Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 498, 2020 г.

А. Г. Качуровский, И. В. Подвигин, А. А. Свищёв

МАКСИМАЛЬНАЯ ПОТОЧЕЧНАЯ СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ БИРКГОФА

1. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ – пространство с вероятностной мерой, T – его эндоморфизм, т. е. такое отображение $T : \Omega \to \Omega$, что для всех $A \in \mathfrak{F}$ множество $T^{-1}A$ принадлежит $\mathfrak{F}$ и $\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$. И пусть $\{T^t\}_{t\geqslant 0}$ – полупоток на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$, т. е. такая однопараметрическая полугруппа эндоморфизмов T^t этого пространства, что для любой измеримой функции $f(\omega)$ на Ω функция $f(T^t\omega)$ измерима на прямом произведении $\Omega \times \mathbb{R}^+$.

Для $f \in L_1(\Omega)$, $\omega \in \Omega, n \in \mathbb{N}$ и $t > 0$ обозначим

$$A_n f(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) \quad \text{и} \quad \overline{A}_t f(\omega) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f(T^s\omega)\, ds.$$

Тогда эргодическая теорема Биркгофа утверждает существование μ-п.в. пределов

$$f^* = \lim_{n\to\infty} A_n f \quad \text{и} \quad \overline{f}^* = \lim_{t\to\infty} \overline{A}_t f$$

и равенств $\int f^* d\mu = \int f d\mu = \int \overline{f}^* d\mu$. В эргодическом случае (когда все измеримые инвариантные подмножества в Ω имеют меру либо 0, либо 1) μ-п.в. $f^* = \mathbf{E}f = \overline{f}^*$. Будем предполагать в дальнейшем, что функция f имеет нулевое пространственное среднее, т.е. $\mathbf{E}f = 0$.

Как хорошо известно, поточечные скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа для эргодического эндоморфизма могут быть сколь угодно медленными (см., например, [1]) – но не как угодно быстрыми: выполнение асимптотического соотношения $A_n f = o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$ на множестве положительной меры бывает лишь в вырожденном случае $f \equiv 0$ п.в. (замечание 1 к теореме 19 в [2]). Поэтому скорости сходимости быстрее $A_n f = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$ на множестве

Ключевые слова: эргодический полупоток, эргодическая теорема Биркгофа, скорости сходимости.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект No. 0314-2019-0005).

положительной меры не бывает; следующая доказанная в [2] теорема дает критерий наличия такой максимально возможной (см. [3, 4]) скорости для каждой рассматриваемой пары (f, T).

Теорема 1 [2, теорема 19]**.** *Пусть T – эргодический эндоморфизм. Для каждой $f \in L_1(\Omega)$ следующие три условия равносильны:*

1) $A_n f = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ *при $n \to \infty$ на множестве положительной меры;*

2) *существует такая константа C, что $|A_n f| \leqslant \frac{C}{n}$ почти всюду для всех n;*

3) $f = h \circ T - h$ *для некоторой $h \in L_\infty(\Omega)$.*

Как было отмечено в [2] (замечание 2 к теореме 19), если (Ω, μ) – пространство Лебега (см., например, [5]), то условие эргодичности в формулировке этой теоремы в части 2) $\Leftrightarrow$ 3) можно опустить (и нельзя опустить в части, касающейся 1)).

Наша задача – перенести эти результаты с дискретного времени (т.е. со случая эндоморфизма) на время непрерывное (т.е. на полупоток).

2. Следующая теорема является точным аналогом теоремы 1 для случая эргодического полупотока в пространстве Лебега.

Теорема 2. *Пусть $\{T^t\}_{t \geqslant 0}$ – эргодический полупоток в пространстве Лебега (Ω, μ). Для каждой $f \in L_1(\Omega)$ следующие три условия равносильны:*

1) $\overline{A}_t f = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$ *при $t \to \infty$ на множестве положительной меры;*

2) *существует такая константа C, что $\left|\overline{A}_t f\right| \leqslant \dfrac{C}{t}$ п.в. для всех $t > 0$;*

3) *существует $h \in L_\infty(\Omega)$, такая, что для п.в. $\omega \in \Omega$ верно представление*

$$f(\omega) = \lim_{\tau \to 0} \frac{h(\omega) - h \circ T^\tau(\omega)}{\tau}.$$

Доказательство. Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) очевидна.

Докажем, что из третьего условия теоремы следует второе: 3) $\Rightarrow$ 2).

В пространстве Лебега любое инвариантное $\operatorname{mod} 0$ относительно полупотока T^t множество можно, изменив сам полупоток на множестве меры ноль, сделать уже инвариантным относительно измененного полупотока (см. теорему 2 лекции 2 в [6]). Поэтому, не вводя дополнительных обозначений, возникающие в доказательстве множества меры 1 (очевидно инвариантные $\operatorname{mod} 0$) мы будем считать инвариантными относительно полупотока T^t.

