

В. О. Коваль

О РАЗБИЕНИИ ПЛОСКИХ МНОЖЕСТВ НА 6 ЧАСТЕЙ МАЛОГО ДИАМЕТРА

§1. ВВЕДЕНИЕ

В 1933 году К. Борсук предложил гипотезу: в n -мерном пространстве любое множество единичного диаметра может быть покрыто не более чем $n+1$ множеством меньшего диаметра [1–6]. В двумерном случае утверждение верно, однако возникает другой вопрос: для данного натурального n найти наименьшее значение d_n , которого гарантированно хватит для того, чтобы покрыть любое множество единичного диаметра n множествами с диаметром, не превосходящим d_n . Если формально, то $d_n = \sup d_n(\Phi)$, где супремум берётся по всем множествам единичного диаметра на плоскости и

$$d_n(\Phi) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ : \Phi \subset \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \dots \cup \Phi_n, \forall i \text{ diam } \Phi_i \leq x\}.$$

Впервые исследованием величины d_n занялся Ленц [7, 8]. Он получил точные значения для некоторых n :

$$d_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad d_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad d_7 = \frac{1}{2},$$

а также следующие неравенства:

$$d_5 \geq \sin \frac{\pi}{5}, \quad d_6 \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{n} \leq d_n \leq \frac{1}{n-1} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}(n-1)} \right)$$

и, кроме того, асимптотические оценки, с которыми можно подробнее ознакомиться в работах [7, 9].

В. П. Филимонов продолжил исследовать последовательность d_n . В его статье были улучшены многие оценки этой величины. Здесь мы

Ключевые слова: проблема Борсука, покрытие плоских множеств, диаметр множества.

приведём только верхние оценки для d_5, d_6 :

$$d_5 \leq 0.6020\dots, \quad d_6 \leq \sqrt{\frac{13}{2}}(2 - \sqrt{3}) = 0.5577\dots$$

Оценку d_6 улучшили Д. А. Белов и Н. А. Александров [10], показав, что $d_6 \leq 0.5426\dots$. Данный результат и будет улучшен в этой статье.

Здесь и далее десятичная запись числа с троеточием показывает первые несколько знаков соответствующего числа без округлений.

Теорема 1. *Справедлива оценка $d_6 \leq 0.53432\dots$.*

Для начала введём следующее стандартное

Определение. *Систему множеств M_1, M_2, \dots, M_k назовём покрывающей, если любую фигуру диаметра 1 можно полностью покрыть каким-то из множеств M_1, M_2, \dots, M_k .*

Хорошо известно, что любое множество диаметра 1 можно покрыть правильным шестиугольником с расстоянием между противоположными сторонами, равным 1 (обозначим его Ω). Из этого следует, что Ω образует покрывающую систему множеств, состоящую из одного множества.

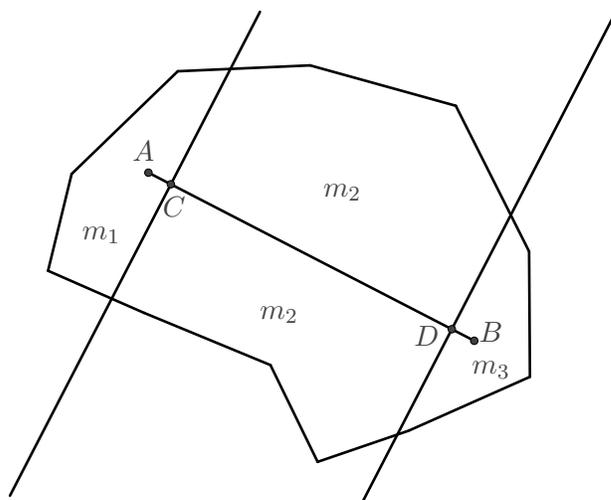


Рис. 1. Множество M и его разбиение на множества m_1, m_2, m_3 .

Лемма 1. Пусть дана покрывающая система σ . Пусть в множестве M из σ существуют точки A, B такие, что длина отрезка AB больше единицы. Образум из M три множества t_1, t_2, t_3 при помощи перпендикуляров, проведённых к AB на расстоянии $\frac{\delta}{2}$ от его концов (на рисунке 1 перпендикуляры проведены в точках C и D), где $\delta = \frac{|AB|-1}{2}$. Сами перпендикуляры отнесём только к множеству t_2 , а t_1 и t_3 их не будут содержать. Обозначим $M_1 = t_1 \cup t_2$, $M_2 = t_2 \cup t_3$. Тогда покрывающей также будет и система σ' , которая состоит из тех же множеств, что и σ , за исключением множества M , которое заменено на множества M_1, M_2 .

Доказательство леммы 1. Покажем, что если фигура может быть покрыта M , то она может быть покрыта M_1 или M_2 . Пусть при покрытии некой фигуры N фигурой M в t_1 находится хотя бы одна точка из N . Тогда в t_3 не может быть точек из N , ведь расстояние между любой точкой из t_1 и точкой из t_3 строго больше единицы, что противоречит тому, что диаметр N не больше единицы. Получили, что M_1 будет покрывать N . Если же t_1 не содержит точек из N , то очевидно, что M_2 будет покрывать N . Лемма доказана. \square

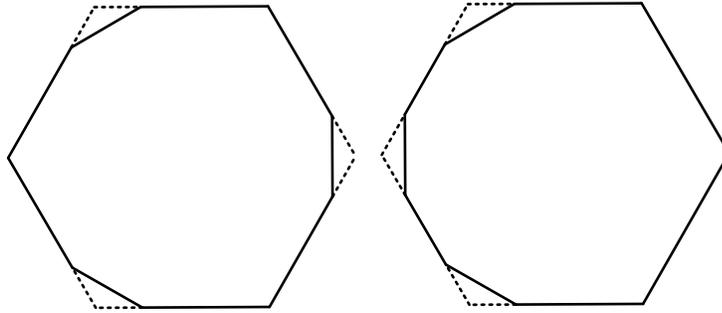


Рис. 2. Ω_1, Ω_2 (пунктиром отмечены отрезанные от Ω части).

