Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 497, 2020 г.

В. А. Буслов

АЛГОРИТМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПОСТРОЕНИЯ ОСТОВНЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЛЕСОВ

Настоящая статья опирается на результаты работы [1]. Определения и обозначения соответствуют, принятым в ней.

§1. Определения и обозначения

Используем термин "граф" в широком смысле, обозначая им как неориентированные, так и ориентированные графы, если это не приводит к недоразумениям.

Для орграфа G множество его вершин обозначаем $\mathcal{V}G$, множество дуг — $\mathcal{A}G$. Если граф G неориентированный, то $\mathcal{E}G$ – множество его рёбер.

Исходный объект – взвешенный орграф V, с множеством вершин $\mathcal{V}V = \mathcal{N}$, $|\mathcal{N}| = N$; дугам $(i, j) \in \mathcal{A}V$ приписаны вещественные веса v_{ij}. Рассматриваются остовные подграфы (с множеством вершин $\mathcal{N}$), являющиеся заходящими лесами. Заходящий лес – орграф, в котором из каждой вершины исходит не более одной дуги и отсутствуют циклы. Дерево – связная компоненты леса. Корень дерева (леса) – вершина, из которой дуга не исходит. Через T_i^F обозначаем дерево леса F с корнем в вершине i. Множество корней леса F обозначаем $\mathcal{K}_F$. Исходящий лес получается заменой всех дуг заходящего на обратные (тогда корнем называется вершина, в которую дуги не заходят). Используются только заходящие леса, в дальнейшем просто – леса, где это не требуется особо оговаривать. В неориентированной же ситуации, лес – граф без циклов, его связные компоненты – деревья.

Индуцированный множеством $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}G$ подграф H графа G (или сужение графа G на множество $\mathcal{S}$) – подграф у которого $\mathcal{V}H = \mathcal{S}$, а множество его дуг – все дуги графа G, оба конца которых принадлежат множеству $\mathcal{S}$. Для него используем обозначение $H = G|_{\mathcal{S}}$.

Если существует дуга, исход которой принадлежит множеству $\mathcal{S}$, а заход не принадлежит, то говорим, что из множества $\mathcal{S}$ исходит дуга.

Ключевые слова: взвешенный орграф, остовный подграф, минимальный лес.

Аналогично, если существует дуга, заход которой принадлежит $\mathcal{S}$, а исход не принадлежит, то говорим, что в $\mathcal{S}$ заходит дуга.

Для подграфа G графа V и подмножества множества вершин $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{N}$, вводим веса

$$\Upsilon^G_{\mathcal{S}} = \sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ (i,j) \in \mathcal{A}G}} v_{ij}, \quad \Upsilon^G = \Upsilon^G_{\mathcal{N}} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}G} v_{ij}. \tag{1}$$

Величина $\Upsilon^G_{\mathcal{S}}$ формируется в том числе и из дуг, заходы которых не принадлежат множеству $\mathcal{S}$. Если в графе G дуги из самого множества $\mathcal{S}$ не исходят, то $\Upsilon^G_{\mathcal{S}} = \Upsilon^{G|_{\mathcal{S}}}$.

$\mathcal{F}^k$ – множество лесов, состоящих из $k = 1, 2, \ldots, N$ деревьев. Минимум веса Υ^F среди всех лесов $F \in \mathcal{F}^k$ обозначим через ϕ^k:

$$\phi^k = \min_{F \in \mathcal{F}^k} \Upsilon^F.$$

Если $\mathcal{F}^k = \emptyset$, положим $\phi^k = \infty$, в частности, $\phi^0 = \infty$. Множество $\mathcal{F}^N$ состоит из одного лишь пустого леса и $\phi^N = 0$. Любой лес из $\mathcal{F}^{N-1}$ содержит ровно одну дугу, поэтому $\phi^{N-1} = \min\limits_{(i,j) \in \mathcal{A}V} v_{ij}$.

$\widetilde{\mathcal{F}}^k$ – подмножество множества лесов $\mathcal{F}^k$, на котором достигается минимум ϕ^k: $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^k \Leftrightarrow\; F \in \mathcal{F}^k$ и $\Upsilon^F = \phi^k$. Леса из $\widetilde{\mathcal{F}}^k$ называем минимальными.

$\mathcal{F}^k|_{\mathcal{S}}$ – множество индуцированных множеством $\mathcal{S}$ подграфов k-компонентных лесов;

$\widetilde{\mathcal{F}}^k|_{\mathcal{S}}$ – множество индуцированных множеством $\mathcal{S}$ подграфов k-компонентных лесов минимального веса;

$F^G_{\uparrow\mathcal{S}}$ – граф, получающийся из F заменой дуг, исходящих из вершин множества $\mathcal{S}$, на дуги исходящие из этих же вершин в графе G.

Для всякого подмножества $\mathcal{S} \subset \mathcal{N}$, его дополнение $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{N} \setminus \mathcal{S}$.

Лес $F \in \mathcal{F}^{k+1}$ называем предком леса $G \in \mathcal{F}^k$, а G потомком F, если выполнены следующие условия. Найдутся такие два корня i, j леса F, что: $\mathcal{K}_G = \mathcal{K}_F \setminus \{j\}$; $T^G_l = T^F_l$ при $l \in \mathcal{K}_G \setminus \{i\}$; $G|_{\mathcal{V}T^F_i} = T^F_i$; $G|_{\mathcal{V}T^F_j}$ – дерево. Леса F и G называем родственными.

§2. Проблема минимального леса и алгоритмы для минимального дерева

2.1. Построение минимальных лесов и деревьев в неориентированной ситуации. Алгоритм Прима [2] на каждом шаге строит ациклический связный подграф (дерево), число вершин и ребёр которого увеличивается на 1 с каждым шагом. Он стартует с подграфа, состоящего из единственной вершины, выбираемой произвольно. Далее, к уже построенному промежуточному дереву добавляется ребро минимального веса из оставшихся, лишь бы конструкция продолжала оставаться деревом.

