Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 497, 2020 г.

В. П. Оревков

ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ВЫСОТ СЕКВЕНЦИАЛЬНЫХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ В ИНТУИЦИОНИСТСКОМ ИСЧИСЛЕНИИ

Введение

В 1975 г. Р. Стетмен в работе [11] (подробное изложение опубликовано в работе Р. Стетмена [12]) доказал, что нормализация выводов в исчислении предикатов с равенством даёт такое увеличение длины вывода, которое нельзя оценить сверху никакой элементарной по Кальмару функцией от длины исходного вывода, т.е. нельзя оценить сверху конечной башней экспонент.

Другими словами, удачный выбор формул, по которым выполняются сечения, может существенно сократить число секвенций в доказательстве.

В работе [8] построена последовательность секвенций $S_0, S_1, \dots$ и число c, которые при всех натуральных k удовлетворяют условиям:

1) в секвенцию S_k не входят функциональные знаки, за исключением 0-местных знаков (констант);
2) можно построить интуиционистское доказательство секвенции S_k, число секвенций в котором не превосходит $c(k+1)$;
3) высота любого классического доказательства секвенции S_k, в котором нет сечений по формулам с кванторами, больше или равна $2 \cdot \mathbf{2}^1_k$.

Высотой доказательства D называется максимальное число применений правил вывода в одной ветви D. Если доказательство состоит только из аксиомы, его высота равна 0.

Функция $\mathbf{2}^n_i$ определяется рекурсией:

$$\begin{cases} \mathbf{2}^n_0 = n, \\ \mathbf{2}^n_{i+1} = 2^{(\mathbf{2}^n_i)}. \end{cases}$$

Ключевые слова: интуиционистское исчисление предикатов, устранение сечений, верхняя оценка, нижняя оценка.

Вхождение V подформулы в формулу или секвенцию S называется *существенно положительным*, если являются положительными вхождениями в S вхождение V и все вхождения подформул в S, которым принадлежит V.

Многие дедуктивные свойства секвенций в интуиционистском исчислении предикатов зависят от наличия или отсутствия существенно положительных вхождений дизъюнкции или квантора $\exists$. Такое дедуктивное свойство сформулировано в следующей теореме Р. Харропа из [10].

Каковы бы ни были список формул Σ и формула $\exists x A(x)$, если ни в одну формулу из Σ не входит существенно положительно ни дизъюнкция, ни квантор $\exists$ и секвенция $\Sigma \to \exists x A(x)$ доказуема в интуиционистском исчислении предикатов, то можно построить такой терм t, что в этом же исчислении доказуема секвенция $\Sigma \to A(t)$.

Другая формулировка теоремы Р. Харропа приведена в [1, 4.2].

В теореме 3 из [6] доказано следующее дедуктивное свойство интуиционистского исчисления предикатов.

Если формула A исчисления предикатов начинается с отрицания и не содержит в области действия положительных вхождений квантора $\forall$ существенно положительных вхождений $\exists, \vee$ и элементарных формул, то формула A выводима в классическом исчислении предикатов тогда и только тогда, когда она выводима в интуиционистском исчислении предикатов.

Целью данной статьи является получение оценок сокращения высоты доказательства в интуиционистском исчислении предикатов с помощью сечений по формулам, содержащим существенно положительные вхождения квантора $\exists$.

В работе построена последовательность секвенций $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \ldots$ и число c, которые при всех натуральных k удовлетворяют условиям:

1) в секвенцию $\mathbf{S}_k$ не входят функциональные знаки, за исключением 0-местных;
2) можно построить интуиционистское доказательство секвенции $\mathbf{S}_k$, в котором применяются сечения по формулам, содержащим существенно положительные вхождения квантора $\exists$ и высота которого не превосходит $\log_2(k+1)+c$;
3) высота любого интуиционистского доказательства секвенции $\mathbf{S}_k$, в котором нет сечений по формулам, содержащим существенно положительные вхождения квантора $\exists$, больше или равна $2 \cdot \mathbf{2}_k^1$.

Последовательность секвенций $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \ldots$ является модификацией последовательности $S_0, S_2, \ldots$ из [8].

В работе также построена последовательность формул $\exists w \mathbf{A}_0(w)$, $\exists w \mathbf{A}_1(w), \ldots$ и число c, которые при всех натуральных k удовлетворяют условиям:

1) в формулу $\exists w \mathbf{A}_k(w)$ входят только 0-местные функциональные знаки и один одноместный функциональный знак;
2) можно построить интуиционистское доказательство секвенции $\to \exists w \mathbf{A}_k(w)$, в котором применяются сечения по формулам, содержащим существенно положительные вхождения квантора $\exists$ и высота которого не превосходит $\log_2(k+1) + c$;
3) высота любого интуиционистского доказательства секвенции $\to \exists w \mathbf{A}_{k+2}(w)$, в котором нет сечений по формулам, содержащим существенно положительные вхождения квантора $\exists$, больше $\frac{1}{2} \cdot \mathbf{2}_k^1 - 1$.

Верхние и нижние оценки сложности выводов формул $\exists w \mathbf{A}_0(w)$, $\exists w \mathbf{A}_1(w), \ldots$ в гильбертовском варианте интуиционистского исчисления предикатов получены в [9].

§1. Доказательства в секвенциальных исчислениях

1.1. Основное исчисление. *Секвенциями* называют выражения вида $\Gamma \to \Delta$, где Γ и Δ – списки формул. Список Γ называют *антецедентом секвенции,* а список Δ – *сукцедентом секвенции.* Секвенция, сукцедент которой пуст или содержит только одну формулу, называется *сингулярной.*

Выражение $[S]^x_t$ будет обозначать результат подстановки терма t вместо всех свободных вхождений переменной x в формулу или секвенцию S при условии, что терм t свободен для подстановки вместо свободных вхождений переменной x в S.

1.1.1. Основным вариантом секвенциального интуиционистского исчисления предикатов с функциональными знаками (без равенства) будет рассматриваться исчисление $\mathbf{K}_1^+$. В этом исчислении могут выводиться только сингулярные секвенции.

Исчисление $\mathbf{K}_1^+$ задаётся схемой аксиом

$$\Gamma_1, A, \Gamma_2 \to A;$$

логическими правилами введения пропозициональных связок

$$\frac{\Gamma, A \to B}{\Gamma \to (A \supset B)} \to\supset; \qquad \frac{\Gamma_1, (A \supset B), \Gamma_2 \to A; \quad \Gamma_1, B, \Gamma_2 \to \Delta}{\Gamma_1, (A \supset B), \Gamma_2 \to \Delta} \supset\to;$$

$$\frac{\Gamma \to A; \quad \Gamma \to B}{\Gamma \to (A \,\&\, B)} \to \&; \qquad \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \to \Delta}{\Gamma_1, (A \,\&\, B), \Gamma_2 \to \Delta} \& \to;$$

$$\frac{\Gamma \to A}{\Gamma \to (A \vee B)} \to \vee_1; \qquad \frac{\Gamma \to B}{\Gamma \to (A \vee B)} \to \vee_2;$$

$$\frac{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \to \Delta; \quad \Gamma_1, B, \Gamma_2 \to \Delta}{\Gamma_1, (A \vee B), \Gamma_2 \to \Delta} \vee \to;$$

$$\frac{\Gamma, A \to}{\Gamma \to \neg A} \to \neg; \qquad \frac{\Gamma_1, \neg A, \Gamma_2 \to A}{\Gamma_1, \neg A, \Gamma_2 \to \Delta} \neg \to;$$

логическими правилами введения кванторов

$$\frac{\Gamma \to [A]^x_a}{\Gamma \to \forall x A} \to \forall; \qquad \frac{\Gamma_1, [A]^x_t, \forall x A, \Gamma_2 \to \Delta}{\Gamma_1, \forall x A, \Gamma_2 \Sigma \to \Delta} \forall \to;$$

$$\frac{\Gamma \to [A]^x_t}{\Gamma \to \exists x A} \to \exists; \qquad \frac{\Gamma_1, [A]^x_a, \Gamma_2 \to \Delta}{\Gamma_1, \exists x A, \Gamma_2 \to \Delta} \exists \to$$

и структурным правилом сечения

$$\frac{\Gamma \to A; \quad \Gamma, A \to \Delta}{\Gamma \to \Delta}.$$

В логических правилах $\to \forall$ и $\exists \to$ переменная a не входит свободно в формулы заключения правила и терм a свободен для подстановки вместо свободных вхождений x в формулу A.

В правилах $\forall \to$ и $\to \exists$ терм t свободен для подстановки вместо свободных вхождений x в формулу A.

Логические правила исчисления $\mathbf{K}_1^+$ являются также логическими правилами интуиционистского варианта исчисления **G4** из книги [3]. На аксиомы исчисления **G4** накладывается дополнительное условие: формула A элементарна. Исчисление $\mathbf{K}_1^+$ отличается от исчисления $\mathbf{K}_1^*$ из [7] только наличием правила сечения.

Переменную a в применении L правила $\to \forall$ или $\exists \to$ называют *собственной переменной применения правила* L.

Терм t в применении L правила $\forall \to$ или $\to \exists$ называют *собственным термом применения правила* L.

Пусть L – одно из правил исчисления $\mathbf{K}_1^+$. Вхождения формул в посылку L, преобразуемые L, называют *боковыми вхождениями применения правила* L. Вхождение формулы в заключении L, в которое

L преобразует боковые вхождения, называют *главным вхождением применения правила* L.

Вхождения формулы A в сукцедент и в антецедент аксиомы S исчисления $\mathbf{K}_1^+$ называют *главными вхождениями аксиомы* S.

Логические правила исчисления $\mathbf{K}_1^+$ имеют как боковые вхождения, так и главное вхождение, а правило сечения имеет только боковые вхождения.

1.1.2. В секвенциальных исчислениях принято записывать доказательства в виде плоского дерева, листьям которого приписаны аксиомы, корню – доказываемая секвенция, а промежуточным вершинам – промежуточные секвенции.

В дереве доказательства вершинам будем приписывать *анализы применений правил и аксиом,* в которых будем указывать обозначение применяемого правила или аксиомы и для логических правил – номер главного вхождения.

Древовидная форма записи лучше выявляет логическую структуру доказательства и существенно облегчает проведение различных перестроек.

В [9] доказано, что стандартную процедуру устранения сечения можно успешно завершить не только на доказательствах в древовидной форме, но и на схемах этих доказательств. *Схема дерева доказательства* получается после удаления из дерева доказательства всех секвенций, оставив только анализы применений правил и аксиом.

Высоту доказательства D будем обозначать через $\mathbf{h}[D]$.

Лемма 1.1.1. *Число применений правил в древовидном доказательстве* D *не превосходит* $2^{\mathbf{h}[D]} - 1$.

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по $\mathbf{h}[D]$. □

1.1.3. Пусть $\mathfrak{K}$ – секвенциальное исчисление и $\Sigma \to \Delta$ – секвенция. В дальнейшем выражение

$$\mathfrak{K} \vdash_h \Sigma \to \Delta$$

будет означать, что существует в исчислении $\mathfrak{K}$ доказательство секвенции $\Sigma \to \Delta$, высота которого не превосходит h.

Выражение

$$\mathfrak{K} \vdash_h^\circ \Sigma \to \Delta$$

будет означать, что существует в исчислении $\mathfrak{K}$ доказательство секвенции $\Sigma \to \Delta$, высота которого не превосходит h и в котором нет применений правила сечение.

1.1.4. Пусть L – список секвенций

$$\Sigma \to A_0; \Sigma, A_0 \to A_1; \ldots; \Sigma, A_i \to A_{i+1}; \ldots; \Sigma, A_k \to \Delta. \tag{1.1}$$

Применив к секвенциям $\Sigma \to A_0$ и $\Sigma, A_0 \to A_1$ сечение, получим секвенцию $\Sigma \to A_1$. Продолжив применение сечений, получим вывод секвенции $\Sigma \to \Delta$ из списка (1.1), высота которого равна $k+1$. Чтобы существенно уменьшить высоту вывода $\Sigma \to \Delta$ из списка (1.1), будем применять сечения другим способом.

Перестроим список L в список L' следующим образом.

Если $k = 0$, список L' состоит только из секвенции $\Sigma \to \Delta$.

Если $k > 0$ и чётно, L' имеет вид

$$\Sigma \to A_1; \Sigma, A_1 \to A_3; \ldots; \Sigma, A_j \to A_{j+2}; \ldots; \Sigma, A_{k-1} \to \Delta.$$

Если k нечётно, L' имеет вид

$$\Sigma \to A_0; \Sigma, A_0 \to A_2; \ldots; \Sigma, A_j \to A_{j+2}; \ldots; \Sigma, A_{k-1} \to \Delta.$$

Любая секвенция списка L' содержится в списке L или её можно получить из пары секвенций списка L сечением. Если список L' содержит больше одной секвенции, то он имеет вид (1.1) и по нему можно построить список L''. Будем последовательно строить списки $L, L', L'', \ldots L^{(i)} \ldots$. Здесь выражение $L^{(i)}$ обозначает *список* L (при $i = 0$) и список $L^{(j)\prime}$ (при $i = j+1$).

Лемма 1.1.2. *Последовательность* $L, L', L'', \ldots L^{(i)} \ldots$ *обрывается на списке* $L^{(m)}$*, состоящем из одной секвенции* $\Sigma \to \Delta$*, и*

$$m \leqslant \log_2(k+1) + 1. \tag{1.2}$$

Доказательство. При переходе от списка $L^{(i)}$ к списку $L^{(i+1)}$ число секвенций в списке уменьшается. Следовательно, последовательность $L, L', L'', \ldots L^{(i)} \ldots$ оборвётся на списке $L^{(m)}$, состоящем только из одной секвенции.

Индукцией по i легко показать, что число секвенций в $L^{(i)}$ не превосходит

$$\frac{k+1}{2^i} + 1.$$

Список $L^{(m-1)}$ состоит ровно из двух секвенций. Следовательно,

$$2 \leqslant \frac{k+1}{2^{m-1}} + 1.$$

Отсюда получаем неравенство (1.2). $\square$

1.2. Отношение родства в доказательствах. В секвенциальных исчислениях части одних секвенций в доказательствах преобразуются в части других секвенций. Чтобы корректно описывать такие переходы С.К. Клини в работе [2], а затем в книге [3] разработал язык отношений родства в доказательствах. Мы будем пользоваться этой терминологией. Уточним некоторые детали.

1.2.1. Пусть S – секвенция. Вхождение V формулы в секвенцию S будем называть *вхождением формулы в качестве члена секвенции,* если V является вхождением формулы в качестве члена антецедента или сукцедента секвенции S. Вхождения формул в качестве членов секвенции коротко будем называть *вхождениями формулы.*

Подформулами секвенции S будем называть как формулы, являющиеся членами антецедента или сукцедента секвенции S, так и формулы, входящие в члены этих списков формул.