Теперь от одного множества Ω перейдём при помощи леммы к системе из двух покрывающих множеств. Каждая из главных диагоналей Ω равна $\frac{2}{\sqrt{3}}$, что больше единицы, поэтому по лемме от шестиугольника можно отрезать соответствующие части (в данном случае – треугольники) на каждой из трёх диагоналей шестиугольника. После исключения одинаковых получаем систему из двух покрывающих множеств: в

первом случае вершины, от которых отрезаны треугольники, идут через один (назовём его Ω_1), а во втором вершины, от которых отрезаны треугольники, идут подряд (назовём его Ω_2).

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

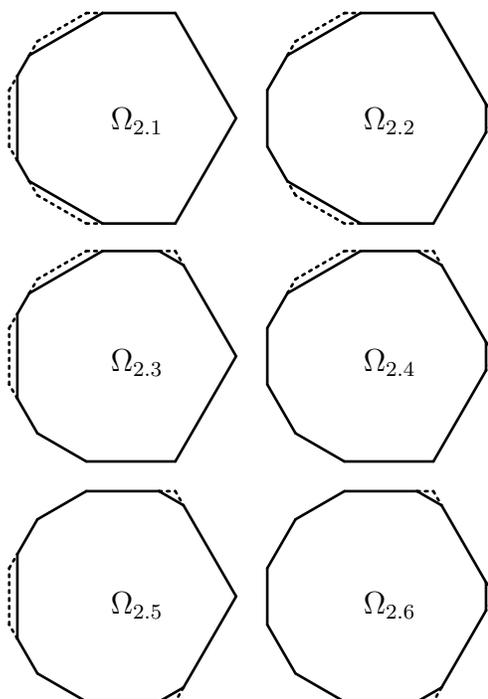


Рис. 3. Система из 6 покрывающих множеств (пунктиром отмечены обрезанные части).

В своей статье Филимонов [9] показал, как разбить Ω_1 на множества с диаметром не более $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, что меньше заявленных $0.53432\dots$, поэтому можно рассматривать только разбиение Ω_2 . Заметим, что после отрезания треугольников остатки диагоналей (равные $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$) все равно остались большими единицы. Следовательно, лемма позволяет от Ω_2 отрезать соответствующие части. Для каждой диагонали есть 2

варианта отсечения. Исключив одинаковые, получим систему из 6 покрывающих множеств (рис. 3). Назовём их соответственно $\Omega_{2.1}$, $\Omega_{2.2}$, $\Omega_{2.3}$, $\Omega_{2.4}$, $\Omega_{2.5}$ и $\Omega_{2.6}$. Теперь покажем, как разбить каждое из них.

Дальше часто будут фигурировать подсчёты в декартовой системе координат. Чтобы они не выглядели ещё более громоздкими, приведём соображения, по которым можно вычислять координаты вершин покрывающих множеств. Все выкладки можно проверить самостоятельно или ознакомиться с файлом [11], созданным в среде Wolfram Mathematica, где проверяются свойства точек по их координатам (например, принадлежность данной прямой, равноудалённость от данных точек, принадлежность данной окружности).

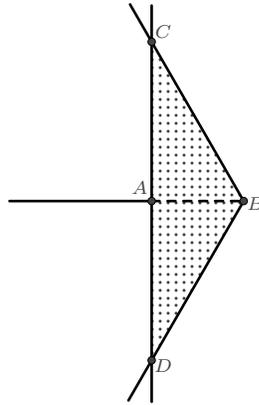


Рис. 4. Отрезанный от Ω угол. Точками обозначена отрезанная часть BCD , пунктиром – базовый отрезок AB .

Первое, что нужно заметить – у Ω все стороны равны $\frac{\sqrt{3}}{3}$, что, разумеется, пригодится при вычислении сторон множеств покрывающей системы. Следующее, что нужно отметить – это то, что каждый отрезанный угол, если его считать отрезанным от Ω , отрезал от соответствующей главной диагонали отрезок длиной $\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{4}$, $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$ или $\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}$. Далее такие отрезки будем называть базовыми коротким, средним и длинным соответственно. Если же угол не отрезался от Ω , то будем говорить, что отрезался нулевой

базовый отрезок. Это поможет вычислять длины сторон, которые появились в результате отрезания углов, ведь они имеют длину в $2\sqrt{3}$ раз больше, нежели базовый отрезок. Это следует из простой геометрии треугольника с углами 30° , 60° , 90° , которыми на рисунке 4 являются ABC и ABD . Также длины отрезков, отрезанных от сторон начального шестиугольника, ровно вдвое больше длины базового отрезка, что также следует из геометрии того же треугольника. Вычитая соответствующие длины из начальной длины стороны шестиугольника, мы получим длину остатка стороны после отрезания углов. Если отрезались короткий и нулевой базовые отрезки, то длина стороны будет $\frac{\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, если два коротких базовых отрезка или средний и нулевой, то длина стороны будет $\frac{\sqrt{3}}{3} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, если короткий и средний или длинный и нулевой, то $\frac{\sqrt{3}}{3} - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$, если же короткий и длинный или два средних, то $\frac{\sqrt{3}}{3} - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right) = 2 - \sqrt{3}$, если средний и длинный, то $\frac{\sqrt{3}}{3} - 5\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{3}$, и, наконец, если два длинных, то $\frac{\sqrt{3}}{3} - 6\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right) = 3 - \frac{5\sqrt{3}}{3}$. И последнее, что мы отметим – это то, что углы, которые новые стороны образуют с главными диагоналями, равны 30° или 90° , а начальные стороны образуют углы 60° или параллельны. Это позволит легко выражать координаты вершин фигуры, ведь для каждой стороны фигуры мы знаем ее длину и угол, который она образует с координатными осями.

2.1. Разбиение $\Omega_{2,1}$. Покажем, как разбить $\Omega_{2,1}$ на многоугольники с диаметрами, не превосходящими $0.53432\dots = a$. Назовём вершины A, B, \dots, I , как показано на соответствующем рисунке 5. Пусть JF – ось симметрии $\Omega_{2,1}$. На серединном перпендикуляре к BF возьмём точку K так, что $|BK| = |KF| = a$. Определим точку L как симметричную к K относительно JF . Пусть M – точка пересечения окружности с радиусом a и центром в точке K с отрезком BC . Пусть N – точка, симметричная M относительно JF . Пусть O – точка пересечения окружности радиуса a и центром в точке N с отрезком CD . Пусть P – точка пересечения окружности радиуса a и центром в точке O с отрезком EF . Пусть точки R, Q – точки, симметричные точкам O, P относительно прямой JF соответственно. Следует уточнить, что точки O, R не совпадают с вершинами $\Omega_{2,1}$, но очень близки к ним

(на расстоянии $0.001925015\dots$), поэтому на рисунке выглядят совпадающими. Теперь разобьём $\Omega_{2,1}$ на многоугольники $MLKN$, $NKOCB$, $OKPED$, $PFQLK$, $QGHRL$, $RIAML$. Заметим, что число a было выбрано так, чтобы отрезок PQ в результате построения также был равен a . Такой выбор возможен, поскольку длина отрезка PQ ведёт себя как монотонно убывающая непрерывная функция относительно переменной a . Достаточно, чтобы при каком-то a выполнялось $|PQ| < a$ и при каком-то a выполнялось $|PQ| > a$. Понятно, что при достаточно большом a точки P и Q совпадут с F , то есть $|PQ| = 0 < a$, а если $a = \frac{|BF|}{2}$, то $|PQ| > a$.