Для наших целей более показательным является алгоритм Краскала [3], поскольку он на каждом шаге строит остовный лес минимального веса. Действительно, опишем этот алгоритм в “лесной” трактовке. Пусть исходный граф N-вершинный. На нулевом шаге берется пустой остовный подграф исходного графа. Заметим, что пустой остовный подграф (такой подграф единственный) является заодно и минимальным остовным лесом, среди всех остовных лесов, состоящих из N деревьев. Все эти деревья одновершинные и не содержат ребёр. Дальнейшие действия происходят по рекуррентной процедуре. Пусть k-компонентный остовный лес, имеющий минимальный вес среди всех k-компонентных остовных лесов, построен. Добавим к нему ребро минимального веса из всех оставшихся, лишь бы граф оставался лесом (фактически при этом некоторые два дерева сливаются в одно). Полученный лес состоит из $(k-1)$ дерева и имеет минимальный вес, среди всех $(k-1)$-компонентных остовных лесов. Процедура продолжается, пока добавление рёбер возможно. Если исходный граф состоит из l связных компонтент, то в конце алгоритма будет построен минимальный остовный лес, состоящий из l деревьев, в частности, для связного графа – минимальное остовное дерево. Таким образом, алгоритм Краскала последовательно строит леса минимального веса до тех пор пока не будет получено минимальное остовное дерево, если исходный граф связен.

2.2. Основное отличие ориентированной ситуации от неориентированной. В ситуации неориентированных графов минимальное остовное дерево (равно как и лес) обязательно содержит ребро минимального веса (если оно не единственное, то хотя бы одно из них). В ориентированной же ситуации, дуга минимального веса может не содержаться вообще ни в одном остовном дереве (какой бы ни был у него вес) как исходящего, так и заходящего типов. Действительно, рассмотрим пример на рис. 1. Дуга (c, b) имеет минимальный вес, равный 1. Здесь, остовное дерево как заходящее, так и исходящее, единственное

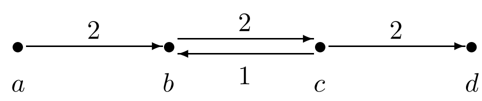


Рис. 1. Остовное дерево как заходящее, так и исходящее, состоит из дуг (a,b), (b,c) и (c,d), и оно не содержит дуги минимального веса (c,b).

и оно состоит из дуг (a,b), (b,c) и (c,d). Дуга минимального веса (c,b) в нём не содержится.

Указанное обстоятельство означает, что алгоритмы, основанные на последовательном присоединении к уже построенному промежуточному графу рёбер минимального веса из оставшихся (такие как алгоритмы Прима и Краскала), не могут быть применены в ориентированной ситуации. Требуется существенная модификация, в которой промежуточный граф также подлежал бы внутренней перестройке.

2.3. Построение минимального ориентированного дерева с заданным корнем. Опишем суть алгоритма Чу-Ли [4] и Эдмондса [5] применительно к заходящим лесам. Исходно предполагается, что корень фиксирован. Алгоритм на каждом шаге строит некоторый промежуточный граф (из которого потом получается минимальное остовное дерево) и происходит преобразование исходного графа путем слияния части вершин. Сначала, из каждой вершины i кроме назначенного корня испускается по одной дуге, имеющей минимальный вес среди дуг, исходящих из вершины i. Если полученный граф – заходящее дерево, то оно имеет минимальный вес. Если же полученный промежуточный граф содержит циклы, то рассматривается частичная конденсация исходного орграфа: для каждого цикла вершины, принадлежащие ему, объединяются в одну новую вершину со специальным пересчётом весов дуг, инцидентных данной новой вершине и остальным вершинам. Полученный граф имеет меньше компонент, чем исходный. В нём вновь из каждой вершины кроме корня (он не может принадлежать ни одному циклу, поскольку из него дуги не исходят) испускается по одной дуге минимального веса. Если вновь возникают циклы (это уже циклы следующего уровня), то операция сливания вершин цикла в одну вершину повторяется. Когда граф становится таким, что испускание минимальных дуг из всех его вершин кроме корня дает остовное дерево этого графа (оно для него является минимальным), то начинается процесс разрыва циклов последнего уровня. Поскольку в заходящем дереве из каждой вершины кроме корня исходит ровно одна дуга, то удаляется та дуга цикла, исход которой являлся также исходом некоторой дуги остовного дерева последнего уровня. После разрыва всех циклов последнего уровня начинается разрыв циклов предыдущего уровня по тому же принципу.

2.4. Можно ли построить минимальный ориентированный лес. Работа алгоритма Чу-Ли-Эдмондса существенно использует тот момент, что корень n исходно задан. Он ни разу не попадает в систему вложенных циклов и процедура и построения и разрыва циклов эту вершину не использует. При назначении корнем другой вершины (скажем, вершины m), некоторые действия можно оптимизировать, не повторяя всю процедуру полностью заново, поскольку для всех вершин кроме n и m используются те же веса. Однако уже система первых циклов будет другая. И если искать "глобальное" (безотносительно корня) минимальное остовное дерево, то, вообще говоря, алгоритм придётся применять N раз, объявляя каждую вершину корнем строящегося остовного дерева. Сложность алгоритма возрастает в N раз, если корень не фиксирован.

Отметим, что алгоритм Чу-Ли-Эдмондса, практически без изменений пригоден для поиска остовного леса минимального веса с заданным набором корней $\mathcal{K}$. На начальном этапе из каждой вершины i множества $\mathcal{N} \setminus \mathcal{K}$ испускается по одной дуге, имеющей минимальный вес среди дуг, исходящих из i. Если полученный граф – заходящий лес, то он минимальный. Если нет, то граф содержит циклы и применяются ровно те же действия, что и в алгоритме Чу-Ли-Эдмондса. Однако, если требуется построить минимальный остовный лес, состоящий из k деревьев, то необходимо перебрать в качестве множества корней $\mathcal{K}$ все k-элементные подмножества множества вершин $\mathcal{N}$. Это добавляет биномиальный множитель C_N^k в сложность алгоритма, что существенно её увеличивает. Если же требуется найти по представителю минимальных лесов при всех $k = 1, 2, \ldots, N$, то сложность становится экспоненциальной, поскольку сумма биномиальных коэффициентов равна 2^N. Сам алгоритм становится непригодным для использования.