Заметим, что вхождение подформулы A в секвенцию однозначно определяется вхождением внешней связки или внешнего квантора формулы A в секвенцию. Обычно отождествляют вхождение подформулы A в секвенцию и вхождение внешней связки или внешнего квантора формулы A в ту же секвенцию.

Вхождения подформул в формулы или в секвенции стандартным образом (см. [3]) разделяются на *положительные* и *отрицательные.*

Пусть V – вхождение подформулы A в секвенцию или формулу S и W – вхождение подформулы B в ту же секвенцию или формулу. Будем говорить, что вхождение V *принадлежит вхождению* W, если V происходит от вхождения A в B и эти формулы различны.

1.2.2. Пусть D – доказательство в исчислении $\mathbf{K}_1^+$; V – вхождение подформулы в секвенцию $\Sigma \to \Pi$ из доказательства D. *Образом вхождения* V *в секвенции* $\Sigma \to \Pi$ называют само вхождение V.

Допустим, что секвенция $\Gamma \to \Delta$ лежит в D ниже $\Sigma \to \Pi$. *Образом вхождения* V *в секвенции* $\Gamma \to \Delta$ называют вхождение подформулы в

$\Gamma \to \Delta$, в которое вхождение V преобразуется применениями логических правил в D. Образ вхождения V определяется в секвенции $\Gamma \to \Delta$ однозначно.

Если V является положительным (отрицательным) вхождением подформулы в секвенцию $\Sigma \to \Pi$, то образ V в секвенции $\Gamma \to \Delta$ также является положительным (соответственно, отрицательным) вхождением подформулы в $\Gamma \to \Delta$.

Для любого вхождения V подформулы в какую-нибудь секвенцию доказательства D выполняется одно и только одно из условий:

- вхождения V имеет образ в последней секвенции доказательства D,
- вхождения V имеет образ в посылке какого-нибудь сечения и образ V принадлежит боковому вхождению этого сечения.

1.2.3. Пусть D – доказательство в исчислении $\mathbf{K}_1^+$; L – применение в доказательстве D какого-нибудь правила и S – секвенция доказательства D. Будем говорить, что вхождение V подформулы в S *принадлежит применению* L, если заключение L лежит в D ниже секвенции S и образ V в посылке L принадлежит боковому вхождению применения L.

Очевидно, что боковое вхождение применения L принадлежит применению L.

Если вхождение V формулы в S принадлежит как применению L_1, так и применению L_2, то выполняется одно из условий:

- применения L_1 и L_2 совпадают;
- одно из применений L_1 или L_2 является применением логического правила и его главное вхождение принадлежит другому применению из этой пары.

1.2.4. Пусть S_1 и S_2 – секвенции в доказательстве D в исчислении $\mathbf{K}_1^+$ и V – вхождение подформулы A в секвенцию S_1. Предположим, что S_2 лежит в D ниже S_1 и образом V в S_2 является вхождение W подформулы B в S_2. Переменную x будем называть *π-параметром вхождения V относительно секвенции* S_2, если выполняются следующие условия:

1) переменная x входит свободно в формулу B;
2) можно указать применение L логического правила введения квантора, для которого выполняются условия:
   (a) вхождение V принадлежит применению L;

(b) применение L вводит квантор, содержащий x;
(c) посылка применение L лежит в D выше секвенции S_2;
(d) в доказательстве D нет применений логических правил, посылка которых лежит в D выше посылки применение L и для которых выполняются условия (a) и (b).

Собственный терм или собственную переменную применения L из условия 2) будем называть значением π-параметра x.

Формула A получается из формулы B в результате подстановки вместо каждого π-параметра вхождения V его значения.

1.3. Оценки сложности формул в доказательствах. Оценим сверху сложность формул, участвующих в доказательстве, через высоту доказательства.

1.3.1. *Степень* $\mathbf{st}[A]$ *формулы* A *исчисления предикатов* задаётся следующими равенствами:

$$\mathbf{st}[A] = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ элементарна,} \\ \mathbf{st}[A_1] + 1, & \text{если } A = \neg A_1, \\ \max(\mathbf{st}[A_1], \mathbf{st}[A_2]) + 1, & \text{если } A = (A_1 \,\&\, A_2), \\ \max(\mathbf{st}[A_1], \mathbf{st}[A_2]) + 1, & \text{если } A = (A_1 \vee A_2), \\ \max(\mathbf{st}[A_1], \mathbf{st}[A_2]) + 1, & \text{если } A = (A_1 \supset A_2), \\ \mathbf{st}[A_1] + 1, & \text{если } A = \exists x A_1, \\ \mathbf{st}[A_1] + 1, & \text{если } A = \forall x A_1. \end{cases}$$

Здесь и в дальнейшем знаком $=$ обозначается *графическое равенство термов и формул.*

Лемма 1.3.1. *Для любой формулы A число вхождений элементарных подформул в A не превосходит* $2^{\mathbf{st}[A]-1}$.

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по $\mathbf{st}[A]$. □

1.3.2. Пусть A – формула исчисления предикатов. Результат удаления скобок и термов во всех вхождениях в A элементарных подформул будем называть *q-типом формулы A*. Например, q-типом формулы

$$\forall y \exists z (\forall u (Q(y, z, u) \,\&\, P(u, z, y)) \supset \exists v P(y, f(z), v))$$

является выражение

$$\forall y \exists z (\forall u (Q \,\&\, P) \supset \exists v P).$$

Лемма 1.3.2. *Какова бы ни была формула A исчисления предикатов,* $\mathbf{st}[A]-1$ *не превосходит числа различных q-типов неэлементарных подформул формулы A.*

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по $\mathbf{st}[A]$. □

1.3.3. Доказательство D будем называть *q-минимальным,* если для любой неэлементарной подформулы A какой-нибудь секвенции доказательства D существует в D применение логического правила, q-тип главной формулы которого совпадет с q-типом A.

Пусть D – доказательство секвенции S и L – число различных применений логических правил в D.

Лемма 1.3.3. *Если доказательство D q-минимально, выполняются следующие условия:*

1) *число различных q-типов неэлементарных подформул S не превосходит L;*
2) *для любой подформулы A доказательства D выполняются условия:*
   (a) $\mathbf{st}[A] \leqslant L+1 \leqslant 2^{\mathbf{h}[D]}$,
   (b) *число вхождений элементарных подформул в A меньше*
$$2^{2^{\mathbf{h}[D]}} = \mathbf{2}_2^{\mathbf{h}[D]}.$$

Доказательство. Лемма следует из лемм 1.1.1, 1.3.1 и 1.3.2. □

1.3.4. Секвенцию S будем называть *q-минимальной,* если нельзя указать неэлементарную подформулу A секвенции S и элементарную формулу $P(t_1,\dots t_l)$, для которых выполняются условия:

1) предикат P не входит в секвенцию S;
2) переменные, входящие в термы $t_1,\dots t_l$, не входят в секвенцию S ни свободно, ни связанно;
3) не доказуем в классическом исчислении предикатов результат замены в секвенции S всех вхождений подформул, q-тип которых совпадает с q-типом формулы A, на подформулу $P(t_1,...,t_l)$.

Предложение 1.1. *По любому доказательству q-минимальной секвенции можно построить с сохранением схемы доказательства q-минимальное доказательство той же секвенции.*

Доказательство. Пусть D – доказательство q-минимальной секвенции S. Эту лемму докажем индукцией по числу различных q-типов неэлементарных подформул секвенций доказательства D, которые отличны от q-типов главных формул применений в D логических правил. База индукции очевидна. Докажем индукционный переход.

Пусть A – неэлементарная подформула доказательства D, q-тип которой отличен от q-типов главных формул применений в D логических правил; R – одноместный предикат, который не входит в D и b – переменная, которая не входит в D ни свободно, ни связанно. Заменим в D все вхождений подформул, q-тип которых совпадает с q-типом формулы A, на подформулу $R(b)$. Так как секвенция S q-минимальна, в результате получим доказательство секвенции S, к которому применимо предположение индукции. □

Лемма 1.3.4. *Для любого доказательства D q-минимальной секвенции S число различных q-типов неэлементарных подформул S не превосходит* $2^{\mathbf{h}[D]}-1$.

Доказательство. Следует из леммы 1.3.3 и предложения 1.1. □

1.4. Слабая форма теоремы Харропа.

1.4.1. Пусть D – доказательство секвенции $\Gamma \to A$ в исчислении $\mathbf{K}_1^+$; $\Sigma \to B$ – секвенция в D и V – вхождение формулы B в сукцедент $\Sigma \to B$.

Лемма 1.4.1. *Если в секвенции $\Gamma \to A$ образ вхождения V существует и является существенно положительным вхождением подформулы в A, то выполняются условия:*

1) *Если секвенция $\Pi \to \Delta$ лежит в D ниже $\Sigma \to B$, то выполняются следующие условия:*
   (a) *список Δ содержит какую-нибудь формулу,*
   (b) *образ вхождения V в секвенции $\Pi \to \Delta$ существует и является существенно положительным вхождением подформулы в эту секвенцию,*
   (c) *в секвенции $\Gamma \to A$ образ вхождения формулы Δ в секвенцию $\Pi \to \Delta$ существует и является существенно положительным вхождением подформулы в A.*
2) *Каково бы ни было существенно положительное вхождение W подформулы в формулу списка Σ, выполняется одно из условий:*
   - *образ вхождения W в секвенции $\Gamma \to A$ существует и является существенно положительным вхождением подформулы в формулу списка Γ;*

- *в доказательстве D ниже секвенции $\Sigma \to B$ существует такое применение L правила $\to\supset$, что образ вхождения W в посылке L существует и является существенно положительным вхождением подформулы в антецедентную боковую формулу применения L;*
- *в доказательстве D ниже секвенции $\Sigma \to B$ существует такое применение сечения, что образ вхождения W в правой посылке L существует и является существенно положительным вхождением подформулы в боковую формулу.*

Доказательство. Эта лемма доказывается индукцией по числу применений правил, лежащих в D ниже секвенции $\Sigma \to B$. $\Box$

1.4.2. Пусть $\Sigma \to \Delta$ – сингулярная секвенция. В дальнейшем выражение

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash_h^* \Sigma \to \Delta$$

будет означать, что существует в исчислении $\mathbf{K}_1^+$ доказательство секвенции $\Sigma \to \Delta$, высота которого не превосходит h и в котором нет сечений по формулам с существенно положительными вхождениями квантора $\exists$.

Применение L логического правила в доказательстве D секвенции S будем называть *заключительным,* если образ в S главного вхождения L является вхождением формулы в качестве члена секвенции.

Предложение 1.2. *Если $\mathbf{K}_1^+ \vdash_h^* \Sigma \to \exists x A$ и формулы списка Σ не содержат существенно положительных вхождений квантора $\exists$, то выполняется одно из условий:*

- $\mathbf{K}_1^+ \vdash_h^* \Sigma \to$;
- *можно указать в доказательстве секвенции $\Sigma \to \exists x A$ такие собственные термы $t_1, \dots t_k$ заключительных применений правила $\to \exists$, что $\mathbf{K}_1^+ \vdash_{h+k-1}^* \Sigma \to \bigvee\limits_{i=1}^{k} [A]_{t_i}^x$.*

Доказательство. Пусть D – доказательство в исчислении $\mathbf{K}_1^+$ секвенции $\Sigma \to \exists x A$, высота которого не превосходит h и в котором нет сечений по формулам с существенно положительными вхождениями квантора $\exists$. В доказательстве D вхождение формулы $\exists x A$ в сукцедент секвенции $\Sigma \to \exists x A$ не может быть образом сукцедентного главного вхождения какой-нибудь аксиомы. В противном случае, по лемме 1.4.1

квантор $\exists$ входил бы существенно положительно в формулу списка Σ или в антецедентную боковую формулу какого-нибудь сечения.

Допустим, что в D нет заключительных применений правила $\to\exists$. Тогда, вычеркнув в сукцедентах всех секвенций из D вхождение формулы $\exists xA$, которое имеет образ в последней секвенции D, получим доказательство в $\mathbf{K}_1^+$ секвенции $\Sigma \to$.

Предположим, что D содержит заключительное применение правила $\to \exists$ и $t_1, \dots t_k$ – все собственные термы заключительных применений этого правила. Тогда, заменив в сукцедентах всех секвенций из D вхождение формулы $\exists xA$, которое имеет образ в последней секвенции D, на вхождение формулы $\bigvee\limits_{i=1}^{k} [A]^x_{t_i}$ и вставив применения правила $\to \vee$, получим необходимое доказательство. $\square$

Следствие 1.2.1. *Если* $\mathbf{K}_1^+ \vdash_h^* \Sigma \to \exists xA$, *в секвенцию* $\Sigma \to \exists xA$ *не входят функциональные знаки и формулы списка* Σ *не содержат существенно положительных вхождений квантора* $\exists$, *то выполняется одно из условий:*

- $\mathbf{K}_1^+ \vdash_h^* \Sigma \to;$
- $\mathbf{K}_1^+ \vdash_h^* \Sigma \to \forall xA;$
- $\mathbf{K}_1^+ \vdash_{h+k-1}^* \Sigma \to \bigvee\limits_{i=1}^{k} [A]^x_{a_i}$, *где* $a_1, \dots a_k$ *– свободные переменные секвенции* $\Sigma \to \exists xA$.

§2. Доказательства без функциональных знаков

Найдём оценки сокращения высоты доказательства в интуиционистском исчислении предикатов с помощью сечений по формулам различных типов. В качестве основного примера будет рассматриваться секвенция $\mathbf{S}_k$

$$\forall x \exists y \forall zuv (P(x,0,y) \,\&((P(z,x,u) \,\&\, P(u,x,v)) \supset P(z,y,v))) \to$$
$$\to \exists w w_k (\dots \exists w_0 (P(0,w_0,w) \,\&\, P(0,w_1,w_0)) \dots \&\, P(0,w_k,w_{k-1})),$$

где P – трёхместный предикат, 0 – константа.