Введём систему координат с началом в точке J и осью абсцисс, направленной вдоль JF . Тогда координаты точки B будут $\left(0, \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$. Из них выражаются координаты C : $\left(\frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{4} - 1\right)$. Тогда координаты D это $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Далее получаем координаты E : $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ и, наконец, координаты F : $\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$. Теперь можно выразить координаты Q : $\left(\frac{2+3\sqrt{3}-2a}{4\sqrt{3}}, -\frac{a}{2}\right)$. Зная, что K – это точка, удалённая от B , F на расстояние a , можем записать ее координаты:

$$\left(\frac{-1020 + 563\sqrt{3} + \sqrt{-73269441 + 42302088\sqrt{3} + 36418896a^2 - 21026304\sqrt{3}a^2}}{24(-182 + 103\sqrt{3})}, \frac{-454513 + 31428\sqrt{3} + (24 + 13\sqrt{3})\sqrt{-73269441 + 42302088\sqrt{3} + 36418896a^2 - 21026304\sqrt{3}a^2}}{216(-182 + 103\sqrt{3})}\right).$$

С целью упрощения дальнейших выкладок будем обозначать координаты K как k_x и k_y соответственно. Осталось проверить, что в данном разбиении нет отрезков с длиной большей a .

- В многоугольнике $NKLM$ таких отрезков нет из очевидных соображений.
- В многоугольниках $NKOCB$ и $MLRIA$ достаточно проверить отрезки KC и LI .

$$|LI| = |KC| = \sqrt{\left(k_x - \frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(k_y - \frac{\sqrt{3}}{4} + 1\right)^2} = 0.52477\dots$$

- В многоугольниках $KODEP$ и $LRHGQ$ достаточно проверить отрезки KD , KE , LH , LG .

$$|LH| = |KD| = \sqrt{\left(k_x - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(k_y - \frac{1}{2}\right)^2} = 0.48413\dots$$

$$|LG| = |KE| = \sqrt{\left(k_x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(k_y - \frac{1}{2}\right)^2} = 0.53324\dots$$

- В многоугольнике $KPFQL$ достаточно проверить отрезки KQ и LP .

$$|LP| = |KQ| = \sqrt{\left(k_x - \frac{2 + 3\sqrt{3} - 2a}{4\sqrt{3}}\right)^2 + \left(k_y + \frac{a}{2}\right)^2} = 0.47971\dots$$

Как видим, длины всех отрезков действительно не превышают a , что завершает разбор этого случая.

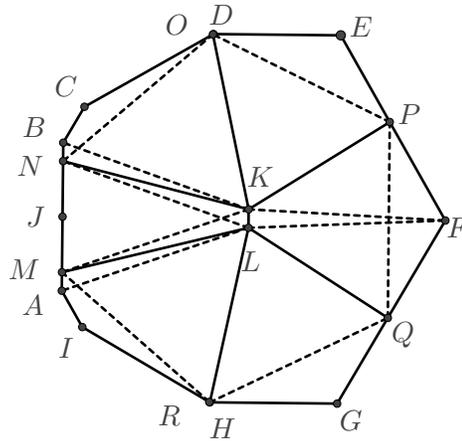


Рис. 5. Разбиение $\Omega_{2.1}$. Пунктиром обозначены наибольшие отрезки разбиения, сплошными линиями – само разбиение.

2.2. Разбиение $\Omega_{2.2}$. Из соображений симметрии достаточно разбить одну часть на три фигуры. Покажем, что это можно сделать так, чтобы диаметр каждой не превосходил

$$\sqrt{\left(\frac{6\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+9}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 0.53006\dots$$

Пусть ось симметрии AG фигуры отсекает часть $ABCDEFGF$. Выберем точки I, J, K, H так, что H – это пересечение серединного перпендикуляра к BF с AG , K – это пересечение окружности с центром в точке H и радиусом $|HF|$ с отрезком EF , I – это пересечение окружности с центром в точке K и радиусом $|KH|$ с отрезком CD , J – это центр описанной окружности треугольника AEG . Покажем, что полученное разбиение будет иметь максимальными диаметрами отрезки BH, HF, HK, KI и их длина как раз будет равна заявленным $0.53006\dots$

Введём прямоугольную систему координат с началом в точке A , осью абсцисс вдоль AG . Тогда координаты точек B, G, F будут $\left(0, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{4}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ соответственно. Значит, координаты H будут $\left(\frac{6\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+9}, 0\right)$. Теперь легко находим длину отрезка BH : $\sqrt{\left(\frac{6\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+9}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$. Координаты точек C, E находятся легко и равны $\left(\frac{5}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4} - 1\right), \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}\right)$ соответственно. Теперь можно найти координаты точки K , просто записав соответствующие уравнения принадлежности точки K к отрезку EF и длины отрезка KH . Получим следующие координаты: $\left(\frac{18\sqrt{3}-12}{23}, \frac{47\sqrt{3}-62}{46}\right)$. Аналогичным образом находим координаты I , которые равны

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1287}{23} - \frac{608\sqrt{3}}{23}}, \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{429}{23} - \frac{608\sqrt{3}}{69}}\right).$$

Также можно вычислить координаты J , записав условие равноудалённости от трёх вершин треугольника. Получим координаты $\left(\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{12}, \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{24}\right)$. Теперь проверим, что диаметры многоугольников разбиения не превышают $0.53006\dots$

- В многоугольнике $ABCIJH$ достаточно проверить отрезки AI , AJ , HC , HI .