Еще один важный вопрос состоит в том, что если известен минимальный остовный лес, состоящий из k деревьев, можно ли как-то использовать эту информацию при построении (сходно с алгоритмом Краскала) минимального леса с меньшим количеством деревьев.

Нашей целью является как раз построение минимальных остовных лесов с произвольным числом деревьев. Сама же процедура предлагаемого в работе алгоритма является рекуррентной. Она основана на том, что минимальный лес, состоящий из k деревьев, с помощью специальных замен дуг, можно преобразовать в минимальный лес, состоящий из $(k-1)$ дерева.

§3. Используемые результаты [1]

В данной работе неоднократно применяется одно простое свойство [1, Следствие 2 из Леммы 1] замены дуг, исходящих из вершин некоторого множества, в двух произвольных лесах. Сформулируем его в несколько более широкой постановке.

Свойство 1. *Пусть F и G – леса, $\mathcal{V}G \subseteq \mathcal{V}F$, пусть $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{V}G$ такое подмножество множества вершин, в которое в лесе F дуги не заходят. Тогда граф $F^G_{\uparrow\mathcal{D}}$ является лесом.*

Приведём основной результат [1, Теорема 2 (о родственных лесах)] также в виде свойства.

Свойство 2. *Пусть $\mathcal{F}^k \neq \emptyset$, тогда любой лес из $\widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$ имеет потомка в $\widetilde{\mathcal{F}}^k$ и наоборот – любой лес из $\widetilde{\mathcal{F}}^k$ имеет предка в $\widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$.*

§4. Псевдо-родственные леса

Построение минимального леса $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ в виде потомка известного леса $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$ – это палка о двух концах. С одной стороны – это формально самые небольшие изменения, которые надо внести в лес F, чтобы получить минимальный лес с меньшим количеством корней. С другой стороны – это хоть и небольшие, но весьма специфичные изменения. Может оказаться удобнее внести больше изменений в лес F, но таких, которые проще контролировать, и при этом всё равно получить минимальный лес. В связи с этим введем определение понижающее степень родства (см. рис. 2).

Определение 1. Лес $F \in \mathcal{F}^{k+1}$ назовём *псевдо-предком* леса $G \in \mathcal{F}^k$, а G *псевдо-потомком* F, если найдётся такой корень j леса F, что: $\mathcal{K}_G = \mathcal{K}_F \setminus \{j\}$ и $G|_{\mathcal{V}T^F_l} = T^F_l$ при $l \in \mathcal{K}_G$. Такие леса будем называть псевдо-родственными.

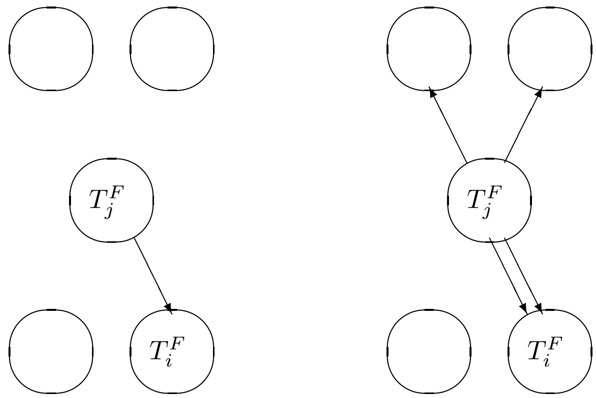


Рис. 2. Изображены только дуги, исходящие из множества $\mathcal{V}T_j^F$, у соответствующего потомка и псевдо-потомка леса F (слева направо).

В случае такой псевдо-родственной пары одно дерево T_j^F "распределяется" по остальным деревьям.

Введённое определение позволяют сформулировать более слабый вариант Свойства 2 родственных лесов.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{F}^k \neq \emptyset$, тогда любой лес из $\widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$ имеет псевдо-потомка в $\widetilde{\mathcal{F}}^k$ и наоборот – любой лес из $\widetilde{\mathcal{F}}^k$ имеет псевдо-предка в $\widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что любой потомок является, в частности, псевдо-потомком. И наоборот: любой предок, является, в том числе, и псевдо-предком. Поэтому по Свойству 2 утверждение теоремы тоже имеет место. □

§5. Задачи на минимизацию с выделенным подмножеством множества вершин

Поскольку рассматриваются задачи на минимизацию, примем следующее соглашение. Если в графе нет дуги (i, j), то соответствующий вес полагаем равным бесконечности: $v_{ij} = \infty$.

Пусть $\mathcal{D} \subset \mathcal{N}$. Нас будут интересовать только дуги, исходящие из вершин этого множества. Введём множество деревьев $\mathcal{T}^{\bullet}_{\mathcal{D}}$ с множеством вершин $\mathcal{D}$. Разобъём его также на непересекающиеся подмножества $\mathcal{T}^{\bullet l}_{\mathcal{D}}$, состоящие из деревьев с корнем в вершине $l \in \mathcal{D}$. Определим веса

$$\lambda^{\bullet}_{\mathcal{D}} = \min_{T \in \mathcal{T}^{\bullet}_{\mathcal{D}}} \Upsilon^T,\ \lambda^{\bullet l}_{\mathcal{D}} = \min_{T \in \mathcal{T}^{\bullet l}_{\mathcal{D}}} \Upsilon^T. \tag{2}$$

Таким образом, по определению величина $\lambda^{\bullet}_{\mathcal{D}}$ равна минимальному весу дерева с множеством вершин $\mathcal{D}$. Величина $\lambda^{\bullet l}_{\mathcal{D}}$ равна весу минимального дерева с заданным корнем l. Очевидно

$$\lambda^{\bullet}_{\mathcal{D}} = \min_{l \in \mathcal{D}} \lambda^{\bullet l}_{\mathcal{D}}. \tag{3}$$