Структуру секвенции $\mathbf{S}_k$ легче установить, если пользоваться обозначениями

$$\mathbf{B}_0(\alpha,\beta) \leftrightharpoons P(0,\beta,\alpha), \qquad \mathbf{B}_{i+1}(\alpha,\beta) \leftrightharpoons \exists w_i(\mathbf{B}_i(\alpha,w_i) \,\&\, P(0,\beta,w_i)),$$
$$\mathbf{H}(\alpha,\beta) \leftrightharpoons \forall zuv(P(\alpha,0,\beta) \,\&((P(z,\alpha,u) \,\&\, P(u,\alpha,v)) \supset P(z,\beta,v))),$$
$$\mathbf{C} \leftrightharpoons \forall x\exists y\mathbf{H}(x,y), \qquad \mathbf{S}_i \leftrightharpoons \mathbf{C} \to \exists w\mathbf{B}_i(w,0)).$$

Здесь и в дальнейшем знак $\leftrightharpoons$ обозначает *равенство по определению.*

Предикат P в дальнейшем будем интерпретировать как график функции $\zeta(n,m)$, определяемой на натуральных числах рекурсией:

$$\begin{cases} \zeta(n,0) = n+1, \\ \zeta(n,(m+1)) = \zeta(\zeta(n,m),m). \end{cases} \tag{2.1}$$

Очевидно, что $\zeta(n,m) = n + 2^m$. Следовательно,

$$\zeta(0,0) = \mathbf{2}^1_0, \zeta(0,\mathbf{2}^1_0) = \mathbf{2}^1_1, \ldots \zeta(0,\mathbf{2}^1_{k-1}) = \mathbf{2}^1_k.$$

Формула $\mathbf{C}$ является вариантом записи равенств из рекурсии (2.1). Доказуемость секвенции $\mathbf{S}_k$ в исчислении предикатов можно интерпретировать как успешное завершение вычисления $\mathbf{2}^1_k$ с помощью рекурсии (2.1).

2.1. Верхние оценки.

2.1.1. Построим доказательство секвенции $\mathbf{S}_k$ в исчислении $\mathbf{K}^+_1$ без сечений.

Лемма 2.1.1. *Для всех натуральных* $k > 0$

$$\mathbf{K}^+_1 \vdash^\circ_c \mathbf{S}_k,$$

где

$$c = 2 \cdot \mathbf{2}^1_k + 7 \cdot \mathbf{2}^1_{k-1} + 2k + 6.$$

Доказательство. Обозначим при $k > 0$ список формул

$$\mathbf{H}(0,a_1), \mathbf{H}(a_1,a_2), \ldots \mathbf{H}(a_i,a_{i+1}), \ldots \mathbf{H}(a_{\mathbf{2}^1_k-1}, a_{\mathbf{2}^1_k})$$

через $\Omega_{\mathbf{2}^1_k}$. Здесь $a_1, a_2, \ldots a_{\mathbf{2}^1_k}$ – попарно различные переменные. Будем также считать, что a_0 обозначает константу 0.

Каковы бы ни были натуральные i, j и l, если $i + 2^j = l \leqslant \mathbf{2}^1_k$, то

$$\mathbf{K}^+_1 \vdash^\circ_{7j+5} \Omega_{\mathbf{2}^1_k} \to P(a_i,a_j,a_l). \tag{2.2}$$

Необходимое для этого доказательство в исчислении $\mathbf{K}^+_1$ можно построить индукцией по j.

Из (2.2) вытекает, что

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash_5^\circ \Omega_{\mathbf{2}_k^1} \to P(a_0, a_0, a_1); \mathbf{K}_1^+ \vdash_{12}^\circ \Omega_{\mathbf{2}_k^1} \to P(a_0, a_1, a_2); \ldots$$
$$\mathbf{K}_1^+ \vdash_{7\cdot\mathbf{2}_{k-1}^1+5}^\circ \Omega_{\mathbf{2}_k^1} \to P(a_0, a_{\mathbf{2}_{k-1}^1}, a_{\mathbf{2}_k^1}).$$

Далее, применяя правила $\to \&$ и $\to \exists$, получим

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash_{7\cdot\mathbf{2}_{k-1}^1+2k+6}^\circ \Omega_{\mathbf{2}_k^1} \to \exists w \mathbf{B}_k(w, 0)).$$

Наконец, применяя последовательно правила $\exists \to$ и $\forall \to$, получим необходимое доказательство секвенции $\mathbf{S}_k$. □

2.1.2. Построим короткое доказательство секвенции $\mathbf{S}_k$ в исчислении $\mathbf{K}_1^+$. Мы будем пользоваться обозначениями

$$\mathbf{E}_0(\alpha) \leftrightharpoons \forall v_0 \exists u_0 P(v_0, \alpha, u_0),$$
$$\mathbf{E}_{i+1}(\alpha) \leftrightharpoons \forall v_{i+1}(\mathbf{E}_i(v_{i+1}) \supset \exists u_{i+1}(P(v_{i+1}, \alpha, u_{i+1}) \,\&\, \mathbf{E}_i(u_{i+1}))),$$
$$\mathbf{G}_i \leftrightharpoons \forall w_i(\mathbf{E}_i(w_i) \supset \exists w \mathbf{B}_i(w, w_i)).$$

Теорема 1. *Можно построить такое натуральное число c, что для всех натуральных k*

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash_{\log_2(k+1)+c} \mathbf{S}_k.$$

Доказательство. В исчислении $\mathbf{K}_1^+$ в главные формулы аксиом могут входить связки и кванторы. Построим, пользуясь этим обстоятельством, такое натуральное число c_0, что

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash_{c_0} \mathbf{C} \to \exists w \mathbf{B}_0(w, 0); \qquad \mathbf{K}_1^+ \vdash_{c_0} \mathbf{C} \to \mathbf{G}_0 \tag{2.3}$$

и для всех натуральных i

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash_{c_0} \mathbf{C}, \mathbf{G}_i \to \mathbf{G}_{i+1}; \qquad \mathbf{K}_1^+ \vdash_{c_0} \mathbf{G}_i \to \exists w \mathbf{B}_i(w, 0); \tag{2.4}$$
$$\mathbf{K}_1^+ \vdash_{c_0} \to \mathbf{E}_i(0). \tag{2.5}$$

Из (2.3) вытекает, что утверждение леммы верно при $k = 0$. Будем предполагать, что $k > 0$. Применив к последовательности

$$\mathbf{C} \to \mathbf{G}_0; \quad \mathbf{C}, \mathbf{G}_0 \to \mathbf{G}_1; \quad \ldots \quad \mathbf{C}, \mathbf{G}_k \to \exists w \mathbf{B}_k(w, 0).$$

лемму 1.1.2, получим доказательство секвенции $\mathbf{S}_k$ высота которого в силу (2.4) и (2.5) не превосходит $\log_2(k+1) + c_0 + 1$. □

В теореме 1 построено доказательство секвенции $\mathbf{S}_k$, в котором главные формулы аксиом могут содержать вхождения связок и кванторов. Если в доказательстве секвенции $\mathbf{S}_k$ главные формулы всех аксиом элементарны, то его высота превосходит $2k + 1$.

2.2. Вспомогательные леммы. Пусть $\mathbf{D}$ доказательство секвенции $\mathbf{S}_k$ в исчислении $\mathbf{K}_1^+$. Допустим, что в $\mathbf{D}$ нет сечений по формулам с существенно положительными вхождениями квантора $\exists$. Предположим также, что для любого применения L правила $\exists \to$ или $\to \forall$ собственная переменная L входит свободно только в секвенции, которые лежат в $\mathbf{D}$ выше L.

2.2.1. Определим *ранг* $\mathbf{r}[a]$ *свободной переменной* a *секвенции доказательства* $\mathbf{D}$ следующим образом.

Если переменная a не совпадает собственной переменной ни одного применения правила $\exists \to$, главное вхождение которого имеет образ в секвенции $\mathbf{S}_k$, то $\mathbf{r}[a] = 0$. Также положим $\mathbf{r}[0] = 0$.

Допустим, что a – собственная переменная применения L правила $\exists \to$, главное вхождение которого имеет образ в секвенции $\mathbf{S}_k$. Тогда боковая формула L имеет вид

$$\forall zuvw(P(b,0,a)\,\&((P(z,b,u)\,\&\,P(u,b,v)) \supset P(z,a,v))).$$

Предположим, что ранг $\mathbf{r}[b]$ уже определён. Тогда $\mathbf{r}[a] = 1 + \mathbf{r}[b]$.

Лемма 2.2.1. *Какова бы ни была свободная переменная a доказательства* $\mathbf{D}$,

$$2\mathbf{r}[a] \leqslant \mathbf{h}[\mathbf{D}] \tag{2.6}$$

Доказательство. Допустим, что переменная a входит свободно в секвенцию S^* доказательства $\mathbf{D}$. Тогда в $\mathbf{D}$ ниже S^* применяется, по крайней мере, $\mathbf{r}[a]$ раз правило $\exists \to$, главное вхождение которого имеет образ в секвенции $\mathbf{S}_k$ и, по крайней мере, $\mathbf{r}[a]$ раз правило $\forall \to$. Отсюда следует неравенство (2.6). □

2.2.2. Построим *модель* $\mathfrak{A}$ следующим образом.

1) Объекты $\mathfrak{A}$ – натуральные числа.
2) Значение константы 0 – число 0.
3) Трёхместный предикат P является истинным на тройке чисел l, m, n тогда и только тогда, когда $l + 2^m = n$.

Лемма 2.2.2. *На модели $\mathfrak{A}$ истинны формула* $\mathbf{C}$ *и при всех натуральных n формула* $\forall z \exists w \mathbf{B}_n(w,z)$.

Доказательство. Эта лемма доказывается индукцией по n. □

2.2.3. Определим *распределение π значений свободных переменных доказательства* $\mathbf{D}$ в модели $\mathfrak{A}$. В качестве значения свободной переменной a будем брать $\mathbf{r}[a]$.

Секвенцию S^* доказательства $\mathbf{D}$ будем называть *π-правильной* секвенцией в $\mathbf{D}$, если все формулы как в антецеденте, так и в сукцеденте секвенции S^* истинны в $\mathfrak{A}$ при распределении π; сукцедент секвенции S^* не пуст и формула в сукцеденте имеет образ в секвенции $\mathbf{S}_k$.

Предложение 2.1. *Какова бы ни была секвенция S^* из доказательства $\mathbf{D}$, если в $\mathbf{D}$ нет сечений по формулам с существенно положительными вхождениями квантора $\exists$ и S^* является π-правильной секвенцией в $\mathbf{D}$, то можно построить в доказательстве $\mathbf{D}$ ветвь U, начинающуюся в S^*, заканчивающуюся в аксиоме и содержащую только π-правильные в $\mathbf{D}$ секвенции.*

Доказательство. Пусть S^* – π-правильная секвенция в $\mathbf{D}$. Докажем лемму индукцией по высоте поддоказательства секвенции S^* в $\mathbf{D}$.

База индукции, когда S^* – аксиома, очевидна. Допустим, что S^* – заключение применения правила исчисления $\mathbf{K}_1^+$.

Если L – применение сукцедентного правила, то L является применением правила $\to\&$ или $\to\exists$ и антецедент каждой посылки L совпадает с антецедентом секвенции S^*. Следовательно, каждая посылка L – π-правильная секвенция.

Допустим, что L – применение антецедентного логического правила. Тогда главная формула L будет истинна на модели $\mathfrak{A}$ при распределении π.

Если L – применение правила $\& \to$ или $\forall \to$, боковая формула L истинна на модели $\mathfrak{A}$ при распределении π. Следовательно, посылка L – π-правильная секвенция.

Предположим, что L – применение правила $\exists \to$. Тогда по лемме 1.4.1 выполняется одно из условий:

- главное вхождение L имеет образ в секвенции $\mathbf{S}_k$,
- главная формула L входит существенно положительно в формулу сечения из доказательства $\mathbf{D}$.

В первом случае по лемме 2.2.2 боковая формула L истинна на модели $\mathfrak{A}$ при распределении π. Отсюда следует, что посылка L является π-правильной секвенцией. Второй случай противоречит предположению, что в $\mathbf{D}$ нет сечений по формулам с существенно положительными вхождениями квантора $\exists$.

Допустим, что L – применение правила $\neg \to$. Тогда все формулы в антецеденте посылки L истинны на модели $\mathfrak{A}$ при распределении π. Так как посылка L выводима в классическом исчислении, боковая формула L также будет истинна на модели $\mathfrak{A}$. Это противоречит истинности на модели $\mathfrak{A}$ главной формулы L. Следовательно, π-правильная секвенция в $\mathbf{D}$ не может быть заключением применения правила $\neg \to$.

Предположим, что L – применение правила $\vee \to$. В этом случае на модели $\mathfrak{A}$ истинны главная формула L и одна из боковых формул. Посылка L, боковая формула которой истинна, и будет необходимой π-правильной секвенцией.

Допустим, что L – применение правила $\supset\to$ или сечения. Тогда все формулы в антецеденте левой посылки L истинны на модели $\mathfrak{A}$. Так как эта посылка выводима в классическом исчислении, левая боковая формула L также будет истинна на модели $\mathfrak{A}$. Если L – применение сечения, левая боковая формула совпадет с правой боковой формулой. Если L – применение правила $\supset\to$, левая боковая формула L также будет истинна на модели $\mathfrak{A}$, так как на модели $\mathfrak{A}$ истинна главная формула L. Следовательно, в каждом из этих случаев правая посылка будет необходимой π-правильной секвенцией. $\square$

2.3. Нижние оценки.

2.3.1. Докажем для секвенции $\mathbf{S}_k$ нижнюю оценку высот её доказательств с сечениями по любым формулам.

Лемма 2.3.1. *Для любого натурального числа $k > 0$ секвенции $\mathbf{S}_k$ q-минимальна.*

Доказательство. Предположим, что R – одноместный предикат и переменная b не входит в секвенцию $\mathbf{S}_k$ ни свободно, ни связанно. Пусть B – неэлементарная подформула секвенции $\mathbf{S}_k$ и S^* – результат замены в $\mathbf{S}_k$ всех вхождений подформул, q-тип которых совпадает с q-типом формулы B, на подформулу $R(b)$.

Допустим, что B входит в $\mathbf{S}_k$ положительно. Тогда S^* опровержима на модели, в которой предикат R тождественно ложен, а предикат P тождественно истинен.

Допустим, что B входит в $\mathbf{S}_k$ отрицательно. Тогда S^* опровержима на модели, в которой предикат R тождественно истинен, а предикат P тождественно ложен, или (при $k > 0$) S^* опровержима на следующей *модели* $\mathfrak{A}_0$.

1) Объекты $\mathfrak{A}_0$ – натуральные числа.
2) Значение константы 0 – число 0.
3) Предикат R тождественно истинен.
4) Предикат P является истинным на тройке чисел s, m, n тогда и только тогда, когда $m = 0$ и $n = s + 1$.