$$|AI| = \sqrt{\left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1287}{23} - \frac{608\sqrt{3}}{23}}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{429}{23} - \frac{608\sqrt{3}}{69}}\right)^2} = 0.5177\dots$$

$$|AJ| = \sqrt{\left(\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{24}\right)^2} = 0.5220\dots$$

$$|HC| = \sqrt{\left(\frac{6\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+9} - \frac{5}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - 1\right)^2} = 0.5135\dots$$

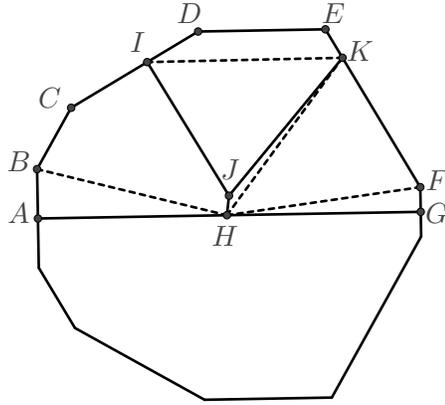
$$|HI| = \sqrt{\left(\frac{6\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+9} - \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1287}{23} - \frac{608\sqrt{3}}{23}}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{429}{23} - \frac{608\sqrt{3}}{69}}\right)^2} = 0.4686\dots$$

- В многоугольнике $IDEKJ$ достаточно проверить отрезок JE , но его длина равна длине AJ .
- В многоугольнике $KFGHJ$ достаточно проверить отрезки JG , KG . Длина JG равна длине AJ .

$$|KG| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{4} - \frac{18\sqrt{3}-12}{23}\right)^2 + \left(\frac{47\sqrt{3}-62}{46}\right)^2} = 0.4690\dots$$

Как видим, все отрезки имеют длину, меньшую, нежели заявленный нами диаметр.

2.3. Разбиение $\Omega_{2.3}$. Обратим внимание, что $\Omega_{2.3}$ не симметричная, поэтому будем разбивать ее всю. Назовём вершины $\Omega_{2.3}$ A, B, \dots, J , как на соответствующем рисунке 7. Пусть K – центр описанной окружности треугольника EFJ . Пусть L – центр окружности, описанной около треугольника DEH . Пусть M – точка пересечения этой окружности с отрезком IJ . На сторонах AB, CD, FG, GH, HI выберем точки N, O, P, Q, R таким образом, что $|BN| = 0.16116 = a$, $|DO| = 0.08938 = b$, $|FP| = 0.07660 = c$, $|GQ| = 0.14942 = d$, $|HR| = 0.14184 = f$. Тогда разбиение построим так, как показано на соответствующем рисунке 7. Докажем, что максимальными диаметрами будут отрезки LD, LE, LH, LI, LM . Очевидно, что расположение точек N, O, P, Q, R никак не влияет на их длины. Для подсчёта длин отрезков заметим, что $DEHI$ – равнобокая трапеция, следовательно, L лежит на среднем перпендикуляре к отрезкам HI и DE .

Рис. 6. Разбиение $\Omega_{2,2}$.

Будем работать в системе координат с началом в середине серединного перпендикуляра к HI и DE и осью абсцисс, направленной вдоль серединного перпендикуляра к отрезку DE . Тогда координаты D, I будут $\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ соответственно, а координаты L будут $\left(\frac{17}{24} - \frac{5\sqrt{3}}{12}, 0\right)$. И, наконец, длину отрезков LD, LE, LH, LI, LM несложно посчитать, и она будет равной $\sqrt{\frac{1333}{576} - \frac{169\sqrt{3}}{144}} = 0.53054\dots$. Зная координаты D, I , получаем, что координаты E – это $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$, а координаты H – это $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}\right)$. Понятно, что выбранное нами начало координат, также лежит на серединном перпендикуляре к AB (который также проходит через G). Кроме того понятно, что оно сдвинуто вправо относительно центра начального шестиугольника на длину, равную половине части отрезанной от нижней стороны шестиугольника, то есть на $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$. Поэтому координаты G равны $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, а координаты A, B равны $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right), \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$. Из координат E выражаем координаты F : $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4}\right)$. Координаты точки C получаем из координат точки D : $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - 1, \sqrt{3} - \frac{5}{4}\right)$. Из координат точек D, F выразим координаты O, P : $\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{2}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{c\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{4} - \frac{c}{2}\right)$. Из координат B, G выразим координаты N, Q : $\left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} - a, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right), \left(-\frac{d\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{d}{2}\right)$. Из координат точки H выражаем координаты R : $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2} + f\right)$. Осталось найти координаты точек K, M . Для этого найдём координаты J (например, через точку I): $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{6} - 1\right)$. Записав уравнение окружности с центром L и радиусом $|LI|$, можем найти пересечение ее с прямой IJ , отсюда получим точку M : $\left(\frac{17}{48} - \frac{11\sqrt{3}}{24}, \frac{11\sqrt{3}}{16} - \frac{7}{8}\right)$. Для нахождения координат точки K запишем уравнения серединных перпендикуляров к отрезкам IJ, IE и найдём точку пересечения полученных прямых, то есть K . Решив соответствующие уравнения, получим её координаты: $\left(\frac{31}{23} - \frac{71\sqrt{3}}{92}, \frac{25}{92} - \frac{8\sqrt{3}}{69}\right)$. Теперь проверим, что в разбиении нет отрезков с длиной большей 0.53054...

- В многоугольнике $BCOKN$ достаточно проверить отрезки NO, KC, KB, KN, KO . $|KO| < \max(|KC|, |KD|)$, $|KN| < \max(|KA|, |KB|)$, поэтому их проверка сводится к проверке отрезков KA, KD , что будет сделано дальше.

$$|NO| = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} - a - \frac{1}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 0.52893\dots$$

$$|KC| = \sqrt{\left(\frac{31}{23} - \frac{71\sqrt{3}}{92} - \frac{3\sqrt{3}}{4} + 1\right)^2 + \left(\frac{25}{92} - \frac{8\sqrt{3}}{69} - \sqrt{3} + \frac{5}{4}\right)^2} = 0.50191\dots$$

$$|KB| = \sqrt{\left(\frac{31}{23} - \frac{71\sqrt{3}}{92} - \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{25}{92} - \frac{8\sqrt{3}}{69} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = 0.50480\dots$$