Введём также множество остовных лесов $\mathcal{F}^{\bullet}_{\mathcal{D}}$, состоящих из лесов, в которых множество $\mathcal{D}$ содержит ровно один корень. Разобъём $\mathcal{F}^{\bullet}_{\mathcal{D}}$ на непересекающиеся подмножества $\mathcal{F}^{\bullet l}_{\mathcal{D}}$, состоящие из лесов, в которых этим корнем является вершина $l \in \mathcal{D}$. Отметим, что в любом подобном лесе вершины множества $\mathcal{D}$ могут принадлежить различным деревьям. Введём веса

$$\mu^{\bullet}_{\mathcal{D}} = \min_{F \in \mathcal{F}^{\bullet}_{\mathcal{D}}} \Upsilon^F_{\mathcal{D}}, \quad \mu^{\bullet l}_{\mathcal{D}} = \min_{F \in \mathcal{F}^{\bullet l}_{\mathcal{D}}} \Upsilon^F_{\mathcal{D}}. \tag{4}$$

Очевидно, что

$$\mu^{\bullet}_{\mathcal{D}} = \min_{l \in \mathcal{D}} \mu^{\bullet l}_{\mathcal{D}}. \tag{5}$$

Предложение 1. *Выполнены неравенства:*

$$\lambda^{\bullet}_{\mathcal{D}} \geqslant \mu^{\bullet}_{\mathcal{D}}, \quad \lambda^{\bullet l}_{\mathcal{D}} \geqslant \mu^{\bullet l}_{\mathcal{D}}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{T}^{\bullet}_{\mathcal{D}}$ $(\mathcal{T}^{\bullet l}_{\mathcal{D}})$. Дополнив дерево T вершинами из $\mathcal{N} \setminus \mathcal{D}$ (и, соответственно, пустыми деревьями состоящими из этих вершин), мы преобразовуем дерево T в некоторый остовный лес $F \in \mathcal{F}^{\bullet}_{\mathcal{D}}$ $(\mathcal{F}^{\bullet l}_{\mathcal{D}})$. Поэтому выполнены неравенства (6). $\square$

Замечание 1. В формированиии минимумов $\mu^{\bullet}_{\mathcal{D}}$ $(\mu^{\bullet l}_{\mathcal{D}})$ дуги, исходящие в соответствующих лесах из вершин $\mathcal{N} \setminus \mathcal{D}$, участия не принимают и не существенны для рассмотрения. Поэтому, если мы дополним дерево $T \in \mathcal{T}^{\bullet}_{\mathcal{D}}$ $(\mathcal{T}^{\bullet l}_{\mathcal{D}})$ до остовного леса $F \in \mathcal{F}^{\bullet}_{\mathcal{D}}$ $(\mathcal{F}^{\bullet l}_{\mathcal{D}})$ дугами, исходящими из вершин множества $\mathcal{N} \setminus \mathcal{D}$ произвольного остовного леса, то всё равно $\Upsilon^F_{\mathcal{D}} = \Upsilon^T$. Тем не менее, равенства в (6), вообще говоря, нет. Действительно, пусть $F \in \mathcal{F}^{\bullet}_{\mathcal{D}}$ $(\mathcal{F}^{\bullet l}_{\mathcal{D}})$. В F заходы дуг, исходящих из вершин множества $\mathcal{D}$ могут не принадлежать самому множеству $\mathcal{D}$. Поэтому индуцированный подграф $F|_{\mathcal{D}}$ – лес, вообще говоря, а не дерево (см. рис. 3).

Предложение 2. *Пусть $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$, $k = 1, 2, \cdots, N$, и $\mathcal{D}$ – множество вершин любого его дерева, а вершина $j \in \mathcal{D}$ – корень этого дерева, тогда*

$$\mu^{\bullet}_{\mathcal{D}} = \mu^{\bullet j}_{\mathcal{D}} = \lambda^{\bullet}_{\mathcal{D}} = \lambda^{\bullet j}_{\mathcal{D}} = \Upsilon^F_{\mathcal{D}}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}$ – множество вершин дерева T^F_j леса F. В дереве T^F_j исходят дуги из всех вершин множества $\mathcal{D}$ кроме корневой вершины j. Таким образом, $T^F_j \in \mathcal{T}^{\bullet j}_{\mathcal{D}}$, а значит

$$\lambda^{\bullet j}_{\mathcal{D}} \leqslant \Upsilon^{T^F_j} = \Upsilon^F_{\mathcal{D}}. \tag{8}$$

Покажем, что $\mu^{\bullet}_{\mathcal{D}}$ не может быть меньше, чем $\Upsilon^F_{\mathcal{D}}$. Пусть $G \in \mathcal{F}^{\bullet}_{\mathcal{D}}$ и на нём достигается указанный минимум: $\Upsilon^G_{\mathcal{D}} = \mu^{\bullet}_{\mathcal{D}}$. Рассмотрим граф $H = F^G_{\uparrow\mathcal{D}}$. По Свойству 1 граф H является лесом. Поскольку множество $\mathcal{D}$ содержит единственный корень леса G, то количество корней в H такое же как и в F, поэтому $H \in \mathcal{F}^k$. Имеем:

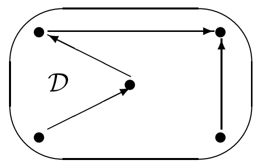
$$\phi^k \leqslant \Upsilon^H = \Upsilon^F - \Upsilon^F_{\mathcal{D}} + \Upsilon^H_{\mathcal{D}} = \phi^k - \Upsilon^F_{\mathcal{D}} + \mu^{\bullet}_{D}, \tag{9}$$

откуда с учётом (8) $\lambda^{\bullet j}_{\mathcal{D}} \leqslant \Upsilon^F_{\mathcal{D}} \leqslant \mu^{\bullet}_{\mathcal{D}}$. Однако из (5) и (6) следует, что $\lambda^{\bullet j}_{\mathcal{D}} \geqslant \mu^{\bullet}_{\mathcal{D}}$. □

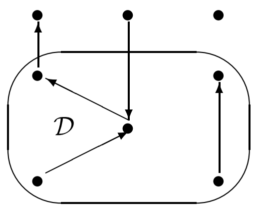
Замечание 2. Доказанное предложение, в частности, означает следующее. Узкая задача (2) на на поиск минимального дерева с множеством вершин $\mathcal{D}$, даёт то же значение минимума, что и более широкая задача (4) на поиск минимума веса леса, когда множество $\mathcal{D}$ содержит единственный его корень. Это равенство имеет место, если $\mathcal{D}$ – множество вершин любого дерева какого-либо минимального леса $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$. Для произвольных множеств $\mathcal{D}$ равенств (7) нет.