Пусть $\bar{\Omega}$ – множество меры 1, для всех точек ω которого верно представление в 3), т.е.

$$f(\omega) = -\left.\frac{dh(T^t\omega)}{dt}\right|_{t=0}.$$

Так как множество $\bar{\Omega}$ инвариантно, т.е. $\bar{\Omega} = T^{-t}\bar{\Omega} = \left\{\omega \in \Omega | T^t\omega \in \bar{\Omega}\right\}$ при всех $t > 0$, для всех точек $\omega \in \bar{\Omega}$ при всех $s \geqslant 0$ также верно равенство

$$f(T^s\omega) = -\left.\frac{dh(T^{t+s}\omega)}{dt}\right|_{t=0} = -\left.\frac{dh(T^t\omega)}{dt}\right|_{t=s}.$$

Отсюда для тех же ω при всех $t > 0$ получаем

$$\left|\int_0^t f\left(T^s\omega\right) ds\right| = \left|\int_0^t \left.\frac{dh(T^t\omega)}{dt}\right|_{t=s} ds\right| = \left|h(T^t\omega) - h(\omega)\right|. \tag{1}$$

Остается воспользоваться тем, что $h \in L_\infty(\Omega)$:

$$\left|\overline{A}_t f(\omega)\right| = \left|\frac{1}{t}\int_0^t f\left(T^s\omega\right) ds\right| = \frac{1}{t}\left|h(T^t\omega) - h(\omega)\right| \leqslant \frac{2\|h\|_\infty}{t}$$

для всех $\omega \in \bar{\Omega}$ при всех $t > 0$, что и требовалось.

Остается показать, что из первого условия теоремы следует третье: 1) $\Rightarrow$ 3).

Определим множество $\bar{\Omega} \subseteq \Omega$ как множество положительной меры, на котором справедливо асимптотическое соотношение $\overline{A}_t f(\omega) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t \to \infty$. Или, что равносильно, $\int_0^t f\left(T^s\omega\right) ds = \mathcal{O}\left(1\right)$ при $t \to \infty$. Покажем, что это множество инвариантно относительно полупотока. Для каждого $\tau > 0$ рассмотрим интеграл

$$\int_0^t f\left(T^{s+\tau}\omega\right) ds = \int_0^{t+\tau} f\left(T^s\omega\right) ds - \int_0^{\tau} f\left(T^s\omega\right) ds.$$

Так как $\int_0^{\tau} f\left(T^s\omega\right) ds$ не зависит от t, при $t \to \infty$ равносильны асимптотические соотношения $\int_0^t f\left(T^{s+\tau}\omega\right) ds = \mathcal{O}\left(1\right)$ и $\int_0^t f\left(T^s\omega\right) ds = \mathcal{O}\left(1\right)$.

Тогда $T^{-\tau}\bar{\Omega} = \bar{\Omega}$ для всех $\tau > 0$, что и означает инвариантность множества $\bar{\Omega}$. Поэтому, в силу эргодичности, в дальнейшем полагаем, что $\mu(\bar{\Omega}) = 1$.

Для всех $\omega \in \bar{\Omega}$ обозначим $F(\omega) = \sup\limits_{t \geqslant 0} \int\limits_0^t f\left(T^s\omega\right) ds$; при всех $\tau > 0$ получаем

$$F(T^\tau\omega) = \sup_{t \geqslant 0} \int\limits_0^t f\left(T^{s+\tau}\omega\right) ds = \sup_{t \geqslant 0} \int\limits_\tau^{t+\tau} f\left(T^s\omega\right) ds$$
$$= \sup_{t \geqslant \tau} \int\limits_0^t f\left(T^s\omega\right) ds - \int\limits_0^\tau f\left(T^s\omega\right) ds.$$

Для всех точек $\omega \in \bar{\Omega}$ рассмотрим предел $\lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{F(\omega) - F \circ T^\tau(\omega)}{\tau}$ и покажем, что он для п.в. ω равняется исходной функции $f(\omega)$. Действительно,

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{F(\omega) - F(T^\tau\omega)}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\sup_{t \geqslant 0} \int\limits_0^t f\left(T^s\omega\right) ds - \sup_{t \geqslant \tau} \int\limits_0^t f\left(T^s\omega\right) ds}{\tau}$$
$$+ \lim_{\tau \to 0} \frac{\int\limits_0^\tau f\left(T^s\omega\right) ds}{\tau}.$$

В последней сумме первое слагаемое для п.в. ω равняется нулю, так как существует число $\delta(\omega) > 0$, такое, что

$$\sup_{t \geqslant 0} \int\limits_0^t f\left(T^s\omega\right) ds = \sup_{t \geqslant \delta} \int\limits_0^t f\left(T^s\omega\right) ds.$$

Это следует из того, что $\int\limits_0^t f\left(T^s\omega\right) ds$ является непрерывной функцией переменной t, которая для п.в. ω принимает как положительные, так и отрицательные значения при сколь угодно больших t (см. [7,8]). А тогда, как только τ станет достаточно близким к нулю (т.е. при $\tau \leqslant \delta$), числитель первого слагаемого станет тождественным нулем. Второе же слагаемое п.в. равняется исходной функции f по локальной эргодической теореме Винера (см. §1.2 в [9]).