- В многоугольнике $ODEFPLK$ достаточно проверить отрезки $OP, KD, KE, KF, KP, LF, LO$. Треугольник KLD тупоугольный, поэтому $|KD| < |LD|$. Треугольник FPK тупоугольный, поэтому $|KP| < |KF|$.

$$|OP| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} + \frac{c}{2}\right)^2} = 0.50748\dots$$

$$|KF| = |KE| = \sqrt{\left(\frac{31}{23} - \frac{71\sqrt{3}}{92} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{25}{92} - \frac{8\sqrt{3}}{69} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2} = 0.53006\dots$$

$$|LF| = \sqrt{\left(\frac{17}{24} - \frac{5\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = 0.51160\dots$$

$$|LO| = \sqrt{\left(\frac{17}{24} - \frac{5\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 0.51412\dots$$

- В многоугольнике $PGQL$ достаточно проверить отрезки PQ , LG , LQ . $|LQ| < \max(|LG|, |LH|)$.

$$|LG| = \sqrt{\left(\frac{17}{24} - \frac{5\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0.50017\dots$$

$$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{c\sqrt{3}}{2} + \frac{d\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4} - \frac{c}{2} + \frac{1}{2} - \frac{d}{2}\right)^2} = 0.51464\dots$$

- В многоугольнике $QHRL$ достаточно проверить отрезки RQ , LR . $|LR| < \max(|LI|, |LH|)$.

$$|QR| = \sqrt{\left(-\frac{d\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{d}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} - f\right)^2} = 0.51375\dots$$

- В многоугольнике $RIMKL$ достаточно проверить отрезки MR , KI , KR , KM . $|KI| = |KE|$, $|KM| < \max(|KJ|, |KI|)$.

$$|RM| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - \frac{17}{48} + \frac{11\sqrt{3}}{24}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2} + f - \frac{11\sqrt{3}}{16} + \frac{7}{8}\right)^2} = 0.38996\dots$$

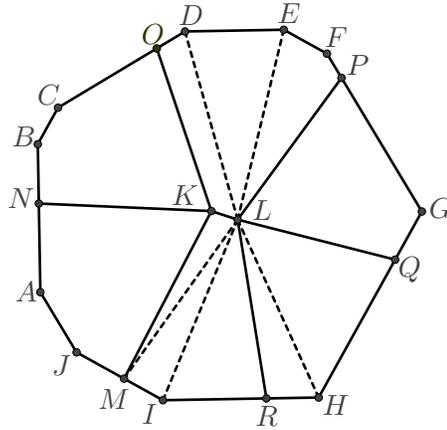
$$|KR| = \sqrt{\left(\frac{31}{23} - \frac{71\sqrt{3}}{92} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{25}{92} - \frac{8\sqrt{3}}{69} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} - f\right)^2} = 0.53006\dots$$

- В многоугольнике $MJANK$ достаточно проверить отрезки MN , KA , KJ . $|KJ| = |KE|$.

$$|KA| = \sqrt{\left(\frac{31}{23} - \frac{71\sqrt{3}}{92} - \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{25}{92} - \frac{8\sqrt{3}}{69} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = 0.51359\dots$$

$$|MN| = \sqrt{\left(\frac{17}{48} - \frac{11\sqrt{3}}{24} - \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} + a\right)^2 + \left(\frac{11\sqrt{3}}{16} - \frac{7}{8} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = 0.52876\dots$$

Все длины оказались меньшими заявленного диаметра, что завершает рассмотрение этого случая.

Рис. 7. Разбиение $\Omega_{2,3}$.

2.4. Разбиение $\Omega_{2,4}$. Назовём вершины $\Omega_{2,4}$ A, B, \dots, K , как на соответствующем рисунке 8. Пусть L – центр окружности, описанной около треугольника AEH . На отрезке LI выберем точку M так, что $|LM| = 0.04839 = m$. На сторонах BC, DE, FG, HI, IJ, AK выберем точки N, O, P, Q, R, S соответственно так, что S и P – середины соответствующих отрезков, а $|BN| = 0.14067 = a$, $|DO| = 0.06965 = b$, $|IQ| = 0.26223 = c$, $|IR| = 0.33246 = d$. Максимальными диаметрами в таком разбиении будут отрезки, являющиеся радиусами окружности, описанной около AEH , то есть отрезки LA, LE, LH, LK и их длины не зависят от расположения M, N, O, P, Q, R, S . Заметим, что $AENK$ – равнобокая трапеция, поэтому L лежит на серединном перпендикуляре к отрезкам FG и AK , то есть на отрезке PS . Введём систему координат с началом в середине PS и осью абсцисс, направленной вдоль SP в направлении к P . Координаты точек A, E будут $\left(-\frac{1}{2}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4}\right)$ соответственно. Координаты L выражаются как $\left(\frac{10\sqrt{3}-17}{12+6\sqrt{3}}, 0\right)$. Далее получаем радиус соответствующей окружности,

который равен $\sqrt{\left(\frac{10\sqrt{3}-17}{12+6\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 0.53147\dots$

Теперь докажем, что предьявленные отрезки действительно будут максимальными диаметрами разбиения. Очевидно, что координаты точек P, S это $(\frac{1}{2}, 0), (-\frac{1}{2}, 0)$. Из координат P выражаем координаты $G: (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2})$. Заметим, что начало координат совпадает с центром изначального шестиугольника. Тогда очевидно, что координаты точки I это $(0, -\frac{\sqrt{3}}{3})$. Тогда координаты точек $R, Q: (-\frac{d\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{d}{2}), (\frac{c\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{c}{2})$. Зная координаты точки A , выразим координаты $B: (\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2})$. Зная это, получаем координаты $C: (\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}, \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6})$. Теперь через координаты C выражаем координаты $D: (\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6})$. Выразим координаты N, O через координаты B, D соответственно: $(\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{a}{2}), (\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{b\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{b}{2})$. Для нахождения координат M узнаем, в каком отношении M делит LI . Для этого посчитаем длину $LI: \sqrt{(\frac{10\sqrt{3}-17}{12+6\sqrt{3}})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = l$. Тогда имеем, что координаты M выражаются так: $(\frac{10\sqrt{3}-17}{12+6\sqrt{3}} \cdot (1 - \frac{m}{l}), -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{m}{l})$. Теперь проверим диаметры каждого многоугольника разбиения.