В дальнейшем веса типа $\mu^{\bullet}_{\mathcal{D}}$ как таковые непосредственно нигде не возникают, а требуется лишь определение более узких минимумов, равных весам $\lambda^{\bullet}_{\mathcal{D}}$. Но поскольку в качестве $\mathcal{D}$ испольуются только множества вершин деревьев минимальных лесов, для которых выполнено (7), то само это обозначение продолжает использоваться для удобства написания формул.

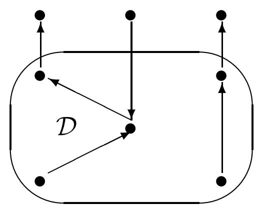
Определим как задачу минимизации еще один вид веса подмножества множества вершин. Введем множество остовных лесов $\mathcal{F}^{\circ}_{\mathcal{D}}$, в которых из всех вершин множества $\mathcal{D}$ исходят дуги. Определим веса



$T \in \mathcal{T}_{\mathcal{D}}^{\bullet}$



$F \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}^{\bullet}$



$F \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}^{\circ}$

Рис. 3. Дуги, исходящие в лесах (нижний ряд) из вершин множества $\overline{\mathcal{D}}$, в формировании весов, связанных с множеством $\mathcal{D}$, участия не принимают и могут быть произвольными.

$$\mu_{\mathcal{D}}^{\circ} = \min_{F \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}^{\circ}} \Upsilon_{\mathcal{D}}^{F}. \tag{10}$$

Дуги, исходящие в любом лесе $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}^{\circ}$ из вершин $\overline{\mathcal{D}}$, могут быть любыми. Они не принимают участия в формировании этих весов.

Для всех введённых весов $\lambda_{\mathcal{D}}^{\bullet}$ $(\mu_{\mathcal{D}}^{\bullet;\circ})$ полагаем их равными бесконечности, если соответствующее множество $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}^{\bullet}$ $(\mathcal{F}_{\mathcal{D}}^{\bullet;\circ})$ пусто.

Всюду в дальнейшем в качестве множества $\mathcal{D}$ выступают множества вершин деревьев некоторого минимального леса.

Веса более тонких подмножеств, нежели множества вершин деревьев, исследовался в [8], где была построена вложенная система алгебр подмножеств множества вершин $\mathcal{N}$.

§6. Примерение алгоритма Чу-Ли-Эдмондса к вычислению минимумов

6.1. Лес с заданным набором корней. Прежде всего отметим, как алгоритм Чу-Ли-Эдмондса применить для построения леса F, обладающего минимальным весом среди остовных лесов с фиксированным набором корней $\mathcal{S}$. Исходный граф V преобразуется в новый граф W путём слияния вершин, принадлежащих $\mathcal{S}$, в одну вершину $*$.

Для W выполнено: $\mathcal{V}W = \{*\} \cup \overline{\mathcal{S}}$; если $i, j \in \overline{\mathcal{S}}$ и $(i,j) \in \mathcal{A}V$, то $(i,j) \in \mathcal{A}W$ и вес этой дуги такой же как у исходного графа ($w_{ij} = v_{ij}$); $(i,*) \in \mathcal{A}W$, при $i \in \overline{\mathcal{S}}$, если существует $j \in \mathcal{S}$, такой что $(i,j) \in \mathcal{A}V$. При этом вес дуги $(i,*)$ полагается равным

$$w_{i*} = \min_{l \in \mathcal{S}} v_{il}. \tag{11}$$

Введение дуг $(*,j)$ не производится, поскольку они не используются при построении дерева с корнем в $*$.

Далее по алгоритму Чу-Ли-Эдмондса определяется минимальное дерево T графа W с корнем в $*$. Требуемый лес F находится по T, если отдельно помнить, какая именно дуга (i,j) исходного графа даёт минимум (11). При этом, при расклеивании вершины $*$ получится лес, в котором, возможно, не во все вершины множества $\mathcal{S}$ заходят дуги. Тем не менее все вершины множества $\mathcal{S}$ полагаются корнями, может быть, по итогу, пустых деревьев.

6.2. Древовидные веса множества (тип λ). Проще всего определяются величины $\lambda_{\mathcal{D}}^{\bullet l}$. Вводися граф $W = V|_{\mathcal{D}}$. Его минимальное дерево T_l в корнем в вершине l и даёт требуемый минимум: $\lambda_{\mathcal{D}}^{\bullet l} = \Upsilon^{T_l}$. Для вычисления величины $\lambda_{\mathcal{D}}^{\bullet}$ в соответствии с (3) требуется найти величины $\lambda_{\mathcal{D}}^{\bullet l}$ для всех $l \in \mathcal{D}$ и выбрать из них наименьшую. Тем самым алгоритм Чу-Ли-Эдмондса применяется $|\mathcal{D}|$ раз.

6.3. Лесовидные веса множества (тип μ). Для построения леса из $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}^{\bullet l}$, обладающего минимальным весом $\mu_{\mathcal{D}}^{\bullet l}$ (2), вершины из $\mathcal{S} = \overline{\mathcal{D}} \cup \{l\}$ объединяются в одну вершину $*$. Далее вводится граф W со множеством вершин $\{*\} \cup \overline{\mathcal{S}} = \{*\} \cup \mathcal{D} \setminus \{l\}$. Для его дуг выполнено: $(i,j) \in \mathcal{A}W$ при $i, j \in \mathcal{D} \setminus \{l\}$, если $(i,j) \in \mathcal{A}V$, вес такой дуги полагается равным $w_{ij} = v_{ij}$. Также вводятся дуги $(i,*)$, $i \in \mathcal{D} \setminus \{l\}$, их веса

определяются как
$$w_{i*} = \min_{j\in\mathcal{S}} v_{ij}. \tag{12}$$
Далее по алгоритму Чу-Ли-Эдмондса ищется минимальное остовное дерево графа W с корнем в $*$. Искомый лес $F \in \mathcal{F}^{\bullet l}_{\mathcal{D}}$ восстанавливается по этому дереву, если отдельно отмечать, какие именно дуги исходного графа дают минимумы в (12).