Следовательно, при $k > 0$ секвенция $\mathbf{S}_k$ q-минимальна. □

Лемма 2.3.2. *Для любого натурального числа $k > 0$ и любого доказательства D секвенции $\mathbf{S}_k$*

$$\log_2(k+4) + 1 \leqslant \mathbf{h}[D]. \tag{2.7}$$

Доказательство. По лемме 2.3.1 секвенция $\mathbf{S}_k$ q-минимальна при $k>0$. Отсюда и из леммы 1.3.4 вытекает неравенство (2.7). □

2.3.2. Докажем для секвенции $\mathbf{S}_k$ нижнюю оценку высот её доказательств, в которых нет сечений по формулам с существенно положительными вхождениями квантора $\exists$.

Теорема 2. *Каково бы ни было натуральное k, если $\mathbf{K}_1^+ \vdash_h^* \to \mathbf{S}_k$, то*

$$h \geqslant 2 \cdot \mathbf{2}_k^1. \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть D – доказательство секвенции $\mathbf{S}_k$, в котором нет сечений по формулам с существенно положительными вхождениями квантора $\exists$. Секвенция $\mathbf{S}_k$ является π-правильной секвенцией в D. Применив к $\mathbf{S}_k$ лемму 2.1, построим в доказательстве D максимально длинную ветвь U, начинающуюся в $\mathbf{S}_k$, заканчивающуюся на аксиоме и содержащую только π-правильные секвенции.

Из леммы 1.4.1 следует, что в сукцедент аксиомы в ветви U содержит элементарную формулу $P(0, b_1, b_0)$, где

$$\mathbf{r}[b_0] = 2^{\mathbf{r}[b_1]}.$$

По лемме 2.2.1 отсюда получаем, что при $k = 0$ выполняется (2.8).

Допустим, что $k > 0$. Тогда в ветви U для любого $i (1 \leqslant i < k)$ применяется правило $\to \&$ с главной формулой

$$(\mathbf{B}_{i-1}(b_0, b_i) \mathbin{\&} P(0, b_{i+1}, b_i)),$$

где

$$\mathbf{r}[b_i] = 2^{\mathbf{r}[b_{i+1}]}.$$

Наконец, в ветви U применяется правило $\to \&$ с главной формулой

$$(\mathbf{B}_{k-1}(b_0, b_k) \mathbin{\&} P(0, 0, b_k)),$$

где $\mathbf{r}[b_k] = 1$. Следовательно, $\mathbf{r}[b_0] = \mathbf{2}^1_k$. Отсюда по лемме 2.2.1 получаем, что при всех k выполняется (2.8). $\square$

§3. Оценки сложности собственных термов применений кванторных правил

Будем рассматривать только секвенции, в которые могут входить константы и одноместная функция f. В дальнейшем выражение $f^k(t)$ будет обозначать *терм* t (при $k = 0$) и терм $f(f^i(t))$ (при $k = i + 1$).

В качестве меры сложности термов будем использовать высоту терма. *Высота* $h[t]$ *терма* t определяется индукцией по построению терма t:

1) если t является переменной или константой, то $h[t] = 0$;
2) в противном случае

$$h[g(t_1, ..., t_n)] = 1 + \max_{i=1}^{n} h[t_i].$$

Вхождение V терма θ в секвенцию или формулу B будем называть *максимальным,* если V не происходит от вхождения в B терма, высота которого больше $h[\theta]$. Терм θ называется *связанным в доказательстве* D, если терм θ входит в какую-нибудь секвенцию доказательства D и содержит связанную переменную этой секвенции.

3.1. Структура элементарных подформул. Пусть D – доказательство секвенции S в исчислении $\mathbf{K}_1^+$. Будем предполагать, что в секвенции доказательства D могут входить трёхместный предикат P, константа 0, одноместная функция f и не входят другие предикаты и функции. Также будем предполагать, что связанные переменные доказательства D не входят свободно в секвенции доказательства D.

3.1.1. Список всех собственных термов применений в D кванторных правил $\to \exists$ или $\forall \to$ зададим списком

$$t_1, t_2, \dots t_N. \tag{3.1}$$

Из леммы 1.1.1 следует, что $N \leqslant 2^{\mathbf{h}[D]} - 1$.

Зададим списком

$$\theta_1, \theta_2, \dots \theta_M \tag{3.2}$$

список всех термов θ, которые удовлетворяют, по крайней мере, одному из условий:

- терм θ имеет максимальное вхождение в S,

- терм θ содержит связанную переменную и имеет максимальное вхождение в боковую формулу какого-нибудь сечения.

Список всех термов, которые содержат константу или свободную переменную и которые имеют максимальное вхождение в боковую формулу какого-нибудь сечения, зададим списком

$$\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_T. \tag{3.3}$$

Зададим также три списка попарно различных переменных

$$x_1, x_2, \ldots x_N; \tag{3.4}$$

$$y_1, y_2, \ldots y_M, \tag{3.5}$$

$$z_1, z_2, \ldots z_T. \tag{3.6}$$

Будем предполагать, что эти списки не имеют общих переменных и все переменные этих списков не входят в секвенции доказательства D ни свободно, ни связанно.

3.1.2. Пусть V – максимальное вхождение в какую-нибудь секвенцию доказательства D терма $f^s(\alpha)$, где α – переменная или константа, и вхождение V имеет образ W в секвенции S или в посылке сечения и W принадлежит боковому вхождению этого сечения.

Предположим, что вхождение W является максимальным вхождением связанного терма θ_j из списка (3.2).

Допустим, что α является связанной переменной доказательства D. Тогда $\theta_j = f^s(\alpha)$. Выражение $f^{y_j}(\alpha)$ будем называть *схемой вхождения* V и переменную y_j – *q-высотой вхождения* V.

Допустим, что в терм θ_j входит связанная переменная u доказательства D и α является константой или свободной переменной. Вхождение V принадлежит вхождению V^* элементной подформулы и вхождение W принадлежит образу вхождения V^*. Следовательно, переменная u является π-параметром вхождения V^*.

Если квантор, содержащий u, вводится применением правил $\to \exists$ или $\forall \to$, значением π-параметра u является t_i из списка (3.1) и

$$f^s(\alpha) = f^{h[\theta_j]}(t_i)).$$

В этом случае *схемой вхождения* V будем называть выражение

$$f^{y_j}(f^{x_i}(\alpha))$$

и *q-высотой вхождения* V будем называть $x_i + y_j$.

Если квантор, содержащий u, вводится применением правил $\exists \to$ или $\to \forall$, значением π-параметра z является переменная a и

$$f^s(\alpha) = f^{h[\theta_j]}(a)).$$

В этом случае выражение $f^{y_j}(a)$ будем называть *схемой вхождения* V и переменную y_j будем называть *q-высотой вхождения* V.

Предположим, что α является константой или свободной переменной и W принадлежит боковому вхождению применения сечения. Тогда вхождение W является максимальным вхождением терма η_p из списка (3.6) и $\eta_p = f^s(\alpha)$. Выражение $f^{z_p}(\alpha)$ будем называть *схемой вхождения* V и переменную z_p будем называть *q-высотой вхождения* V.

Через $\nu[V]$ будем обозначать q-высоту вхождения V.

Заменим в доказательстве D все максимальные вхождения термов на схемы вхождений. Полученную фигуру обозначим через $\gamma[D]$.

3.1.3. Пусть S^* – аксиома доказательства D и V – вхождение элементарной формулы $P(u_1, u_2, u_3,)$ в главную формулу этой аксиомы. Вхождение V порождает максимальные вхождения U_1^1, U_2^1, U_3^1 термов u_1, u_2, u_3 в S, которые принадлежат антецедентному главному вхождению аксиомы и порождает максимальные вхождения U_1^2, U_2^2, U_3^2 термов u_1, u_2, u_3 в S, которые принадлежат сукцедентному главному вхождению аксиомы.

Для каждой аксиомы S^* и любого вхождения V какой-нибудь элементарной формулы в главную формулу аксиомы S^* зададим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \nu[U_1^1] = \nu[U_1^2], \\ \nu[U_2^1] = \nu[U_2^2], \\ \nu[U_3^1] = \nu[U_3^2]. \end{cases}$$

Объединим все такие системы в одну систему. Затем добавим к этой системе все равенства

$$y_j = h[\theta_j],$$

где $1 \leqslant j \leqslant M$ и терм θ_j имеет максимальное вхождение в S. Полученную таким образом систему обозначим через $\mathfrak{S}_0[D]$.

Неизвестными системы $\mathfrak{S}_0[D]$ будут все переменные из (3.4), (3.5) и (3.6). Левыми и правыми частями равенств в $\mathfrak{S}_0[D]$ могут быть натуральные числа, переменные списка (3.5), переменные списка (3.6) и суммы переменной из (3.5) с переменной из (3.4).

Лемма 3.1.1. *Натуральным решением системы $\mathfrak{S}_0[D]$ является распределение натуральных значений неизвестных этой системы, в котором значением каждой переменной x_i списка* (3.4) *будет высота терма t_i, значением каждой переменной y_j списка* (3.5) *– высота терма θ_j. и значением каждой переменной z_p списка* (3.6) *– высота терма η_p.*

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по $\mathbf{h}[D]$. □

3.1.4. Пусть ν – распределение натуральных значений неизвестных системы $\mathfrak{S}_0[D]$. Заменив в фигуре $\gamma[D]$ все переменные списков (3.4), (3.5) и (3.6) на их значения в ν, получим фигуру $\gamma[D]_\nu$.

Лемма 3.1.2. *Каково бы ни было натуральное решение ν системы* $\mathfrak{S}_0[D]$, *выполняются следующие условия:*

1) *фигура $\gamma[D]_\nu$ является доказательством секвенции S,*
2) *схема доказательства $\gamma[D]_\nu$ совпадает со схемой доказательства D,*
3) *максимальная высота собственных термов применений в $\gamma[D]_\nu$ кванторных правил равна максимальному значению в ν переменных списка (3.4),*
4) *максимальная высота связанных термов в доказательстве $\gamma[D]_\nu$ не превосходит максимального значения в ν переменных списка (3.5).*

Доказательство. Лемма доказывается индукцией $\mathbf{h}[D]$. □

3.1.5. Построим замыкание равенств системы $\mathfrak{S}_0[D]$ по транзитивности и симметричности. Далее из этого замыкания удалим все равенства, которые не содержат переменных или в которые входят переменные списка (3.6). В итоге этих преобразований получим систему уравнений $\mathfrak{S}[D]$. Неизвестными системы $\mathfrak{S}[D]$ будут все переменные списков (3.4) и (3.5).

Лемма 3.1.3. *Любое натуральное решение τ системы $\mathfrak{S}[D]$ можно расширить до натурального решения τ^* системы $\mathfrak{S}_0[D]$.*

Доказательство. Значения переменных y_j списков (3.4) и (3.5) уже определены в τ. Определим значение z_p из списка (3.6).

Предположим, что в замыкании системы $\mathfrak{S}_0[D]$ переменная z_p входит в уравнение

$$z_p = \xi, \tag{3.7}$$

где ξ не содержит переменных из списка (3.6). В этом случае значение ξ уже определено и является натуральным числом. В качестве значения z_p возьмём это значение ξ.

Такое задание значения z_p не зависит от выбора уравнения (3.7). Действительно, если z_p входит в другое уравнение $z_p = \zeta$ типа (3.7), то замыкание системы $\mathfrak{S}_0[D]$ содержит равенство $\xi = \zeta$ и, следовательно, значения ξ и ζ равны.

Если z_p не входит ни в одно уравнение типа (3.7), то в качестве значения z_p возьмём 0. $\square$

3.1.6. Подставим в равенствах системы $\mathfrak{S}[D]$ вместо каждой переменной y_j списка (3.5) высоту терма θ_j. В итоге этих преобразований получим систему уравнений $\mathfrak{R}[D]$. Неизвестными системы $\mathfrak{R}[D]$ будут все переменные списка (3.4).

Натуральным решением системы $\mathfrak{R}[D]$ является распределение натуральных значений переменных списка (3.4), в котором значением переменной x_i является высота терма t_i.

Лемма 3.1.4. *По любому натуральному решению τ системы $\mathfrak{R}[D]$ можно построить такое доказательство D^* секвенции S, что выполняются следующие условия:*

1) *схема доказательства D^* совпадает со схемой доказательства D,*
2) *максимальная высота собственных термов применений в D^* кванторных правил равна максимальному значению в τ переменных списка (3.4),*
3) *максимальная высота связанных термов в доказательстве D^* не превосходит максимальной высоты связанных термов в доказательстве D.*

Доказательство. Решение τ можно расширить до натурального решения τ^* системы $\mathfrak{S}[D]$. По лемме 3.1.3 решения τ^* можно расширить до натурального решения τ^* системы $\mathfrak{S}_0[D]$. Осталось применить лемму 3.1.2. $\square$

3.2. Оценка высот собственных термов в доказательствах с ограничением на высоту связанных термов. Рассмотрим систему уравнений $\mathfrak{R}$

$$\begin{cases} x_{i_1} + a_1 = x_{j_1}, \\ \qquad \dots \\ x_{i_n} + a_n = x_{j_n}. \end{cases}$$

Здесь $x_1, \dots x_m$ – переменные; $1 \leqslant i_1, j_1, \dots i_n, j_n \leqslant m$; $a_1, \dots a_n$ – целые числа.

3.2.1. Последовательность

$$x_{l_1}, b_1, x_{l_2}, b_2, \dots x_{l_{k+1}}, \tag{3.8}$$

где $b_1, \dots b_k$ – целые числа и $1 \leqslant l_1, \dots l_{k+1} \leqslant m$, будем называть *$A$-маршрутом, соединяющим переменную x_{l_1} с переменной $x_{l_{k+1}}$*, если для любого p $(1 \leqslant p \leqslant k)$ системе $\mathfrak{R}$ принадлежит одно из равенств

$$x_{l_p} + b_p = x_{l_{p+1}} \quad \text{или} \quad x_{l_{p+1}} - b_p = x_{l_p}.$$

Число $k+1$ будем называть *длиной A-маршрута.* В дальнейшем длину A-маршрута Σ будем обозначать посредством $\mathbf{l}[\Sigma]$.

Допустим, что (3.8) является A-маршрутом, соединяющим переменную x_{l_1} с переменной $x_{l_{k+1}}$. Очевидно, что последовательность

$$x_{l_{k+1}}, -b_k, x_{l_k}, -b_{k-1}, \dots - b_1, x_{l_1}$$

является A-маршрутом, соединяющим переменную $x_{l_{k+1}}$ с x_{l_1}.

Если последовательность

$$x_{l_{k+1}}, b_{k+1}, x_{l_{k+2}}, b_{k+2}, \dots b_{k+s}, x_{l_{k+s+1}}$$

является A-маршрутом, соединяющим переменную $x_{l_{k+1}}$ с переменной $x_{l_{k+s+1}}$, то последовательность

$$x_{l_1}, b_1, x_{l_2}, b_2, \dots x_{l_{k+1}}, b_{k+1}, x_{l_{k+2}}, b_{k+2}, \dots b_{k+s}, x_{l_{k+s+1}}$$

является A-маршрутом, соединяющим переменную x_{l_1} с переменной $x_{l_{k+s+1}}$.