Остается показать, что $F \in L_\infty(\Omega)$. Для этого предположим противное и выведем противоречие. Перепишем условие 1) в следующем виде: для п.в. ω существуют числа $M(\omega) \geqslant 0$, такие, что при всех $t \geqslant 0$ верна оценка $\left|\int_0^t f\,(T^s\omega)\,ds\right| \leqslant M(\omega)$. Предположим, что $F \notin L_\infty(\Omega)$. Тогда, с одной стороны, для любого $n \geqslant 0$ найдется множество $B_n \subseteq \Omega$ положительной меры, такое, что $|F(\omega)| \geqslant n$ для всех $\omega \in B_n$. С другой стороны, по доказанному $\mu(\bar{\Omega}) = 1$; поэтому функция F конечна п.в., а это означает, что найдется $k \in \mathbb{N}$ и множество $C_k \subseteq \bar{\Omega}$ положительной меры, такое, что $|F(\omega)| \leqslant k$ для всех $\omega \in C_k$.

Рассмотрим теперь, как точки $\omega \in C_k$ попадают в множества B_n при различных n под действием полупотока. Для этого применим теорему Биркгофа к характеристической функции множества B_n:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \chi_{B_n}\,(T^s\omega)\,ds = \mu(B_n) > 0 \tag{2}$$

для п.в. $\omega \in \Omega$. Так как равенство (2) при каждом конкретном n выполняется для п.в. $\omega \in C_k$, множество C_k^* точек из C_k, для которых оно выполняется при всех n, имеет полную меру в C_k, т.е. $\mu(C_k^*) = \mu(C_k) > 0$. Отметим, что ни для какого n нельзя указать $t_0 = t_0(n,\omega) \geqslant 0$, такое, что точка $\omega \in C_k^*$ не будет под действием полупотока попадать в множество B_n начиная с момента времени t_0, т.е. $T^s\omega \notin B_n$ для $s > t_0$. Действительно: если это не так, то начиная с этого t_0 для всех $s \geqslant t_0$ выполнялось бы равенство $\chi_{B_n}\,(T^s\omega) \equiv 0$; но тогда

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \chi_{B_n}\,(T^s\omega)\,ds \leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^{t_0} 1ds = 0,$$

что противоречило бы равенству (2). Также легко заметить, что для всех $\omega \in \bar{\Omega}$ (а не п.в.: здесь мы еще раз используем лебеговость пространства с мерой) при всех $t > 0$

$$\int\limits_0^t f\,(T^s\omega)\,ds = \int\limits_0^t \lim_{\tau\to 0} \frac{F - F\circ T^\tau}{\tau}\,(T^s\omega)\,ds$$
$$= -\int\limits_0^t \left.\frac{dF(T^t\omega)}{dt}\right|_{t=s} ds = F(\omega) - F(T^t\omega),$$

откуда получается оценка

$$\left|\int_0^t f\left(T^s\omega\right)ds\right| \geqslant \left|\left|F(T^t\omega)\right| - |F(\omega)|\right|.$$

Теперь, рассматривая точки $\omega \in C_k^*$, видим, что для них можно подобрать такие сколь угодно большие времена $t_n(\omega)$, что $T^{t_n}\omega \in B_n$; но тогда для них имеем оценку $\left|\int\limits_0^{t_n} f\left(T^s\omega\right)ds\right| \geqslant n-k$, а значит, для этих точек $\int\limits_0^t f\left(T^s\omega\right)ds \neq \mathcal{O}\left(1\right)$ при $t \to \infty$, что и противоречит условию 1).

Теорема 2 доказана. □

3. Как показывает следующее утверждение, скорости сходимости в формулировке теоремы 2 – максимально возможные.

Следствие. *Асимптотическое соотношение $\overline{A}_t f(\omega) = o\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t \to \infty$ на множестве положительной меры возможно только в вырожденном случае $f \equiv 0$ п.в.*

Доказательство. Так как из соотношения $\overline{A}_t f(\omega) = o\left(\frac{1}{t}\right)$ следует, что $\overline{A}_t f(\omega) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t \to \infty$ на рассматриваемом множестве Ω' положительной меры, по теореме 2 получаем представление $f(\omega) = \lim\limits_{\tau\to 0} \dfrac{h(\omega) - h \circ T^\tau(\omega)}{\tau}$ для некоторой функции $h \in L_\infty(\Omega)$, справедливое для п.в. $\omega \in \Omega$. Тогда существует константа C, такая, что $h \equiv C$ п.в.