Для нахождения леса из $\mathcal{F}^{\bullet}_{\mathcal{D}}$, обладающего минимальным весом $\mu^{\bullet}_{\mathcal{D}}$, требуется в соответствии с (5) определить все величины $\mu^{\bullet l}_{\mathcal{D}}$, $l \in \mathcal{D}$, и выбрать из них наименьшую.

Для определения минимумов $\mu^{\circ}_{\mathcal{D}}$ вершины из $\overline{\mathcal{D}}$ сливаются в одну вершину $*$. Строится граф W на множестве вершин $\mathcal{D}\cup\{*\}$. Множество его дуг состоит из всех $(m,n) \in \mathcal{A}V$ при $m,n \in \mathcal{D}$, с теми же весами $w_{mn} = v_{mn}$, а также из дуг $(m,*)$ с весами
$$w_{m*} = \min_{l\in\overline{\mathcal{D}}} v_{ml},\ m \in \mathcal{D}\ . \tag{13}$$
Далее строится минимальное остовное дерево графа W с корнем в вершине $*$. По нему восстанавливается соответствующий лес из $\mathcal{F}^{\circ}_{\mathcal{D}}$.

§7. Минимальные псевдо-родственные леса

Лемма 1. *Пусть $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$, Q – псевдо-потомок леса F, $\mathcal{K}_F = \mathcal{K}_Q \cup \{j\}$, тогда $\Upsilon^{Q}_{\mathcal{V}T^F_j} \geqslant \mu^{\circ}_{\mathcal{V}T^F_j}$. При этом существует такой псевдо-потомок R, у которого $\mathcal{K}_R = \mathcal{K}_Q$ и выполнено $\Upsilon^{R}_{\mathcal{V}T^F_j} = \mu^{\circ}_{\mathcal{V}T^F_j}$.*

Доказательство. В лесе Q по определению псевдо-потомка из всех вершин множества $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^F_j$ исходят дуги. Таким образом, $Q \in \mathcal{F}^{\circ}_{\mathcal{D}} \neq \emptyset$. А значит $\mu^{\circ}_{\mathcal{D}} \leqslant \Upsilon^{Q}_{\mathcal{D}}$.

Пусть теперь $G \in \mathcal{F}^{\circ}_{\mathcal{D}}$ и для него $\Upsilon^{G}_{\mathcal{D}} = \mu^{\circ}_{\mathcal{D}}$. Введём граф $R = F^{G}_{\uparrow\mathcal{D}}$. По Свойству 1 R – лес. Поскольку множество $\mathcal{D}$ содержит ровно один корень леса F (вершину j) и не содержит корней леса G, то $R \in \mathcal{F}^k$. По построению R – псевдо-потомок леса F, у которого $\{j\} = \mathcal{K}_F \setminus \mathcal{K}_R$ и $\Upsilon^{R}_{\mathcal{D}} = \Upsilon^{G}_{\mathcal{D}} = \mu^{\circ}_{\mathcal{D}}$. □

Теорема 2. *Пусть $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$, G – псевдо-потомок леса F, $\mathcal{K}_F = \mathcal{K}_G \cup \{j\}$. Тогда для того, чтобы $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$, необходимо и достаточно, чтобы*
$$\Upsilon^{G}_{\mathcal{V}T^F_j} = \mu^{\circ}_{\mathcal{V}T^F_j} \tag{14}$$

и

$$\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T_j^F} - \mu^{\bullet}_{\mathcal{V}T_j^F} = \min_{l\in\mathcal{K}_F}\left(\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T_l^F} - \mu^{\bullet}_{\mathcal{V}T_l^F}\right). \tag{15}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что выполнение (15) нуждаются в проверке лишь для тех корней l, для которых $\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T_l^F} < \infty$, то есть когда существует псевдо-потомок Q, для которого $\{l\} = \mathcal{K}_F \setminus \mathcal{K}_Q$.

Введём для удобства для леса F множество всех его псевдо-потомков $\mathcal{P}^F$. Оно разбивается на непересекающиеся множества псевдо-потомков $\mathcal{P}_l^F$, $l \in \mathcal{K}_F$, в которых вершина l не является корнем: $R \in \mathcal{P}_l^F \Leftrightarrow R \in \mathcal{P}^F$ и $\mathcal{K}_F = \mathcal{K}_R \cup \{l\}$. Согласно Теореме 1 среди псевдо-потомков минимального леса F найдётся минимальный псевдо-потомок, то есть

$$\min_{Q\in\mathcal{P}^F}\Upsilon^Q = \min_{l\in\mathcal{K}_F}\min_{Q\in\mathcal{P}_l^F}\Upsilon^Q = \phi^k.$$

Пусть Q – некоторый псевдо-потомок леса F (не обязательно минимальный) и l – единственный корень леса F, который не является корнем леса Q, то есть $Q \in \mathcal{P}_l^F$. При этом, леса F и Q отличаются лишь дугами, исходящими из вершин множества $\mathcal{V}T_l^F$. Имеем:

$$\Upsilon^Q - \Upsilon^F = \Upsilon^Q_{\mathcal{V}T_l^F} - \Upsilon^F_{\mathcal{V}T_l^F} = \Upsilon^Q_{\mathcal{V}T_l^F} - \Upsilon^{T_l^F}.$$

По Предложению 2 выполнено (7) и последнее равенство принимает вид

$$\Upsilon^Q = \Upsilon^F + \Upsilon^Q_{\mathcal{V}T_l^F} - \mu^{\bullet}_{\mathcal{V}T_l^F}\ ,\ \{l\} = \mathcal{K}_F \setminus \mathcal{K}_Q\ . \tag{16}$$

Рассмотрим минимум этого выражения по всем псевдо-потомкам Q.

$$\min_{Q\in\mathcal{P}^F}\Upsilon^Q = \min_{l\in\mathcal{K}_F}\min_{Q\in\mathcal{P}_l^F}\Upsilon^Q = \Upsilon^F + \min_{l\in\mathcal{K}_F}\min_{Q\in\mathcal{P}_l^F}(\Upsilon^Q_{\mathcal{V}T_l^F} - \mu^{\bullet}_{\mathcal{V}T_l^F}). \tag{17}$$