Очевидно, что для любой переменной x_{l_1} можно построить A-маршрут, соединяющий x_{l_1} с x_{l_1}.

Весом A-маршрута Σ будем называть сумму $\sum\limits_{p=1}^{\mathbf{l}[\Sigma]-1} b_p$ и вес A-маршрута Σ будем обозначать посредством $\kappa[\Sigma]$.

Лемма 3.2.1. *Каковы бы ни были целочисленное решение η системы $\mathfrak{R}$ и A-маршрут Σ, соединяющий x_{l_1} с $x_{l_{k+1}}$,*

$$\eta[x_{l_{k+1}}] = \eta[x_{l_1}] + \kappa[\Sigma].$$

Доказательство. Эта лемма доказывается индукцией по $\mathbf{l}[\Sigma]$. □

Система $\mathfrak{R}$ тогда и только тогда имеет решение, когда равен нулю вес любого A-маршрута, соединяющего совпадающие переменные.

3.2.2. Пусть Ψ – подмножество переменных $x_1, \ldots x_m$ системы $\mathfrak{R}$, ν – распределение натуральных значений переменных из Ψ. Допишем к системе $\mathfrak{R}$ для каждой переменной x_i из Ψ равенство $x_i = \nu[x_i]$. Полученную таким образом систему уравнений обозначим посредством $\mathfrak{R}[\nu]$.

Если ξ – распределение натуральных значений $x_1, \ldots x_m$, *ограничение ξ на переменные из Ψ* будем обозначать через $\eta|_\Psi$.

Лемма 3.2.2. *Каковы бы ни были натуральное решение ξ системы $\mathfrak{R}$ и подмножество Ψ переменных $x_1, \ldots x_m$ системы $\mathfrak{R}$, можно построить такое натуральное решение ξ^* системы $\mathfrak{R}[\xi|_\Psi]$, что для всех p $(0 \leqslant p \leqslant m)$ выполняются следующие условия:*

1) $0 \leqslant \xi^*[x_p] \leqslant \xi[x_p]$,
2) *x_p можно соединить A-маршрутом с переменной из Ψ или с переменной, значение которой в ξ^* равно нулю.*

Доказательство. Эту лемму докажем индукцией по числу переменных $x_1, \ldots x_m$, значения которых в ξ не равны нулю. База индукции очевидна.

Предположим, что переменную y системы $\mathfrak{R}$ нельзя соединить A-маршрутом с переменной из Ψ или с какой-нибудь переменной, значение которой в ξ равно нулю.

Пусть Φ – множество всех переменных системы $\mathfrak{R}$, которые можно соединить A-маршрутом с y. Определим распределение ξ_1 значений переменных системы $\mathfrak{R}$ следующими равенствами:

$$\xi_1[x] = \begin{cases} \min(\xi[\Phi]), & \text{если } x \text{ принадлежит } \Phi, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Распределение ξ_1 является натуральным решением однородной системы, соответствующей системе $\mathfrak{R}$. Следовательно, $\xi - \xi_1$ – натуральное решение системы $\mathfrak{R}[\xi|_\Psi]$, для которого выполняется предположение индукции. □

3.2.3. Пусть ξ – натуральное решение системы $\mathfrak{R}$ и Ψ – подмножество переменных $x_1, \dots x_m$ системы $\mathfrak{R}$.

Лемма 3.2.3. *Можно построить такое натуральное решение ξ^* системы $\mathfrak{R}[\xi|_\Psi]$, что для всех p $(0 \leqslant p \leqslant m)$*

$$\xi^*[x_p] \leqslant \max(\xi[\Psi]) + (m-1)\max(|a_1|, \dots |a_n|). \tag{3.9}$$

Доказательство. Построим согласно лемме 3.2.2 по решению ξ такое решение ξ^* системы $\mathfrak{R}[\xi|_\Psi]$, что для всех p $(0 \leqslant p \leqslant m)$ переменную x_p можно соединить A-маршрутом с переменной из Ψ или с переменной, значение которой в ξ^* равно нулю.

Пусть y – одна из переменных $x_1, \dots x_m$. Если $\xi^*(y) \leqslant \max(\xi[\Psi])$, выполняется неравенство (3.9).

Допустим, что $\xi^*(y) > \max(\xi[\Psi])$ и A-маршрут Σ соединяет переменную x, которая принадлежит Ψ или значение которой в ξ равно нулю, с переменной y. Тогда переменные x и y различны. Удалив из Σ лишние отрезки, получим A-маршрут Σ^*, который соединяет те же переменные и в котором нет повторений переменных $x_1, \dots x_m$. Так как длина Σ^* не превосходит m и

$$|\kappa[\Sigma^*]| \leqslant (m-1)\max(|a_1|, \dots |a_n|),$$

из леммы 3.2.1 следует, что выполняется неравенство (3.9). □

3.2.4. Пусть D – доказательство секвенции S в исчислении $\mathbf{K}_1^+$. Предположим, что максимальная высота термов в секвенции S не превосходят h_0 и максимальная высота связанных термов в доказательстве D не превосходят h_1.

Предложение 3.1. *Доказательство D можно перестроить в такое доказательство D^* секвенции S, что выполняются следующие условия:*

1) *схема доказательства D^* совпадает со схемой D,*
2) *максимальная высота связанных термов в D^* не превосходит h_1,*
3) *максимальная высота собственных термов применений в D^* кванторных правил не превосходит $h_1 2^{\mathbf{h}[D]} + h_0 - 2h_1$.*

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений $\mathfrak{R}[D]$. Уравнения в $\mathfrak{R}[D]$ могут быть только двух типов:

A: $x_{i_1} + b_1 = x_{i_2} + b_2$, где b_1 и b_2 – высоты связанных термов и $|b_1 - b_2| \leqslant h_1$;

Б: $x_{i_3}+b_3 = c$, где b_3 – высота связанного терма, c – высота терма из секвенции S и $b_3 \leqslant c \leqslant h_0$.

Заменим в $\mathfrak{R}[D]$ каждое уравнение типа **А** на $x_{i_1}+b_1-b_2 = x_{i_2}$ и каждое уравнение типа **Б** на $x_{i_3} = c-b_3$. В результате получим эквивалентную $\mathfrak{R}[D]$ систему уравнений $\mathfrak{R}_0[D]$, которая является частным случаем системы $\mathfrak{R}$ из подсекции 3.2.

Натуральным решением как системы $\mathfrak{R}_0[D]$, так и системы $\mathfrak{R}[D]$ является распределение ξ натуральных значений переменных списка (3.4), в котором значением каждой переменной x_i будет высота терма t_i.

Пусть Ψ – множество всех таких переменных x_i, что уравнение $x_i = c$, где $c \leqslant h_0$, содержится в системе $\mathfrak{R}_0[D]$. Решение ξ по лемме 3.2.3 преобразуем в решение ξ^* системы $\mathfrak{R}[D]$, по которому с помощью леммы 3.1.4 получим требуемое доказательство D^*. $\square$

Предложение 3.1 вместе с его доказательством переносится на случай классического исчисления предикатов.

Оценки высот собственных термов в доказательствах секвенций, в которые входят функциональные знаки произвольной арности, приведены в [9, §15], [4] и [5].

3.3. Системы линейных уравнений с произвольным числом неизвестных в уравнениях. Пусть A – рациональная матрица. *Максимум абсолютных величин определителей квадратных подматриц* A будем обозначать через $\mathrm{st}(A)$, а через $\|\max(A)\|$ – максимум *евклидовых норм строк матрицы* A.

Пусть Θ – множество номеров столбцов матрицы A. *Дополнение множества* Θ до множества всех номеров матрицы A будем обозначать через $\overline{\Theta}$, а результат вычёркивания из матрицы A всех столбцов, номера которых принадлежат $\overline{\Theta}$, – через $A|_\Theta$.

Пусть C – столбец рациональных чисел. Множество номеров ненулевых элементов C будем обозначать через $\Omega(C)$, мощность множества $\Omega(C)$ будем обозначать через $\rho(C)$, а наибольшую абсолютную величину элементов C – через $|\max(C)|$.

Произведение $(n \times m)$-матрицы A на $(m \times k)$-матрицу B будем обозначать через $A \times B$. Результат дописывания справа к $(n \times m)$-матрице A всех столбцов $(n \times k)$-матрицы B – через $[AB]$.

Лемма 3.3.1. *Каковы бы ни были рациональная* $(n \times m)$*-матрица* A*, столбец* C m *рациональных чисел и множество* Θ *номеров столбцов матрицы* A*, если* $0 < |\max(C)|$*, то выполняются условия:*

1) *если множество* Θ *не пусто,*

$$st(A|_\Theta) \leqslant \|\max(A)\|^r \quad \text{и} \quad st([A|_\Theta C]) \leqslant |\max(C)|(\|\max(A)\| + 1)^r,$$

где r *– мощность множества* Θ*;*

2) *если столбцы, номера которых принадлежат* $\overline{\Theta}$*, составлены из* $0, 1$ *и* -1 *и в каждом столбце только один элемент отличен от нуля, выполняются следующие условия:*
   (a) *если множество* Θ *пусто,*

$$st(A) \leqslant 1 \quad \text{и} \quad st([AC]) \leqslant |\max(C)|,$$

   (b) *если множество* Θ *не пусто,*

$$st(A) \leqslant \|\max(A|_\Theta)\|^r \quad \text{и} \quad st([AC][) \leqslant |\max(C)|(\|\max(A|_\Theta)\| + 1)^r,$$

где r *– мощность множества* Θ.

Доказательство. Эта лемма доказывается с помощью основных свойств определителей матриц и неравенства Адамара. □

3.3.1. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$A \times X + B \times Y = C \tag{3.10}$$

и соответствующую однородную систему

$$A \times X + B \times Y = 0. \tag{3.11}$$

Здесь A – целочисленная $(n \times m)$-матрица; C – столбец целых чисел; X и Y – столбцы неизвестных; B – $(n \times k)$-матрица, которая составлена из $0, 1$ и -1 и в каждом столбце которой только один элемент отличен от нуля. Будем также предполагать, что столбец C и каждый столбец матрицы $[AB]$ содержат ненулевой элемент. Решения систем 3.10 и 3.11 будем представлять в виде двух столбцов: столбца значений X и столбца значений Y.

Лемма 3.3.2. *По любому нетривиальному рациональному решению* U, V *системы* (3.11) *можно построить такое нетривиальное целочисленное решение* U^0, V^0 *этой же системы, что*

$$\Omega(U^0) \subseteq \Omega(U) \qquad \text{и} \qquad \Omega(V^0) \subseteq \Omega(V), \tag{3.12}$$

$$|\max(U^0)| \leqslant \|\max(A)\|^{\rho(U^0)-1}; \quad |\max(V^0)| \leqslant \|\max(A)\|^{\rho(U^0)}. \tag{3.13}$$

Доказательство. Эта лемма следует из леммы 3.3.1 и неравенства Адамара. □

Лемма 3.3.3. *По любому рациональному решению U, V системы* (3.10) *можно построить такое рациональное решение U^1, V^1 этой же системы, что*

$$\Omega(U^1) \subseteq \Omega(U) \qquad \text{и} \qquad \Omega(V^1) \subseteq \Omega(V),$$

$$|\max(U^1)| \leqslant st(A|_{\Omega(U^1)}C) \leqslant |\max(C)|(\|\max(A)\| + 1)^{\rho(U^1)}.$$

Доказательство. Эта лемма следует из леммы 3.3.1 и формул Крамера. □

3.3.2. Пусть U – столбец рациональных чисел, содержащий m элементов. Для всякого i, где $1 \leqslant i \leqslant m$, элемент U с номером i будем обозначать через U_i.

Выражение $U \leqslant U^*$, где U^* – также столбец m рациональных чисел, будет означать, что при всех i $(1 \leqslant i \leqslant m)$

$$U_i \leqslant U_i^*.$$

Лемма 3.3.4. *Каково бы ни было неотрицательное рациональное решение U, V системы* (3.10), *если для некоторого i* $(1 \leqslant i \leqslant m)$

$$U_i > |\max(C)|(\|\max(A)\| + 1)^{\rho(U)} + \rho(V)\|\max(A)\|^{\rho(U)}, \tag{3.14}$$

то можно построить такое натуральное решение U^0, V^0 системы (3.11), *что*

$$0 < U_i^0 < U_i, \quad U^0 \leqslant U, \quad V^0 \leqslant V. \tag{3.15}$$

и выполняются неравенства (3.13).

Доказательство. Эту лемму докажем индукцией по $\rho(U) + \rho(V)$.

Допустим, что неравенство (3.14) выполняется для неотрицательного рационального решения U, V системы (3.10). Построим по леммам 3.3.2 и 3.3.3 такое целочисленное решение U^0, V^0 системы (3.11), что выполняются условия (3.12) и неравенства (3.13).

Рассмотрим три случая.

- **А:** $U_i^0 > 0$ и все элементы столбцов U^0 и V^0 являются неотрицательными числами,
- **Б:** $U_i^0 \geqslant 0$ и один из элементов столбцов U^0 или V^0 является отрицательным числом,

В: $U_i^0 = 0$ и все элементы столбцов U^0 и V^0 являются неотрицательными числами.

Случай А. Допустим, что выполняются неравенства (3.15). Тогда решение U^0, V^0 является требуемым решением системы (3.11).

Предположим, что не выполняется, по крайней мере, одно из неравенств (3.15). Построим рациональное число α, которое удовлетворяет условиям:

1) $0 < \alpha < 1$,
2) пара столбцов $U - \alpha U^0$ и $V - \alpha V^0$ является неотрицательным рациональным решением системы (3.10),
3) $\Omega(U - \alpha U^0) \subseteq \Omega(U) \quad$ и $\quad \Omega(V - \alpha V^0) \subseteq \Omega(V)$,
4) $\rho(U - \alpha U^0) + \rho(V - \alpha V^0) < \rho(U) + \rho(V)$.

Из неравенств (3.13) и (3.14) следует, что

$$U_i - \alpha U_i^0 >$$

$$> |\max(C)|(\|\max(A)\| + 1)^{\rho(U)} + \rho(V)\|\max(A)\|^{\rho(U)} - \|\max(A)\|^{\rho(U^0)}$$

$$> |\max(C)|(\|\max(A)\| + 1)^{\rho(U-\alpha U^0)} + \rho(V - \alpha V^0)\|\max(A)\|^{\rho(U-\alpha U^0)}.$$

Применив к решению $U - \alpha U^0, V - \alpha V^0$ предположение индукции, получим требуемое натуральное решение системы (3.11).