Чтобы доказать это, предположим противное. Тогда $u = \operatorname{ess\,sup} h > \operatorname{ess\,inf} h = l$; положим $\varepsilon = u - l > 0$. Рассмотрим множества

$$M_n = \{\omega \in \Omega | l + \frac{n-1}{4}\varepsilon \leqslant h(\omega) \leqslant l + \frac{n}{4}\varepsilon\}, \quad 1 \leqslant n \leqslant 4.$$

По построению меры множеств M_1 и M_4 положительны. И так как объединение четырех множеств M_n покрывает (почти все) Ω, хотя бы одно из четырех множеств $M_n' = M_n \cap \Omega'$ имеет положительную меру; обозначим его через M'.

Воспользовавшись равенством (1) для п.в. точек ω из множества M', получаем

$$\left|\int_0^{t^*} f\left(T^s\omega\right)ds\right| = \left|h(T^{t^*}\omega) - h(\omega)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

при сколь угодно больших $t^*(\omega)$ (когда под действием эргодического полупотока $T^{t^*}\omega$ попадает в множество положительной меры M_1 или M_4 – в зависимости от того, какое из четырех множеств M'_n было взято за M' при его построении). Что противоречит асимптотическому соотношению $\overline{A}_t f(\omega) = o\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t \to \infty$, выполняющемуся для всех точек $\omega \in M' \subseteq \Omega'$.

Значит, h п.в. равна константе; а тогда и f п.в. равна 0. □

Замечание. Условие эргодичности в формулировке теоремы 2 в части 2) ⇔ 3) можно опустить (и нельзя опустить в части, касающейся 1)).

Действительно, соотношение 2) ⇔ 3) в этом случае сразу следует из возможности разбиения фазового пространства на эргодические компоненты [10], на каждой из которых это соотношение справедливо – в силу теоремы 2. Однако общей для всех таких компонент константы C, определяемой в пункте 2) теоремы 2, при выполнении на каждой из компонент условия 1), очевидно, может не быть. Поэтому в рассматриваемом случае из 1) не следует 2), а значит, и 3).

Список литературы

1. U. Krengel, *On the speed of convergence in the ergodic theorem.* — Monatsh. Math. **86**, No. 1 (1978), 3–6.
2. А. Г. Качуровский, *Скорости сходимости в эргодических теоремах.* — УМН **51**, вып. 4 (1996), 73–124.
3. А. Г. Качуровский, И. В. Подвигин, *Об измерении скоростей сходимости в эргодической теореме Биркгофа.* — Мат. заметки **106**, вып. 1 (2019), 40–52.
4. А. Г. Качуровский, И. В. Подвигин, *Оценки скоростей сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа.* — Тр. ММО **77**, вып. 1 (2016), 1–66.
5. В. А. Рохлин, *Об основных понятиях теории меры.* — Мат. сб. **25(67)**, вып. 1 (1949), 107–150.
6. Я. Г. Синай, *Современные проблемы эргодической теории.* М., Физматлит, 1995.
7. И. Я. Шнейберг, *Нули интегралов вдоль траекторий эргодических систем.* — Функц. анал. и его прил. **19**, вып. 2 (1985), 92–93.
8. B. Marcus, K. Petersen, *Balancing ergodic averages.* In: Ergodic Theory (Proc. Conf., Math. Forschungsinst., Oberwolfach, Germany, 1978). Lecture Notes Math., 729. Berlin, Springer-Verlag, 1979, pp. 126–143.
9. U. Krengel, *Ergodic Theorems.* Berlin–New York, Walter de Gruyter, 1985.
10. В. А. Рохлин, *Избранные вопросы метрической теории динамических систем.* — УМН **4**, вып. 2 (1949), 57–128.

Kachurovskii A. G., Podvigin I. V., Svishchev A. A. The maximum pointwise rate of convergence in Birkhoff's ergodic theorem.

A criterion for the maximum possible pointwise convergence rate in Birkhoff's ergodic theorem for ergodic semiflows in a Lebesgue space is obtained. It is proved that higher rates of convergence in this theorem are impossible.

Институт математики
им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения
Российской академии наук, Новосибирск, Россия
E-mail: agk@math.nsc.ru

Поступило 31 марта 2020 г.

Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения
Российской академии наук и
Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет, Новосибирск, Россия
E-mail: ipodvigin@math.nsc.ru

Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет, Новосибирск, Россия
E-mail: saa1997@yandex.ru