Согласно Лемме 1 минимумом величины $\Upsilon^Q_{\mathcal{V}T_l^F}$ является число $\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T_l^F}$ и этот минимум достижим. Поэтому минимум веса Υ^Q при фиксированном l имеет место, когда $\Upsilon^Q_{\mathcal{V}T_l^F} = \mu^{\circ}_{\mathcal{V}T_l^F}$, то есть

$$\min_{Q\in\mathcal{P}_l^F}(\Upsilon^Q_{\mathcal{V}T_l^F} - \mu^{\bullet}_{\mathcal{V}T_l^F}) = \min_{Q\in\mathcal{P}_l^F}\Upsilon^Q_{\mathcal{V}T_l^F} - \mu^{\bullet}_{\mathcal{V}T_l^F} = \mu^{\circ}_{\mathcal{V}T_l^F} - \mu^{\bullet}_{\mathcal{V}T_l^F}. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (17), получаем

$$\min_{Q\in\mathcal{P}^F}\Upsilon^Q = \Upsilon^F + \min_{l\in\mathcal{K}_F}(\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T_l^F} - \mu^{\bullet}_{\mathcal{V}T_l^F}). \tag{19}$$

Таким образом, из всех псевдо-потомков (при разных корнях l), на которых реализуются минимумы $\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T^F_l}$, полный минимум веса Υ^Q достигается не на том псевдо-потомке, для которого величина $\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T^F_l}$ минимальна, а на псевдо-потомке, для которого величина приращения веса $\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T^F_l} - \mu^{\bullet}_{\mathcal{V}T^F_l}$ в (19) минимальна среди всех деревьев T^F_l леса F. Этот минимум достигается при некотором $j \in \mathcal{K}_F$. По Лемме 1 существует псевдо-потомок G, такой что $\Upsilon^G_{\mathcal{D}} = \mu^{\circ}_{\mathcal{D}}$, где $\mathcal{D} = \mathcal{V}T^F_j$. Тогда G является псевдо-потомком леса F, имеющим минимально возможный вес среди всех псевдо-потомков. Поскольку по Теореме 1 минимальный псевдо-потомок существует, то ничего иного не остаётся, как $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$. Таким образом, если для какого-то псевдо-потомка G графа F выполнены условия (14) и (15), то он является минимальным.

Пусть теперь G – минимальный псевдо-потомок леса F, для которого $\{j\} = \mathcal{K}_F \setminus \mathcal{K}_G$. Имеем:

$$\Upsilon^G = \Upsilon^F + \Upsilon^G_{\mathcal{D}} - \mu^{\bullet}_{\mathcal{D}}, \quad \mathcal{D} = \mathcal{V}T^F_j. \tag{20}$$

G имеет минимальный вес не только среди всех псевдо-потомков, но и вообще среди всех лесов из $\mathcal{F}^k$. В выражении (20) минимальность веса G означает, что величина $\Upsilon^G_{\mathcal{D}}$ минимально возможная, то есть выполнено (14). Действительно, согласно Лемме 1 $\Upsilon^G_{\mathcal{D}} \geqslant \mu^{\circ}_{\mathcal{D}}$ и существует псевдо-потомок R, для которого $\Upsilon^R_{\mathcal{D}} = \mu^{\circ}_{\mathcal{D}}$. Графы G и R различаются только дугами, исходящими из вершин множеста $\mathcal{D}$. Имеем:

$$\phi^k \leqslant \Upsilon^R = \Upsilon^G - \Upsilon^G_{\mathcal{D}} + \Upsilon^R_{\mathcal{D}} = \phi^k - \Upsilon^G_{\mathcal{D}} + \mu^{\circ}_{\mathcal{D}}, \tag{21}$$

откуда $\Upsilon^G_{\mathcal{D}} \leqslant \mu^{\circ}_{\mathcal{D}}$. Таким образом, (14) имеет место.

Для произвольного псевдо-потомка Q леса F можно записать

$$0 \leqslant \Upsilon^Q - \Upsilon^G = \left(\Upsilon^Q - \Upsilon^F\right) - \left(\Upsilon^G - \Upsilon^F\right). \tag{22}$$

Если $\{l\} = \mathcal{K}_F \setminus \mathcal{K}_Q$, то с учётом (16) и (20) последнее неравенство преобразуется к виду

$$0 \leqslant \left(\Upsilon^Q_{\mathcal{V}T^F_l} - \mu^{\bullet}_{\mathcal{V}T^F_l}\right) - \left(\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T^F_j} - \mu^{\bullet}_{\mathcal{V}T^F_j}\right). \tag{23}$$

Оно выполнено для любых псевдо-потомков, в том числе и когда вес $\Upsilon^Q_{\mathcal{V}T^F_l}$ равен своему минимально возможному значению: $\Upsilon^Q_{\mathcal{V}T^F_l} = \mu^{\circ}_{\mathcal{V}T^F_l}$. Таким образом, (15) тоже имеет место. $\square$

Следствие 1. *Пусть* $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}$, *тогда*

$$\phi^k - \phi^{k+1} = \min_{l \in \mathcal{K}_F} \left(\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T_l^F} - \mu^{\bullet}_{\mathcal{V}T_l^F} \right). \tag{24}$$

Доказательство. Пусть $G \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ – псевдо-потомок леса F и $\{j\} = \mathcal{K}_F \setminus \mathcal{K}_G$. Имеем: $\phi^{k+1} = \Upsilon^F$, $\phi^k = \Upsilon^G$. Из (16)

$$\phi^k - \phi^{k+1} = \Upsilon^G - \Upsilon^F = \Upsilon^G_{\mathcal{V}T_j^F} - \mu^{\bullet}_{\mathcal{V}T_j^F}. \tag{25}$$

Подставляя сюда (14) и учитывая (15), получаем (24). □

Замечание 3. Заметим, что согласно Предложению 2, для леса G из утверждения Теоремы 2 автоматически выполнено:

$$\mu^{\bullet}_{\mathcal{D}} = \lambda^{\bullet}_{\mathcal{D}} = \Upsilon^G_{\mathcal{D}}, \tag{26}$$

где $\mathcal{D}$ – множество вершин любого дерева леса G.