Случай Б. Построим положительное рациональное число β, которое удовлетворяет условиям:

1) пара столбцов $U + \beta U^0$ и $V + \beta V^0$ является неотрицательным рациональным решением системы (3.10),
2) $\Omega(U + \beta U^0) \subseteq \Omega(U) \quad$ и $\quad \Omega(V + \beta V^0) \subseteq \Omega(V)$,
3) $\rho(U + \beta U^0) + \rho(V + \beta V^0) < \rho(U) + \rho(V)$.

Из неравенств (3.13) и (3.14) следует, что

$$U_i + \beta U_i^0 > |\max(C)|(\|\max(A)\| + 1)^{\rho(U)} + \rho(V)\|\max(A)\|^{\rho(U)} >$$

$$> |\max(C)|(\|\max(A)\| + 1)^{\rho(U+\beta U^0)} + \rho(V + \beta V^0)\|\max(A)\|^{\rho(U+\beta U^0)}.$$

Применив к решению $U + \beta U^0, V + \beta V^0$ предположение индукции, получим натуральное решение U^1, V^1 системы (3.11), которое удовлетворяет условиям (3.12) и неравенствам (3.13). Таким образом случай **Б** сводится к случаю **А**.

Случай В. Так как пара столбцов U^0, V^0 является нетривиальным решением системы (3.11), случай **Б** выполняется для решения $-U^0, -V^0$ системы (3.11). $\square$

Лемма 3.3.5. *Каково бы ни было натуральное решение U, V системы* (3.10)*, существует натуральное решение U^*, V^* этой же системы, что*

$$\Omega(U^*) \subseteq \Omega(U) \qquad и \quad \Omega(V^*) \subseteq \Omega(V),$$

$$|\max(U^*)| \leqslant |\max(C)|(\|\max(A)\| + 1)^{\rho(U^*)} + \rho(V^*)\|\max(A)\|^{\rho(U^*)}.$$

Доказательство. Лемма доказывается с помощью леммы 3.3.4 индукцией по сумме $\sum\limits_{j=1}^{m} U_j$ и $\sum\limits_{j=1}^{k} V_j$. □

3.4. Оценка высот собственных термов в доказательствах без ограничений на высоты связанных термов. Рассмотрим систему уравнений $\mathfrak{S}$

$$\begin{cases} y_{i_1} + t_1 = y_{j_1}, \\ \qquad \dots \\ y_{i_N} + t_N = y_{j_N}. \end{cases}$$

Здесь $y_1, \dots y_m$ – неизвестные; $1 \leqslant i_1, j_1, \dots i_N, j_N \leqslant m$; $t_1, \dots t_N$ – однородные линейные многочлены с целочисленными коэффициентами от неизвестных $x_1, \dots x_n$ или нули.

3.4.1. Последовательность

$$y_{l_1}, u_1, y_{l_2}, u_2, \dots, y_{l_{s+1}}, \tag{3.16}$$

где $u_1, \dots u_s$ – однородные линейные многочлены от неизвестных $x_1, \dots, x_n$ или нули и $1 \leqslant l_1, \dots, l_{s+1} \leqslant m$, будем называть *$B$-маршрутом, соединяющим переменную y_{l_1} с переменной $y_{l_{s+1}}$*, если для любого p $(1 \leqslant p \leqslant s)$ системе $\mathfrak{S}$ принадлежит одно из равенств

$$y_{l_p} + u_p = y_{l_{p+1}} \quad \text{или} \quad y_{l_{p+1}} - u_p = y_{l_p}.$$

Число $s + 1$ будем называть *длиной B-маршрута.* В дальнейшем длину B-маршрута Σ будем обозначать посредством $\mathbf{l}[\Sigma]$.

Допустим, что (3.16) является B-маршрутом, соединяющим переменную x_{l_1} с переменной $x_{l_{s+1}}$. Очевидно, что последовательность

$$y_{l_{s+1}}, -u_s, y_{l_s}, -u_{s-1}, \dots, -u_1, y_{l_1}$$

является B-маршрутом, соединяющим переменную $y_{l_{s+1}}$ с переменной y_{l_1}. Если последовательность

$$y_{l_{s+1}}, u_{s+1}, y_{l_{s+2}}, u_{s+2}, \dots, u_{s+q}, y_{l_{s+q+1}}$$

является B-маршрутом, соединяющим переменную $y_{l_{s+1}}$ с переменной $y_{l_{s+q+1}}$, то последовательность

$$y_{l_1}, u_1, y_{l_2}, u_2, \ldots y_{l_{s+1}}, u_{s+1}, y_{l_{s+2}}, u_{s+2}, \ldots u_{s+q}, y_{l_{s+q+1}}$$

является B-маршрутом, соединяющим переменную y_{l_1} с переменной $y_{l_{s+q+1}}$.

Очевидно, что для любой переменной y_{l_1} можно построить B-маршрут, соединяющий y_{l_1} с y_{l_1}.

Если B-маршрут Σ соединяет переменную y_{l_1} с переменной $y_{l_{s+1}}$ и переменные y_{l_1} и $y_{l_{s+1}}$ различны, то, удалив из Σ лишние отрезки, получим B-маршрут, который соединяет те же переменные и в котором нет повторений переменных $y_1, \ldots y_m$.

Весом B-маршрута Σ будем называть сумму $\sum\limits_{p=1}^{\mathbf{l}[\Sigma]-1} u_p$ и обозначим вес B-маршрута Σ посредством $\kappa[\Sigma]$.

Пусть Σ – B-маршрут Σ, соединяющий y_{l_1} с $y_{l_{k+1}}$; η – распределение значений неизвестных $y_1, \ldots y_m$, а τ – неизвестных $x_1, \ldots x_n$. Предположим, что объединение распределений η и τ является целочисленным решением системы $\mathfrak{S}$.

Лемма 3.4.1. $\eta[y_{l_{k+1}}] = \eta[y_{l_1}] + \tau[\kappa[\Sigma]]$.

Доказательство. Эта лемма доказывается индукцией по $\mathbf{l}[\Sigma]$. □

3.4.2. Пусть Ψ – подмножество неизвестных $y_1, \ldots y_m$ системы $\mathfrak{S}$, ν – распределение натуральных значений неизвестных из Ψ. Допишем к системе $\mathfrak{S}$ для каждого неизвестного y_{l_1} из Ψ равенство $y_{l_1} = \nu[y_{l_1}]$. Полученную таким образом систему уравнений обозначим посредством $\mathfrak{S}[\nu]$.

Лемма 3.4.2. *Каковы бы ни были подмножество Ψ неизвестных $y_1, \ldots y_m$ системы $\mathfrak{S}$, распределение η значений тех же неизвестных и распределение τ значений неизвестных $x_1, \ldots x_n$ той же системы, если объединение распределений η и τ является натуральным решением системы $\mathfrak{S}$, то можно построить такое натуральное решение η^*, τ системы $\mathfrak{S}[\eta|_\Psi]$, что для всех p $(0 \leqslant p \leqslant m)$ $\eta^*[y_p] \leqslant \eta[y_p]$ и неизвестное y_p можно соединить B-маршрутом с неизвестным из Ψ или с неизвестным, значение которого в η^* равно нулю.*

Доказательство. Эту лемму докажем индукцией по числу неизвестных $y_1, \ldots y_m$, значения которых в η не равны нулю. База индукции очевидна.

Предположим, что переменную y_p системы $\mathfrak{S}$ нельзя соединить B-маршрутом с переменной из Ψ или с какой-нибудь переменной, значение которой в η равно нулю.

Пусть Φ – множество всех переменных системы $\mathfrak{S}$, которые можно соединить B-маршрутом с y_p. Определим распределение η_1 значений переменных $y_1, \ldots y_m$ системы $\mathfrak{S}$ следующими равенствами:

$$\eta_1[y] = \begin{cases} \min(\eta[\Phi]) & \text{если } y \text{ принадлежит } \Phi, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим посредством τ_0 распределение значений неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ системы $\mathfrak{S}$, тождественно равное 0. Объединение распределения η_1 и распределения τ_0 является натуральным решением однородной системы, соответствующей системе $\mathfrak{S}$, Следовательно, объединение распределений $\eta - \eta_1$ и τ является натуральным решением системы $\mathfrak{S}[\xi|_\Psi]$, для которого выполняется предположение индукции. □

3.4.3. Пусть ζ – распределение натуральных значений неизвестных $x_1, \ldots x_n$ системы $\mathfrak{S}$.

Лемма 3.4.3. *Если для любого B-маршрута Σ, у которого $\mathbf{l}[\Sigma] \leqslant m+1$ и который соединяет одинаковые переменные, $\zeta[\kappa[\Sigma]] = 0$, то по каждому B-маршруту Γ можно построить такой B-маршрут Γ^*, что*

$$\mathbf{l}[\Gamma^*] \leqslant m+1, \qquad \zeta[\kappa[\Gamma]] = \zeta[\kappa[\Gamma^*]]$$

и Γ^* соединяет те же переменные.

Доказательство. Эта лемма доказывается индукцией по $\mathbf{l}[\Gamma]$. Если $\mathbf{l}[\Gamma] \leqslant m+1$, то в качестве Γ^* можно взять B-маршрут Γ.

Предположим, что B-маршрут Γ соединяет переменную y_p с переменной y_q и $\mathbf{l}[\Gamma] > m+1$. Тогда в Γ повторяются неизвестные $y_1, \ldots y_m$.

Допустим, что Γ имеет вид Γ_1, y_p, Γ_2, где $1 \leqslant \mathbf{l}[\Gamma_1, y_p] \leqslant m+1$ и Γ_1, y_p соединяет y_p с y_p, а y_p, Γ_2 соединяет y_p с y_q. Тогда

$$1 \leqslant \mathbf{l}[y_p, \Gamma_2] < \mathbf{l}[\Gamma], \qquad \zeta[\kappa[\Gamma_1, y_p]] = 0,$$
$$\zeta[\kappa[\Gamma]] = \zeta[\kappa[\Gamma_1, y_p]] + \zeta[\kappa[y_p, \Gamma_2]] = \zeta[\kappa[y_p, \Gamma_2]].$$

Допустим, что Γ имеет вид Σ_1, y_q, Σ_2, где $1 \leqslant \mathbf{l}[y_q, \Sigma_2] \leqslant m+1$ и Σ_1, y_q соединяет y_p с y_q, а y_q, Σ_2 соединяет y_q с y_q. Тогда

$$1 \leqslant \mathbf{l}[\Sigma_1, y_q] < \mathbf{l}[\Gamma], \qquad \zeta[\kappa[y_q, \Sigma_2]] = 0,$$
$$\zeta[\kappa[\Gamma]] = \zeta[\kappa[\Sigma_1, y_q]] + \zeta[\kappa[y_q, \Sigma_2]] = \zeta[\kappa[\Sigma_1, y_q]].$$

К B-маршруту Σ_1, y_q применимо предположение индукции.

Допустим, что Γ имеет вид $\Pi_1, y_r, \Pi_2, y_r, \Pi_3$, где $1 \leqslant \mathbf{l}[y_r, \Pi_2, y_r] \leqslant m+1$, B-маршрут Π_1, y_r соединяет y_p с y_r, B-маршрут y_r, Π_2, y_r, соединяет y_r с y_r, а y_r, Π_3 соединяет y_r с y_q. Тогда

$$1 \leqslant \mathbf{l}[\Pi_1, y_r, \Pi_3] < \mathbf{l}[\Gamma], \qquad \zeta[\kappa[y_r, \Pi_2, y_r]] = 0,$$
$$\zeta[\kappa[\Gamma]] = \zeta[\kappa[\Pi_1, y_r]] + \zeta[\kappa[y_r, \Pi_2, y_r]] + \zeta[\kappa[y_r, \Pi_3]] = \zeta[\kappa[\Pi_1, y_r, \Pi_3]].$$

Следовательно, к B-маршруту Π_1, y_r, Π_3 применимо предположение индукции. $\square$

3.4.4. Пусть Ψ – подмножество неизвестных $y_1, \dots y_m$ системы $\mathfrak{S}$ и для всех p $(0 \leqslant p \leqslant m)$ y_p принадлежит Ψ или y_p можно соединить B-маршрутом с неизвестным из Ψ. Каждому неизвестному w из списка $y_1, \dots y_m$, не принадлежащему Ψ, поставим в соответствие неизвестное $\gamma[w]$ из Ψ и B-маршрут $\delta[w]$, который соединяет w с $\gamma[w]$ и длина которого не превосходит $m+1$.

Рассмотрим систему уравнений $\mathfrak{S}^\nabla[\nu]$, где ν – распределение натуральных значений неизвестных из Ψ. Уравнениями системы $\mathfrak{S}^\nabla[\nu]$ являются все равенства:

1) $\kappa[\Sigma] = 0$, где B-маршрут Σ соединяет одинаковые переменные и $\mathbf{l}[\Sigma] \leqslant m+1$;
2) $\kappa[\Pi] = \nu[y_q] - \nu[y_p]$, где y_p и y_q – различные переменные из Ψ, B-маршрут Π соединяет y_p с y_q и $\mathbf{l}[\Pi] \leqslant m+1$;
3) $\kappa[\delta[w]] - w = -\nu[\gamma[w]]$, где неизвестное w не принадлежит Ψ;
4) $w = \nu[\gamma[w]]$, где неизвестное w принадлежит Ψ.

Если объединение распределений η и τ является целочисленным решением системы $\mathfrak{S}$, то в силу леммы 3.4.1 η и τ – решение системы $\mathfrak{S}^\nabla[\eta|_\Psi]$.

Лемма 3.4.4. *Если объединение распределений η и τ является целочисленным решением системы $\mathfrak{S}^\nabla[\eta|_\Psi]$, то η и τ – решение системы $\mathfrak{S}[\eta|_\Psi]$.*

Доказательство. Предположим, что система $\mathfrak{S}$ содержит уравнение

$$y_{l_p} + u_p = y_{l_{p+1}}.$$

Тогда B-маршрут

$$y_{l_p}, u_p, y_{l_{p+1}} \tag{3.17}$$

соединяет y_{l_p} с $y_{l_{p+1}}$. Докажем, что

$$\eta[y_{l_p}] + \tau[u_p] = \eta[y_{l_{p+1}}]. \tag{3.18}$$

Допустим, что y_{l_p} и $y_{l_{p+1}}$ принадлежат Ψ. Тогда в систему $\mathfrak{S}^\nabla[\eta|_\Psi]$ входит уравнение $u_p = 0$ или уравнение $u_p = \eta[y_{l_{p+1}}] - \eta[y_{l_p}]$. Так как η, τ – решение системы $\mathfrak{S}^\nabla[\eta|_\Psi]$, в каждом из этих случаев верно равенство (3.18).