- В многоугольнике $SABNL$ достаточно проверить длины отрезков SN, LB, LS, LN .

$$|LS| < \max(|LA|, |LK|), \quad |LN| < \max(|LB|, |LC|).$$

$$|LB| = \sqrt{\left(\frac{10\sqrt{3}-17}{12+6\sqrt{3}} - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2} = 0.52785\dots$$

$$|SN| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{a}{2}\right)^2} = 0.50580\dots$$

- В многоугольнике $NCDOL$ достаточно проверить длины отрезков NO, LC, LD, LO . $|LO| < \max(|LD|, |LE|)$.

$$|NO| = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{a}{2} - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{b}{2}\right)^2} = 0.50557\dots$$

$$|LC| = \sqrt{\left(\frac{10\sqrt{3}-17}{12+6\sqrt{3}} - \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = 0.50908\dots$$

$$|LD| = \sqrt{\left(\frac{10\sqrt{3}-17}{12+6\sqrt{3}} - \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = 0.49765\dots$$

- В многоугольнике $OEFPL$ достаточно проверить длины отрезков OP , LF , LP . $|LP| < \max(|LF|, |LG|)$.

$$|OP| = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{b}{2}\right)^2} = 0.48876\dots$$

$$|LF| = \sqrt{\left(\frac{10\sqrt{3}-17}{12+6\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}\right)^2} = 0.52966\dots$$

- В многоугольнике $PGHQL$ достаточно проверить длины отрезков PQ , LG , LQ , MP , MG . $|LG| = |LF|$.

$$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{c}{2}\right)^2} = 0.52306\dots$$

$$|LQ| = \sqrt{\left(\frac{10\sqrt{3}-17}{12+6\sqrt{3}} - \frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{c}{2}\right)^2} = 0.49437\dots$$

$$|MP| = \sqrt{\left(\frac{10\sqrt{3}-17}{12+6\sqrt{3}} \cdot \left(1 - \frac{m}{l}\right) - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{m}{l}\right)^2} = 0.48928\dots$$

$$|MG| = \sqrt{\left(\frac{10\sqrt{3}-17}{12+6\sqrt{3}} \cdot \left(1 - \frac{m}{l}\right) - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{m}{l} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}\right)^2} = 0.51343\dots$$

- В многоугольнике $QIRM$ достаточно проверить длины отрезков QR , MI .

$$|QR| = \sqrt{\left(\frac{c\sqrt{3}}{2} + \frac{d\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - \frac{d}{2}\right)^2} = 0.51621\dots$$

$$|MI| = \sqrt{\left(\frac{10\sqrt{3}-17}{12+6\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} - m = 0.52913\dots$$

- В многоугольнике $RJKSLM$ достаточно проверить длины отрезков RS , LR , LJ , MS . $|LJ| = |LB|$.

$$|RS| = \sqrt{\left(-\frac{d\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{d}{2}\right)^2} = 0.46259\dots$$

$$|LR| = \sqrt{\left(\frac{10\sqrt{3}-17}{12+6\sqrt{3}} + \frac{d\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{d}{2}\right)^2} = 0.51025\dots$$

$$|MS| = \sqrt{\left(\frac{10\sqrt{3}-17}{12+6\sqrt{3}} \cdot \left(1 - \frac{m}{l}\right) + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{m}{l}\right)^2} = 0.51538\dots$$

Все полученные значения не превышают $0.53147\dots$, что и завершает рассмотрение этого случая.

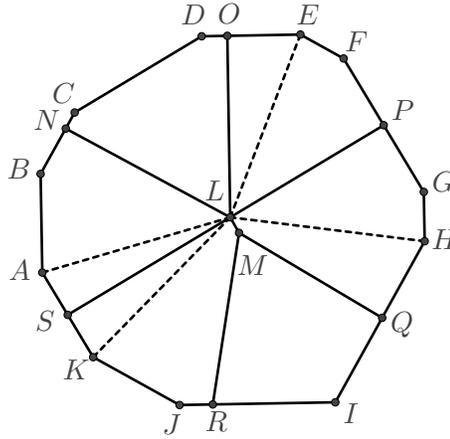


Рис. 8. Разбиение $\Omega_{2.4}$.

2.5. Разбиение $\Omega_{2.5}$. Из соображений симметрии достаточно разбить одну часть на три фигуры. Покажем, что это можно сделать так, чтобы диаметр каждой не превосходил

$$r = \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{14\sqrt{3}-17}{8\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{4}} = 0.53424\dots$$

Пусть AG – ось симметрии $\Omega_{2.5}$, которая вместе с частью ее границы образует многоугольник $ABCDEFG$, как показано на соответствующем рисунке 9. Пусть пересечение серединного перпендикуляра к CE с AG – H , а серединного перпендикуляра к DG с AG – I . На сторонах CD и EF выберем точки J и K соответственно так, что

$|CJ| = 0.15792 = a$ и $|EK| = 0.10414 = b$. Тогда наибольшими из диаметров фигур будут CH , EH , а их длина не зависит от расположения J и K . Введём систему координат с началом в точке A и осью абсцисс, направленной вдоль AG . Тогда координатами C , E будут $\left(\frac{5}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2}\right)$ соответственно. Координаты точки $H - \left(\frac{14\sqrt{3}-17}{8\sqrt{3}} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$, что позволяет выразить длины отрезков CH и EH как r . Координаты точек B и G находятся просто и равны $\left(0, \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{4}, 0\right)$ соответственно. Из этого можно найти координаты точки F , которые равны $\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Для нахождения координат точки D сначала найдём координаты точки C , которые равны $\left(\frac{5}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$. Тогда координаты точки D равны $\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Теперь можно найти координаты точки I как пересечения серединного перпендикуляра к DG с AG : $\left(\frac{5\sqrt{3}}{24-4\sqrt{3}}, 0\right)$. Зная координаты C , легко понять, что координаты J будут $\left(\frac{5}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{a}{2}\right)$. Также через координаты E можно выразить координаты K , которые равны $\left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{b\sqrt{3}}{2}, \frac{1-b}{2}\right)$. Теперь покажем, что диаметры множеств разбиения действительно не превосходят $0.53424\dots$

- В многоугольнике $ABCJH$ достаточно проверить отрезки AJ , BH , AH , HI . $|HJ| < \max(|CH|, |HD|)$, а из прямоугольности треугольника ABH имеем $|AH| < |BH|$.

