$ | 9, 10, 11 | 0, 4 |
| 0, 4, 8 | 36, 37, 38 | $[15,35]$ | $[1,14]$ | 39, 40, 41 | 4, 8 |
| 0, 4, 8 | 39, 40, 41 | $[15,35]$ | $[1,14]$ | 36, 37, 38 | 4, 8 |

$\square$

### 3.3. Планарный граф, у которого шляпное число не меньше 14.

**Теорема 3.6.** *Существует планарный граф $G''$ со шляпным числом не меньше* 14.

Доказательство сразу следует из леммы 3.2, примененной к игре $\mathcal{G}_1=\langle K_5^-,[2,3,14,14,14]\rangle$, где в качестве игры $\mathcal{G}$ на внешнепланарном графе используется игра “Трилистник” (рис. 3).

**Доказательство.** Обозначим через $\mathcal{G}$ игру “Трилистник” (см. рис. 3); это игра на внешнепланарном графе $G$, содержащем 13 вершин, обозначим их $A_1$, $A_2$, …, $A_{13}$. Рассмотрим 13 копий $\mathcal{G}_i$, $1\leqslant i\leqslant 13$, игры $\langle K_5^-,[2,3,14,14,14]\rangle$, в каждой из них вершину шляпности 2 обозначим через $O$, а вершину шляпности 3 – через $A_i$. Как нетрудно видеть, графы $G_i$ планарные. Применим теорему о конусе к этим графам, см. рис. 4; получим игру $\langle G',h'\rangle$ с одной вершиной $O$ шляпности 2, в которой остальные вершины имеют шляпности 14, 18 или 24. Наконец, перемножим четыре копии игры $\langle G',h'\rangle$ по вершине $O$.

Полученная игра $\mathcal{G}''=\langle G'',h''\rangle$ ведется на планарном графе $G''$, где $G''=G'+_O G'+_O G'$. При этом $\mathrm{HG}(G'')\geqslant\min h''=14$. $\square$

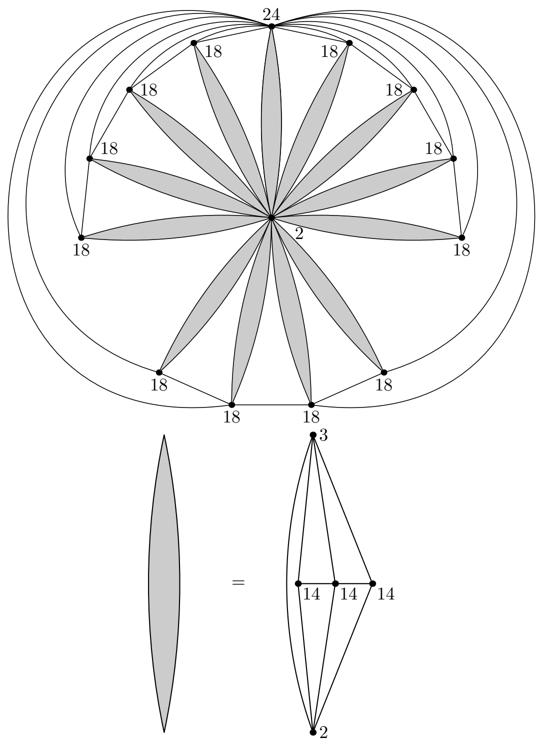


Рис. 4. Игра $\langle G', h' \rangle$. Каждый лепесток обозначает копию графа $K_5^-$.

## §4. Заключение

Вариант игры “Hats” с непостоянной функцией шляпности и теория конструкторов оказались плодотворным подходом к изучению классической игры “Hats”, дающим естественные формулировки, структурно обозримые примеры, наглядные и вместе с тем содержательные доказательства. При этом вычислительная сложность игры препятствует выдвижению скоропалительных гипотез и надежно защищает игру от возможности проведения полного исследования.

## Список литературы

1. B. Bosek et al., *Hat chromatic number of graphs*, `arXiv:1905.04108v1` (2019).
2. X. He, Y. Ido, B. Przybocki, *Hat guessing on books and windmills*, `arXiv:2010.13249v1` (2020).
3. N. Alon, O. Ben-Eliezer, Ch. Shangguan, I. Tamo, *The hat guessing number of graphs.* — J. Combin. Theory Ser. B (2020).
4. W. W. Szczechla, *The three-colour hat guessing game on cycle graphs.* — Electron. J. Combin. **24**, No. 1 (2017).
5. К. П. Кохась, А. С. Латышев, *На каких графах мудрецы могут угадать цвет хотя бы одной шляпы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **464** (2017), 48–76.
6. К. П. Кохась, А. С. Латышев, *Клики и конструкторы в игре “Hats”.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **488** (2019), 66–96.
7. К. П. Кохась, А. С. Латышев, В. И. Ретинский, *Клики и конструкторы в игре “Hats”.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **488** (2019), 97–118.

Kokhas K. P., Latyshev A. S. The Hats game. The power of constructors.

We analyze the following general variant of the deterministic Hats game. Several sages wearing colored hats occupy the vertices of a graph. Each sage can have a hat of one of $k$ colors. Each sage tries to guess the color of his own hat merely on the basis of observing the hats of his neighbors without exchanging any information. A predetermined guessing strategy is winning if it guarantees at least one correct individual guess for every assignment of colors.

We present an example of a planar graph for which the sages win for $k = 14$. We also give an easy proof of the theorem about the Hats game on “windmill” graphs.

С.-Петербургский
государственный университет,
199034, С.-Петербург, Россия
*E-mail*: `kpk@arbital.ru`

Поступило 7 декабря 2020 г.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
“Национальный исследовательский университет ИТМО”,
197101, С.-Петербург, Россия
*E-mail*: `aleksei.s.latyshev@gmail.com`