Допустим, что $y_{l_p} \notin \Psi$ и $y_{l_{p+1}} \notin \Psi$. Тогда в систему $\mathfrak{S}^\nabla[\eta|_\Psi]$ входят уравнения

$$\kappa[\delta[y_{l_p}]] - y_{l_p} = -\eta[\gamma[y_{l_p}]] \qquad \text{и} \qquad \kappa[\delta[y_{l_{p+1}}]] - y_{l_{p+1}} = -\eta[\gamma[y_{l_{p+1}}]].$$

Следовательно, верны равенства

$$\eta[\gamma[y_{l_p}]] + \tau[\kappa[\delta[y_{l_p}]]] = \eta[y_{l_p}] \tag{3.19}$$

$$\eta[\gamma[y_{l_{p+1}}]] + \tau[\kappa[\delta[y_{l_{p+1}}]]] = \eta[y_{l_{p+1}}]. \tag{3.20}$$

Объединим B-маршруты $\delta[y_{l_p}]$, (3.17) и $\delta[y_{l_{p+1}}]$ в B-маршрут Σ, соединяющий $\gamma[y_{l_p}]$ с $\gamma[y_{l_{p+1}}]$ и такой, что

$$\kappa[\Sigma] = \kappa[\delta[y_{l_p}]] + u_p - \kappa[\delta[y_{l_{p+1}}]].$$

По лемме 3.4.3 перестроим B-маршрут Σ в B-маршрут Σ^*, также соединяющий $\gamma[y_{l_p}]$ с $\gamma[y_{l_{p+1}}]$ и такой, что

$$\mathbf{l}[\Sigma^*] \leqslant m + 1, \qquad \tau[\kappa[\Sigma]] = \tau[\kappa[\Sigma^*]].$$

В систему $\mathfrak{S}^\nabla[\eta|_\Psi]$ входят уравнения

$$\kappa[\Sigma^*] = 0 \qquad \text{или} \qquad \kappa[\Sigma^*] = \eta[\gamma[y_{l_{p+1}}]] - \eta[\gamma[y_{l_p}]].$$

Следовательно,

$$\tau[\kappa[\delta[y_{l_p}]]] + \tau[u_p] - \tau[\kappa[\delta[y_{l_{p+1}}]]] = \eta[\gamma[y_{l_{p+1}}]] - \eta[\gamma[y_{l_p}]].$$

Отсюда и из равенств (3.19) и (3.20) вытекает равенство (3.18).

Аналогично доказываются случаи, когда $y_{l_p} \in \Psi$ и $y_{l_{p+1}} \notin \Psi$ и когда $y_{l_p} \notin \Psi$ и $y_{l_{p+1}} \in \Psi$. $\square$

3.4.5. Пусть u – однородный линейный многочлен с целочисленными коэффициентами от неизвестных $x_1, \dots x_n$ системы $\mathfrak{S}$. Через $\|u\|$ будем обозначать евклидову норму строки коэффициентов линейного многочлена u.

Предложение 3.2. *Каковы бы ни были подмножество Ψ неизвестных $y_1, \dots y_m$ системы $\mathfrak{S}$ и распределение ν натуральных значений неизвестных из Ψ, если существует натуральное решение системы $\mathfrak{S}[\nu]$, то можно построить такое натуральное решение η, τ системы $\mathfrak{S}[\nu]$, что для всех p $(0 \leqslant p \leqslant n)$*

$$\tau[x_p] < (m + d)(mr + r + 1)^n, \tag{3.21}$$

где $d = \max(\nu[\Psi])$ и $r = \max(\|t_1\|, \dots \|t_N\|)$.

Доказательство. Допустим, что ξ, ζ – натуральное решение системы $\mathfrak{S}[\nu]$. Построим по лемме 3.4.2 такое натуральное решение ξ^*, ζ системы $\mathfrak{S}[\nu]$, что каждое неизвестное y_p можно соединить B-маршрутом с неизвестным из Ψ или с неизвестным, значение которого в ξ^* равно нулю.

Ясно, что ξ^*, ζ – решение системы $\mathfrak{S}^\nabla[\xi^*|_{\Psi^*}]$, где Ψ^* – объединение Ψ с множеством всех неизвестных, значения которых в ξ равны нулю. Система $\mathfrak{S}^\nabla[\xi^*|_{\Psi^*}]$ является системой линейных уравнений вида (3.10). При этом максимум евклидовых норм строк матрицы A системы $\mathfrak{S}^\nabla[\xi^*|_{\Psi^*}]$ не превосходит $(m+1)r$. Применив к решению ξ^*, ζ лемму 3.3.5, получим такое натуральное решение η, τ системы $\mathfrak{S}^\nabla[\xi^*|_{\Psi^*}]$, что для всех p $(0 \leqslant p \leqslant n)$

$$\tau[x_p] \leqslant d(mr + r + 1)^n + m(mr + r)^n.$$

Из этого неравенства следует неравенство (3.21). Осталось заметить, что по лемме 3.4.4 решение η, τ является также решением системы $\mathfrak{S}[\nu]$. □

3.4.6. Пусть D – доказательство секвенции S в исчислении $\mathbf{K}_1^+$;

n – число различных собственных термов применений в D кванторных правил $\to \exists$ или $\forall \to$;

m_1 – число различных термов, имеющих максимальное вхождение в S;

m_2 – число различных термов, которые содержат связанную переменную и имеют максимальное вхождение в боковую формулу какого-нибудь сечения;

d – максимальная высота термов, входящих в S.

Напомним, что мы рассматриваем только секвенции, в которые могут входить константа 0 и одноместная функция f.

Предложение 3.3. *Доказательство D можно перестроить в такое доказательство D^* секвенции S, что выполняются следующие условия:*

1) *схема доказательства D^* совпадает со схемой D,*
2) *максимальная высота собственных термов применений в D^* кванторных правил $\to \exists$ или $\forall \to$ не превосходит*

$$(m_1 + m_2 + d)(2m_1 + 2m_2 + 3)^n.$$

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений $\mathfrak{S}[D]$. Неизвестными системы $\mathfrak{S}[D]$ являются все переменные списка

$$x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_m,$$

где $m \leqslant m_1 + m_2$.

Уравнения в $\mathfrak{S}[D]$ могут быть только пяти типов:

А: $y_{j_1} + x_{i_1} = y_{j_2} + x_{i_2}$,
Б: $y_{j_3} + x_{i_3} = y_{j_4}$,
В: $y_{j_5} = y_{j_6}$,
Г: $y_{j_7} = c_1$, где $c_1 \leqslant d$,
Д: $y_{j_8} + x_{i_4} = c_2$, где $c_2 \leqslant d$.

Каждое уравнение $y_{j_8} + x_{i_4} = c_2$, типа **Д** является следствием уравнений типа **Г** и типа **Б**. В самом деле, система $\mathfrak{S}_0[D]$ содержит уравнение $y_{j_7} = c_2$ и, так как система $\mathfrak{S}[D]$ получена как замыкание равенств системы $\mathfrak{S}_0[D]$ по транзитивности и симметричности, в $\mathfrak{S}[D]$ содержится уравнение $y_{j_8} + x_{i_4} = y_{j_7}$.

Удалим из $\mathfrak{S}[D]$ все уравнения типа **Д**, а затем заменим каждое уравнение типа **А** на $y_{j_1} + x_{i_1} - x_{i_2} = y_{j_2}$ и каждое уравнение типа **В** на $y_{j_5} + 0 = y_{j_6}$. В результате получим эквивалентную $\mathfrak{S}[D]$ систему уравнений $\mathfrak{S}_1[D]$. Из леммы 3.1.1 вытекает, что что система $\mathfrak{S}_1[D]$ имеет натуральное решение.

Удалив из $\mathfrak{S}_1[D]$ все уравнения типа **Г**, получим систему $\mathfrak{S}^*$, которая является частным случаем системы $\mathfrak{S}$ из подсекции 3.4. В системе $\mathfrak{S}^*$ евклидова норма однородных линейных многочленов неизвестных $x_1, \ldots x_n$ не превосходит 2.

Пусть Ψ – множество всех таких переменных y_j из списка

$$y_1, y_2, \ldots y_m,$$

что уравнение $y_j = c_1$ содержится в системе $\mathfrak{S}_0[D]$; ν – распределение натуральных значений неизвестных из Ψ, в котором значением переменной y_j является правый член уравнения $y_j = c_1$. Очевидно, что $\mathfrak{S}_1[D]$ совпадает с системой $\mathfrak{S}^*[\nu]$ из подподсекции 3.4.2.

Осталось применить предложение 3.2 и леммы 3.1.2 и 3.1.3. $\square$

§4. Доказательства с функциональными знаками

4.1. Основной пример. Пусть P – трёхместный предикат, 0 – константа и f – одноместная функция. В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями

$$\mathbf{C}_0^* \leftrightharpoons \forall x P(x, 0, f(x)),$$
$$\mathbf{C}_1^* \leftrightharpoons \forall yzuv((P(y,z,u)\,\&\,P(u,z,v)) \supset P(y, f(z), v)),$$
$$\mathbf{C}^* \leftrightharpoons (\mathbf{C}_0^*\,\&\,\mathbf{C}_1^*), \qquad \mathbf{A}_i(\alpha) \leftrightharpoons (\mathbf{C}^* \supset \mathbf{B}_i(\alpha, 0)).$$

Для секвенции $\to \exists w \mathbf{A}_k(w)$ будут найдены верхние и нижние оценки сложности различных вариантов доказательств в исчислении $\mathbf{K}_1^+$.

Терм $f^{(\mathbf{2}_n^1)}(0)$ будем обозначать посредством ϑ_n.

Лемма 4.1.1. *Для всех натуральных* $k > 0$

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash^\circ_{6\cdot \mathbf{2}^1_{k-1}+2k+4} \to \exists w \mathbf{A}_k(w).$$

Доказательство. Для любых натуральных чисел i и j

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash^\circ_{6j+1} \mathbf{C}_0^*, \mathbf{C}_1^* \to P(f^i(0), f^j(0), f^{2^j}(f^i(0))). \tag{4.1}$$

Необходимое для этого доказательство в исчислении $\mathbf{K}_1^+$ можно построить индукцией по j, применяя правило $\supset\to$ только в тех случаях, когда правая посылка является аксиомой.

Из (4.1) вытекает, что

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash^\circ_1 \mathbf{C}_0^*, \mathbf{C}_1^* \to P(0,0,f(0)); \mathbf{K}_1^+ \vdash^\circ_7 \mathbf{C}_0^*, \mathbf{C}_1^* \to P(0, f(0), f(f(0))); \ldots$$
$$\mathbf{K}_1^+ \vdash^\circ_{6\cdot \mathbf{2}^1_{k-1}+1} \mathbf{C}_0^*, \mathbf{C}_1^* \to P(0, \vartheta_{k-1}, \vartheta_k).$$

Далее, применяя правила $\to \&$ и $\to \exists$, получим

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash^\circ_{6\cdot \mathbf{2}^1_{k-1}+2k+1} \mathbf{C}_0^*, \mathbf{C}_1^* \to \mathbf{B}_k(\vartheta_k, 0)).$$

Наконец, применив правила $\to\supset, \& \to$ и $\to \exists$ получим необходимое доказательство секвенции $\to \exists w \mathbf{A}_k(w)$. $\square$

4.1.1. Пусть Π – список предметных переменных. Построим *модель* $\mathfrak{A}_\Pi$ следующим образом.

1) Объекты $\mathfrak{A}_\Pi$ – все термы, построенные из константы 0 и переменных списка Π с помощью одноместной функции f.
2) Значением функции f на объекте t является терм $f(t)$.
3) Трёхместный предикат P является истинным на тройке объектов t_1, t_2, t_3 тогда и только тогда, когда терм t_2 имеет вид $f^k(0)$ и терм t_3 имеет вид $f^{2^k}(t_1)$.

Лемма 4.1.2. *На модели $\mathfrak{A}_\Pi$ истинны формула $\mathbf{C}^*$ и при всех натуральных n и m формула $\exists z \mathbf{B}_n(z, f^m(0))$.*

Доказательство. Эта лемма доказывается индукцией по n. $\square$

Лемма 4.1.3. *Формула $\mathbf{B}_n(t, 0)$. истинна на модели $\mathfrak{A}_\Pi$ тогда и только тогда, когда терм t совпадает с термом ϑ_n.*

Доказательство. Эта лемма доказывается индукцией по n. $\square$

4.2. Доказательства с произвольными сечениями.

4.2.1. Построим короткое доказательство секвенции $\to \exists w \mathbf{A}_k(w)$ в исчислении $\mathbf{K}_1^+$. Мы будем пользоваться обозначениями

$$\mathbf{E}_0^*(\alpha) \leftrightharpoons \forall v_0 \exists u_0 (\mathbf{C}^* \supset P(v_0, \alpha, u_0)),$$
$$\mathbf{G}_i^* \leftrightharpoons \forall w_i (\mathbf{E}_i^*(w_i) \supset \exists w (\mathbf{C}^* \supset \mathbf{B}_i(w, w_i)).$$

Также обозначим через $\mathbf{E}_i^*(\alpha)$ формулу

$$\forall v_{i+1} (\mathbf{E}_i^*(v_{i+1}) \supset \exists u_{i+1} ((\mathbf{C}^* \supset P(v_{i+1}, \alpha, u_{i+1})) \,\&\, \mathbf{E}_i^*(u_{i+1}))).$$

Теорема 3. *Можно построить такое натуральное число c что для всех натуральных k*

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash_{\log_2(k+1)+c} \to \exists w \mathbf{A}_k(w).$$

Доказательство. В исчислении $\mathbf{K}_1^+$ в главные формулы аксиом могут входить связки и кванторы. Построим, пользуясь этим обстоятельством, такое натуральное число c_0, что

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash_{c_0} \to \exists w \mathbf{A}_0(w); \qquad \mathbf{K}_1^+ \vdash_{c_0} \to \mathbf{G}_0^* \tag{4.2}$$

и для всех натуральных i

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash_{c_0} \mathbf{G}_i^* \to \mathbf{G}_{i+1}^*; \qquad \mathbf{K}_1^+ \vdash_{c_0} \mathbf{G}_i^* \to \exists w \mathbf{A}_i(w); \tag{4.3}$$

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash_{c_0} \to \mathbf{E}_i^*(0). \tag{4.4}$$

Из (4.2) вытекает, что утверждение леммы верно при $k = 0$. Будем предполагать, что $k > 0$. Применив к последовательности

$$\to \mathbf{G}_0^*; \quad \mathbf{G}_0^* \to \mathbf{G}_1^*; \dots \quad \mathbf{G}_i^* \to \mathbf{G}_{i+1}^*; \dots \quad \mathbf{G}_k^* \to \exists w \mathbf{A}_k(w).$$

лемму 1.1.2, получим доказательство секвенции $\to \exists w \mathbf{A}_k(w)$ высота которого в силу (4.3) и (4.4) не превосходит $\log_2(k+1) + c_0 + 1$. □

4.2.2. В доказательстве секвенции $\to \exists w \mathbf{A}_k(w)$, которое построено в теореме 3, главные формулы аксиом могут содержать вхождения связок и кванторов. Высоты термов в этом доказательстве не превосходят 2.