$$|AJ| = \sqrt{\left(\frac{5}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{a}{2}\right)^2} = 0.5018\dots$$

$$|BH| = \sqrt{\left(\frac{14\sqrt{3}-17}{8\sqrt{3}} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2} = 0.5244\dots$$

- В многоугольнике $JDEKIH$ достаточно проверить отрезки JK , HD , ID , HK , IE , IK . $|IK| < \max(|IE|, |IF|)$, $|IE| < |HE|$, $|HD| < |ID|$.

$$|KJ| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-b}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{a}{2}\right)^2} = 0.5307\dots$$

$$|ID| = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{24-4\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0.5313\dots$$

$$|HK| = \sqrt{\left(\frac{14\sqrt{3}-17}{8\sqrt{3}} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-b}{2}\right)^2} = 0.5273\dots$$

- В многоугольнике $KFGI$ достаточно проверить отрезки KG , IF , IG .

$$|KG| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-b}{2}\right)^2} = 0.5260\dots$$

$$|IF| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{24-4\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = 0.5164\dots$$

$$|IG| = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{24-4\sqrt{3}} = 0.5313\dots$$

Как видим, все длины меньше заявленных максимальных диаметров.

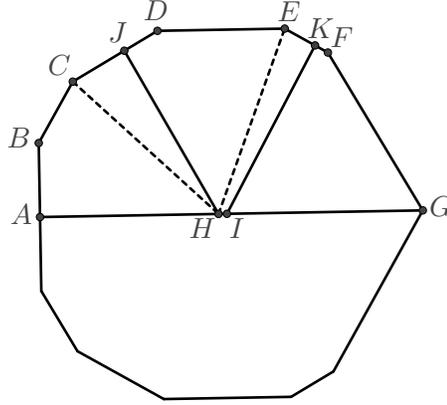


Рис. 9. Разбиение $\Omega_{2,5}$.

2.6. Разбиение $\Omega_{2,6}$. Покажем, как разбить $\Omega_{2,6}$ на многоугольники с диаметрами, не превосходящими

$\sqrt{\left(\frac{86-67\sqrt{3}}{24+20\sqrt{3}}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{636-367\sqrt{3}}{48\sqrt{3}-36}\right)^2} = 0.53147\dots = r$. Обозначим вершины $\Omega_{2,6}$ A, B, \dots, L как на соответствующем рисунке 10. Пусть

MN – ось симметрии $\Omega_{2,6}$. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника AEH , а P – точка, симметричная ей относительно MN . Заметим, что радиус этой окружности будет в точности равен r , что будет доказано чуть позже. Отметим на сторонах FG и HI симметричные друг другу относительно MN точки Q и R соответственно так, что $|QR| = r$. На сторонах DE , JK , BC , LA обозначим точки S , T , U , V соответственно так, что $|SQ| = |SU| = |RT| = |TV| = r$. Теперь разобьём $\Omega_{2,6}$ на многоугольники $ABUOPV$, $CDSOU$, $EFQOS$, $GHRPOQ$, $IJTPT$, $KLVPT$, как показано на рисунке 9. Теперь осталось проверить, что заявленные нами диаметры действительно являются максимальными.

Введём систему координат с началом в точке M и осями абсцисс и ординат, направленными вдоль MN и MB соответственно. Тогда координаты точек B , A будут $\left(0, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$ соответственно. Тогда координаты C это $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)$. Из координат C выразим координаты D : $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Теперь выразим координаты E : $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}\right)$. Тогда координаты F будут $\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Наконец, выражаем координаты G и H : $\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\right)$. Теперь можно найти координаты точки O как центра окружности AEH : $\left(\frac{67\sqrt{3}-86}{24+20\sqrt{3}}, \frac{636-367\sqrt{3}}{48\sqrt{3}-36}\right)$. Теперь легко видеть, что r действительно равно написанному нами выражению, ведь оно имеет смысл длины отрезка AO в введённых нами координатах.

Теперь найдём координаты точки R . Из построения следует, что ордината R будет равна $-\frac{r}{2}$. Понятно, что на прямой HI такая точка единственна, поэтому можно найти и ее абсциссу. В результате получаем координаты $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{r\sqrt{3}}{6}, -\frac{r}{2}\right)$. Для нахождения координат T заметим, что ордината будет равна $-\frac{1}{2}$, после чего запишем условие удалённости на r от R и получим ее координаты:

$$\left(-\sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{r\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}\right)$$

. Для упрощения следующих выкладок обозначим t абсциссу точки T . Теперь можно записать, что координаты V равны

$$\left(-\frac{\sqrt{-724 + 418\sqrt{3} + r^2(1552 - 896\sqrt{3}) + t(1836 - 1060\sqrt{3}) + t^2(-1164 + 672\sqrt{3})}}{56 - 32\sqrt{3}} + \frac{33 - 19\sqrt{3} + t(14 - 8\sqrt{3})}{56 - 32\sqrt{3}}, -\frac{1}{2} + \sqrt{r^2 - (t - v_x)^2} \right),$$

где v_x – абсцисса точки V . Для упрощения дальнейших выкладок назовём ординату точки V – v_y . Теперь мы можем проверить, что r действительно является максимальной длиной диаметров разбиения.

- В многоугольнике $VABUOP$ достаточно проверить отрезки OV, PU, OB, PA, OU, PV . $|OB| = |PA| < |OA|, |OU| = |PV| < \max(|PA|, |PL|)$.

$$|PU| = |OV| = \sqrt{\left(\frac{67\sqrt{3} - 86}{24 + 20\sqrt{3}} - v_x\right)^2 + \left(\frac{636 - 367\sqrt{3}}{48\sqrt{3} - 36} - v_y\right)^2} = 0.52118 \dots$$

- В многоугольниках $UCDSO, TKLVP$ достаточно проверить отрезки OC, PL, OD, PK, OS, PT .

$$|OS| = |PT| < \max(|PK|, |PJ|)$$

$$|PL| = |OC| = \sqrt{\left(\frac{67\sqrt{3} - 86}{24 + 20\sqrt{3}} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{636 - 367\sqrt{3}}{48\sqrt{3} - 36} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 0.52152 \dots$$

$$|PK| = |OD| = \sqrt{\left(\frac{67\sqrt{3} - 86}{24 + 20\sqrt{3}} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{636 - 367\sqrt{3}}{48\sqrt{3} - 36} - \frac{1}{2}\right)^2} = 0.51411 \dots$$