Если в доказательстве секвенции $\to \exists w \mathbf{A}_k(w)$ главные формулы всех аксиом элементарны, то его высота превосходит $2k + 2$.

Лемма 4.2.1. *Для любого натурального числа $k > 0$ секвенция $\to \exists w \mathbf{A}_k(w)$ q-минимальна.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 2.3.1. □

Лемма 4.2.2. *Каково бы ни было натуральное число $k > 0$, для любого доказательства D секвенции $\to \exists w \mathbf{A}_k(w)$*

$$\log_2(k+5) + 1 \leqslant \mathbf{h}[D].$$

Доказательство. Эта лемма следует из лемм 1.3.4 и 4.2.1. □

4.3. Доказательства с сечениями без существенно положительных вхождений квантора ∃.

4.3.1. Пусть D – доказательство секвенции $\to \exists w \mathbf{A}_k(w)$ в исчислении $\mathbf{K}_1^+$, Π – список всех предметных переменных, которые входят свободно в секвенции доказательства D.

Лемма 4.3.1. *Если в доказательстве D не применяются сечения по формулам с существенно положительными вхождениями квантора $\exists$, то можно указать в D заключительное применение правила $\to \exists$, собственным термом которого является терм ϑ_k.*

Доказательство. Построим согласно предложению 1.2 такие собственные термы $t_1, \dots t_n$ заключительных применений правила $\to \exists$ в D, что формула $\bigvee\limits_{i=1}^{k} \mathbf{A}_k(t_i)$ выводима в интуиционистском исчислении предикатов и, следовательно, истинна на модели $\mathfrak{A}_\Pi$. Так как в силу леммы 4.1.2 формула C^* также истинна на этой модели, будет истинна и формула $\bigvee\limits_{i=1}^{k} \mathbf{B}_k(t_i, 0)$. Отсюда по лемме 4.1.3 получаем, что один из термов $t_1, \dots t_n$ совпадает с термом ϑ_k. $\square$

4.3.2. Пусть $\Sigma \to \Delta$ – сингулярная секвенция. Выражение

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash_h^j \Sigma \to \Delta$$

будет означать, что в исчислении $\mathbf{K}_1^+$ существует доказательство секвенции $\Sigma \to \Delta$, высота которого не превосходит h, в котором нет сечений по формулам с существенно положительными вхождениями квантора $\exists$ и в котором высота связанных термов не превосходит j.

Лемма 4.3.2. *Можно построить такое натуральное число c, что для всех термов t и любого натурального числа j*

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash_{\log_2 (j+1)+c}^{2^j} \mathbf{C}^* \to P(t, f^j(0), f^{2^j}(t)).$$

Доказательство. Формулу

$$\forall v P(v, f^j(0), f^{2^j}(v))$$

обозначим через $\mathbf{O}_j$. Построим такое натуральное число c_0, что

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash_{c_0}^{1} \mathbf{C}^* \to \mathbf{O}_0$$

и для всех натуральных $i < j$

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash_{c_0}^{2^{i+1}} \mathbf{C}^*, \mathbf{O}_i \to \mathbf{O}_{i+1}.$$

Применив к последовательности секвенций

$$\mathbf{C}^* \to \mathbf{O}_0; \mathbf{C}^*, \mathbf{O}_0 \to \mathbf{O}_1; \dots; \mathbf{C}^*, \mathbf{O}_i \to \mathbf{O}_{i+1}; \dots; \mathbf{C}^*, \mathbf{O}_{j-1} \to \mathbf{O}_j$$

лемму 1.1.2, получим

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash_{\log_2 (j+1)+c_0+1}^{2^j} \mathbf{C}^* \to \mathbf{O}_j. \tag{4.5}$$

Очевидно,что для всех термов t и любого натурального j

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash_1^{2^j} \mathbf{C}^*, \mathbf{O}_j \to P(t, f^j(0), f^{2^j}(t)). \tag{4.6}$$

Применив к (4.5) и (4.6) сечение получим требуемое в лемме доказательство. $\square$

4.3.3. Построим в исчислении $\mathbf{K}_1^+$. короткое доказательство секвенции $\to \exists w_k \mathbf{A}_k(w_k)$, в котором не применяются сечения по формулам с существенно положительными вхождениями квантора $\exists$.

Предложение 4.1. *Можно построить такое натуральное число c, что для любых натуральных чисел $k > 0$ и $j \leqslant \mathbf{2}_{k-1}^1$*

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash^{2^j}_{2(\mathbf{2}^1_{k-1}-j)+\log_2(j+1)+2k+c} \to \exists w \mathbf{A}_k(w).$$

Доказательство. Построим, пользуясь леммой 4.3.2, такое число c_0, что для всех термов t и любого натурального числа $i \leqslant j$

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash^1_{c_0} \mathbf{C}^*, (P(t, f^i(0), f^{2^i}(t)) \,\&\, P(f^{2^i}(t), f^i(0), f^{2^{i+1}}(t))) \to \\ \to P(t, f^{i+1}(0), f^{2^{i+1}}(t)) \quad (4.7)$$

и

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash^{2^i}_{\log_2(i+1)+c_0} \mathbf{C}^* \to P(t, f^i(0), f^{2^i}(t)). \quad (4.8)$$

Из (4.8) вытекает, что

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash^1_{c_0} \mathbf{C}^* \to P(0, 0, \vartheta_0)$$

и для любого натурального числа n, удовлетворяющего неравенству $\mathbf{2}^1_n \leqslant j$,

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash^{2^j}_{\log_2(j+1)+c_0} \mathbf{C}^* \to P(0, \vartheta_n, \vartheta_{n+1}). \quad (4.9)$$

Предположим, что $j < \mathbf{2}^1_{k-1}$. Применив $\to \&$ к секвенциям

$$\mathbf{C}^* \to P(t, f^j(0), f^{2^j}(t)) \quad \text{и} \quad \mathbf{C}^* \to P(f^{2^j}(t), f^j(0), f^{2^{j+1}}(t))$$

из (4.8), получим секвенцию

$$\mathbf{C}^* \to (P(t, f^j(0), f^{2^j}(t)) \,\&\, P(f^{2^j}(t), f^j(0), f^{2^{j+1}}(t))).$$

Далее, применив сечение к этой секвенции и к подходящей секвенции из (4.7), получим

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash^{2^j}_{\log_2(j+1)+c_0+2} \mathbf{C}^* \to P(t, f^{j+1}(0), f^{2^{j+1}}(t)).$$

Этот процесс применения сечений закончим, когда получим для всех натуральных m, удовлетворяющих неравенству $j < \mathbf{2}^1_m \leqslant \mathbf{2}^1_{k-1}$,

$$\mathbf{K}_1^+ \vdash^{2^j}_{2(m-j)+\log_2(j+1)+c_0} \mathbf{C}^* \to P(0, \vartheta_m, \vartheta_{m+1}). \quad (4.10)$$

Наконец, последовательно применяя правила $\to \&$ и $\to \exists$ к секвенциям из (4.9) и (4.10), а затем – правила $\to\supset, \& \to$ и $\to \exists$ получим необходимое доказательство секвенции $\to \exists w \mathbf{A}_k(w)$. □

4.3.4. Оценим снизу высоту доказательств секвенции $\to \exists w \mathbf{A}_k(w)$ с ограничениями на высоту связанных термов

Теорема 4. *Каковы бы ни были натуральные* $k \geqslant 1$ *и* $q \geqslant 1$, *если* $\mathbf{K}_1^+ \vdash_h^q \to \exists w \mathbf{A}_k(w)$, *то*

$$h \geqslant \mathbf{2}_{k-1}^1 - \log_2 q. \tag{4.11}$$

Доказательство. Предположим, что D – доказательство секвенции $\to \exists w \mathbf{A}_k(w)$, в котором не применяются сечения по формулам с существенно положительными вхождениями квантора $\exists$, и высоты связанных термов в доказательстве D не превосходят q.

Перестроим D по предложению 3.1 в такое доказательство D^* той же секвенции, что выполняются следующие условия:

1) $\mathbf{h}[D] = \mathbf{h}[D^*]$,
2) в D^* нет сечений по формулам с существенно положительными вхождениями квантора $\exists$,
3) высоты собственных термов применений в D^* кванторных правил не превосходят $q \cdot 2^{\mathbf{h}[D]}$.

Согласно лемме 4.3.1 в D^* можно указать применение $\to \exists$, собственным термом которого является терм ϑ_k. Следовательно,

$$\mathbf{2}_k^1 \leqslant q \cdot 2^{\mathbf{h}[D]}.$$

Отсюда вытекает неравенство (4.11). □

4.3.5. Оценим снизу высоту доказательств секвенции $\to \exists w \mathbf{A}_k(w)$ с сечениями без существенно положительных вхождений $\exists$.

Теорема 5. *Каково бы ни было* $k \geqslant 2$, *если* $\mathbf{K}_1^+ \vdash_h^* \to \exists w \mathbf{A}_k(w)$, *то*

$$h > \frac{1}{2} \cdot \mathbf{2}_{k-2}^1 - 1. \tag{4.12}$$

Доказательство. Предположим, что D – доказательство секвенции $\to \exists w \mathbf{A}_k(w)$, в котором не применяются сечения по формулам с существенно положительными вхождениями квантора $\exists$.

По лемме 4.2.1 секвенция $\to \exists w \mathbf{A}_k(w)$ q-минимальна. Перестроим D с помощью предложения 1.1 с сохранением схемы доказательства в q-минимальное доказательство D^* той же секвенции.

Из леммы 1.3.3 следует, что для любой подформулы A доказательства D^* число вхождений элементарных подформул в A меньше $\mathbf{2}_2^{\mathbf{h}[D]}$.

Перестроим по предложению 3.3 с сохранением схемы доказательство D^* в такое доказательство D^+ той же секвенции, что максимальная высота собственных термов применений в D^+ кванторных правил $\to \exists$ или $\forall \to$ меньше

$$2^n(m_1 + m_2 + 2)^{n+1}. \tag{4.13}$$

где n – число различных собственных термов применений в D^* кванторных правил $\to \exists$ или $\forall \to$;

m_1 – число различных термов, имеющих максимальное вхождение в $\to \exists w \mathbf{A}_k(w)$;

m_2 – число различных термов, которые содержат связанную переменную и имеют максимальное вхождение в боковую формулу какого-нибудь сечения в D^+.

Согласно лемме 1.1.1

$$n \leqslant 2^{\mathbf{h}[D]} - 1. \tag{4.14}$$

Из леммы 4.2.2 вытекает, что при $k > 0$

$$m_1 + 2 = k + 10 \leqslant 2^{\mathbf{h}[D]-1} + 5 < 3 \cdot \mathbf{2}_2^{\mathbf{h}[D]} \tag{4.15}$$

По лемме 1.1.1 число применений сечений в D^+ не превосходит $2^{\mathbf{h}[D]} - 1$. Следовательно,

$$m_2 < 3 \cdot \mathbf{2}_2^{\mathbf{h}[D]} \cdot (2^{\mathbf{h}[D]} - 1) < \mathbf{2}_2^{\mathbf{h}[D]+1} - 3 \cdot \mathbf{2}_2^{\mathbf{h}[D]}. \tag{4.16}$$

Из 4.15 и 4.16 следует

$$m_1 + m_2 + 2 < \mathbf{2}_2^{\mathbf{h}[D]+1}. \tag{4.17}$$

Подставив в 4.13 вместо n и $m_1 + m_2 + 2$ их оценки из 4.14 и 4.17, получим, что максимальная высота собственных термов применений в D^+ кванторных правил $\to \exists$ или $\forall \to$ меньше $\mathbf{2}_2^{2\mathbf{h}[D]+2}$.

Согласно лемме 4.3.1 в D^+ можно указать применение $\to \exists$, собственным термом которого является терм ϑ_k. Следовательно,

$$\mathbf{2}_k^1 < \mathbf{2}_2^{2\mathbf{h}[D]+2}.$$

Отсюда вытекает неравенство (4.12). $\square$

Список литературы

1. А. Г. Драгалин, *Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств*, М.. Наука, 1979.

2. С. К. Клини, *Перестановочность применений правил в генценовских исчислениях* **LK** *и* **LJ**. — В кн.: *Математическая теория логического вывода*, М., Наука, 1967.
3. С. К. Клини, *Математическая логика.* Мир, Москва, 1973.
4. Б. Ю. Конев, *Уточнение оценок высоты термов в наиболее общем унификаторе* — Зап. научн. семинаров ПОМИ, **241** (1997), 117–134.
5. Б. Ю. Конев, *Верхняя оценка высоты термов в выводах с сечениями по формулам ограниченной глубины связанных вхождений* — Зап. научн. семинаров ПОМИ, **277** (2001), 80–103.
6. Г. Е. Минц, В. П. Оревков, *О погружающих операциях.* — Зап. научн. семинаров ПОМИ, **4** (1967), 163–175.
7. В. П. Оревков, *О гливенковских классах секвенций.* — Тр. Матем. ин-та АН СССР, **98** (1968), 131–154.
8. В. П. Оревков, *Нижние оценки увеличения сложности выводов после устранения сечений.* — Зап. научн. семинаров ПОМИ, **88** (1979), 137–162.
9. V. P. Orevkov, *Complexity of proofs and their transformations in axiomatic theories,* Amer. Math. Soc., 1993.
10. R. Harrop, *Concering formulas of types* $A \to B \vee C, A \to \exists x B(x)$. — J. Symbolic Logic, **25** (1960), No. 1, 27–32.
11. R. Statman, *The predicate calculus is not a Kalmar elementary speed-up of the equation calculus.* — Preprint, Cambbridge (1975).
12. R. Statman, *Bounds for proof-search and speed-up in the predicate calculus.* — Ann. Math. Logic, **15**, n. 3 (1978), 225–287.

Orevkov V. P. Upper and lower bounds on the height of proofs in sequent calculus for intuitionistic logic.

We prove upper and lower bounds on the height of proofs in sequent calculus for intuitionistic logic for the case when cut formulas may only contain essentially positive occurrences of the existential quantifier. We consider the cases of both proofs with and proofs without function symbols.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия

Поступило 10 декабря 2020 г.