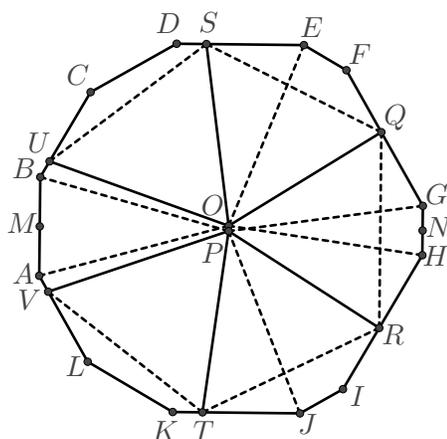
- В многоугольниках $SEFQO, RIJTP$ достаточно проверить отрезки OF, PI, OQ, PR . $|OQ| = |PR| < \max(|PI|, |PJ|)$.

$$|PI| = |OF| = \sqrt{\left(\frac{67\sqrt{3} - 86}{24 + 20\sqrt{3}} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{636 - 367\sqrt{3}}{48\sqrt{3} - 36} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = 0.52966 \dots$$

- В многоугольнике $QGHRPO$ достаточно проверить отрезки OR, PQ .

$$|PQ| = |OR| = \sqrt{\left(\frac{67\sqrt{3} - 86}{24 + 20\sqrt{3}} - \frac{7\sqrt{3}}{48} - \frac{13}{16} - r\left(\frac{3}{8} - \frac{5\sqrt{3}}{24}\right)\right)^2 + \left(\frac{636 - 367\sqrt{3}}{48\sqrt{3} - 36} + \frac{r}{2}\right)^2} = 0.49379 \dots$$

Все полученные значения не превышают $0.53147 \dots$, что и завершает рассмотрение этого случая.

Рис. 10. Разбиение $\Omega_{2,6}$.

§3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предыдущая наилучшая оценка сверху на d_6 была достигнута в работе Д.А. Белова и Н.А. Александрова [10] и равнялась $\frac{10-4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-3} = 0.5426\dots$. Она была улучшена до $0.5343\dots$, то есть уменьшилась на $0.0083\dots$. Наилучшая оценка снизу на d_6 на данный момент является $\left(2 \cos \frac{\pi}{22}\right)^{-1} = 0.5051\dots$, то есть теперь разница между нижней и верхней оценками составляет $0.0292\dots$. Понятно, что результат, полученный таким способом, скорее всего, не является оптимальным, ведь процедуру отрезания углов можно повторять далее, с каждым разом получая всё большее количество "меньших" множеств в покрывающей системе. Ещё одним способом улучшения может служить выбор новых отрезков с длиной, большей единицы, вместо остатков главных диагоналей Ω в лемме 1. Это существенно усложнит выкладки, но, скорее всего, таким способом можно добиться лучшего результата. Возможно, какие-то схемы разбиения работают не только для конкретного множества покрывающей системы, а для целого семейства таких множеств, каждое из которых является Ω с отрезанными углами. Тогда ещё одним путём улучшения оценки может стать рассмотрение схем разбиений для бесконечного покрывающего семейства.

Естественно поставить аналогичный вопрос о последовательности d_n и для высших размерностей. Например, исследованием таких величин занимался Филимонов. С его результатами можно подробнее ознакомиться в работе [12].

Ещё различные недавние результаты и ссылки по проблеме Борсука можно найти в статьях [13–16].

Автор искренно благодарит своего научного руководителя А. М. Райгородского, а также В. А. Воронова за помощь в написании и редактировании настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. K. Borsuk, *Drei Sätze über die n -dimensional euklidische Sphäre*. — Fundamenta Math. **20** (1933), 177–190.
2. A. M. Raigorodskii, *Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters*, Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed., Springer, 2013, 429–460.
3. A. M. Raigorodskii, *Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters*, “Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics”, AMS, Contemporary Mathematics, 625 (2014), 93–109.
4. А. М. Райгородский, *Вокруг гипотезы Борсука*, Итоги науки и техники. Серия “Современная математика”, 23 (2007), 147–164.
5. V. G. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan, *Excursions into combinatorial geometry*. Universitext, Springer, Berlin, 1997.
6. P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, 2005.
7. H. Lenz, *Zerlegung ebener Bereiche in konvexe Zellen von möglichst kleinem Durchmesser*. — Jber. Deutch. Math. Verein. **58** (1956), 87–97.
8. H. Lenz, *Über die Bedeckung ebenem Punktmengen durch solche kleineren Durchmessers*. — Arch. Math. (Basel) **7:1** (1956), 34–40.
9. В. П. Филимонов, *О покрытии плоских множеств*. — Математический сборник **201(8)** (2010), 127–160.
10. Д. Белов, Н. Александров, *О разбиении плоских множеств на шесть частей малого диаметра*. — ТРУДЫ МФТИ **4(1)** (2012) 77.
11. Проверка расчётов, <https://github.com/VadymKoval/calculations-check.git>
12. В. П. Филимонов, *О покрытии множеств в \mathbb{R}^m* . — Матем. сб. **205:8** (2014), 95–138.
13. Р. И. Просанов, *Контрпримеры к гипотезе Борсука, имеющие большой обхват*. — Матем. заметки **105:6** (2019), 890–898.
14. A. Kupavskii, A. Polyanskii, *Proof of Schur’s conjecture in \mathbb{R}^d* . — Combinatorica **37**, No. 6 (2017), 1181–1205.
15. A. Kupavskii, A. Polyanskii, *On simplices in diameter graphs in \mathbb{R}^4* . — Mathematical Notes **101**, No. 2 (2017), 232–246.
16. А. М. Райгородский, Л. И. Боголюбский, *Об оценках в проблеме Борсука*. — Труды МФТИ **11**, No. 3 (2019), 20–49.

Koval' V. O. Partitioning of plane sets into 6 subsets of small diameter.

In 1956, H. Lenz introduced a problem, which was to find members of the sequence

$$d_n = \inf_{\Phi} \{x \in \mathbb{R}^+ : \Phi \subset \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \dots \cup \Phi_n, \forall i \text{ diam } \Phi_i \leq x\}$$

where infimum is taken over all sets Φ of unit diameter. In this paper, we improve an upper bound for d_6 to 0.53432...

Uniwersytet Jagielloński
(Jagiellonian university) ul. Golebia 24
31-007 Kraków, Polska
E-mail: vadyim2312@gmail.com

Поступило 1 декабря 2020 г.