§8. Алгоритм построения минимальных лесов

Теорема 2 является обоснованием корректности следующего алгоритма.

Старт алгоритма – пустой остовный лес $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^N$. Для него $\mu^{\bullet}_{\mathcal{V}T_l^F} = \lambda^{\bullet}_{\mathcal{V}T_l^F} = \lambda^{\bullet}_{\{l\}} = \mu^{\bullet}_{\{l\}} = 0$, $l \in \mathcal{K}_F = \mathcal{N}$.

Нулевой шаг. Для множества вершин $\mathcal{V}T_l^F$ каждого дерева пустого леса F (то есть для каждой вершины l) находится дуга минимального веса, исходящая из неё. Полагаем $\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T_l^F} = \mu^{\circ}_{\{l\}} = \min\limits_{m \neq l} v_{lm}$. Определяется минимум среди этих величин. Пусть он равен $\mu^{\circ}_{\{j\}} = v_{jn}$:

$$\min_{l \in \mathcal{K}_F} (\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T_l^F} - \mu^{\bullet}_{\mathcal{V}T_l^F}) = \min_{l \in \mathcal{N}} (\mu^{\circ}_{\{l\}} - \mu^{\bullet}_{\{l\}}) = \mu^{\circ}_{\{j\}} - \mu^{\bullet}_{\{j\}} = \mu^{\circ}_{\{j\}} = v_{jn}.$$

Добавляем к пустому лесу дугу v_{jn}. Число деревьев сократилось на единицу. Полученный граф становится новым исследуемым лесом F.

Дальнейшие шаги $i = 1, 2, \ldots, N-2$, происходят рекуррентным образом.

i-ый шаг. Исследуемый лес F состоит из $N - i$ деревьев.

a) Для всех деревьев построенного леса $F \in \widetilde{\mathcal{F}}^k$ обновляются (автоматически) веса $\mu^{\bullet}_{\mathcal{V}T_l^F} = \lambda^{\bullet}_{\mathcal{V}T_l^F} = \Upsilon^{T_l^F}$.

b) Для деревьев леса F определяются веса $\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T_l^F}$ по алгоритму Чу-Ли-Эдмондса (см. пункт 6.3 настоящей статьи) и определяются остовные леса H^l, для которых $\Upsilon^{H^l}_{\mathcal{V}T_l^F} = \mu^{\circ}_{\mathcal{V}T_l^F}$. Эти веса обновляются не для всех деревьев, а лишь для тех, которые изменили число вершин по сравнению с предыдущим шагом. Если оказывается, что все величины $\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T^F_l} = \infty$, действие алгоритма прерывается. Остовной лес F имеет минимально возможное количество деревьев.

c) В соответствии с (15) определяется минимум приращения

$$\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T^F_l} - \mu^{\bullet}_{\mathcal{V}T^F_l}. \qquad (27)$$

Пусть этот минимум достигается, когда индекс равен j. Величине $\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T^F_j}$ соответствует остовной лес H^j, определённый в пункте b): $\Upsilon^{H^j}_{\mathcal{V}T^F_j} = \mu^{\circ}_{\mathcal{V}T^F_j}$.

d) Полагаем $F := F^{H^j}_{\uparrow\mathcal{V}T^F_j}$. Переход к следующему шагу.

Алгоритм заканчивает работу, когда последний построенный лес состоит из одного дерева, или прекращает работу, если на некотором шаге для построенного леса F все величины $\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T^F_j}$ равны ∞. Это означает, что если число деревьев в последнем построенном лесе F равно k, то это минимально возможное число деревьев в остовном лесе и, что $\mathcal{F}^{k-1} = \emptyset$.

Если исходный граф имеет хотя бы одно остовное дерево, то результатом работы алгоритма будет набор из N минимальных остовных лесов – по одному представителю, состоящему из $k = 1, 2, \ldots, N$ деревьев.

§9. Сложность алгоритма

9.1. Общие замечания. Поскольку алгоритм использует в качестве составляющей алгоритм Чу-Ли-Эдмондса поиска минимального остовного дерева с выделенным корнем, то для него стандартная реализация [5] имеет время $O(NM)$, где N – число вершин, а M – число дуг. Реализация Тарьяна [6] имеет затраты $O(M \log N)$ на разреженных графах и $O(N^2)$ на плотных. Наиболее быстрый вариант предложен в [7] и занимает время $O(M + N \log N)$, что в случае плотных графов также превращается в $O(N^2)$.

Отметим, что если требуется найти минимальное остовное дерево безотносительно корня, то сложность любой реализации возрастает в N раз, поскольку алгоритм требуется применить поочерёдно к каждой вершине, назначаемой корнем, и сложность становится $O(N^3)$.

Будем для удобства считать, что граф V плотный ($M \sim N^2$), и, что используемый вариант алгоритма Чу-Ли-Эдмондса имеет сложность $O(N^2)$ при фиксированном корне.

Для корректной оценки сложности предложенного алгоритма подсчитаем максимальное число операций.

9.2. Определение сложности. На нулевом шаге требуется вычисление N минимумов $\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T_l^F} = \mu^{\circ}_{\{l\}} = \min\limits_{m \neq l} v_{lm}$, что формально занимает $O(N \log N)$ операций. Однако лучше произвести полное упорядочение весов дуг, исходящих из каждой вершины. Это занимает $O(N^2 \log N)$ действий. В этом случае для любого подмножества $\mathcal{D}$ множества вершин и любой вершины $m \in \mathcal{D}$, величины (13), которые используются в пункте b) для определения весов $\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T_l^F}$, находятся автоматически.

i-ый шаг.

a) При текущем числе деревьев $k = N - i$ леса F "расфомировавшееся" на предыдущем шаге дерево заведомо имеет не более $i = N - k$ вершин. Поэтому обновление весов $\mu^{\bullet}_{\mathcal{V}T_l^F}$ оставшихся деревьев, которым достались часть вершин исчезнувшего, требует не более i операций сложения – веса i дуг, исходящих из вершин исчезнувшего дерева, добавляются к весам деревьев, число вершин которых изменилось.

b) Пусть дерево леса F с корнем в вершине l, содержит n_l вершин. Тогда $\sum\limits_{l \in \mathcal{K}_F} n_l = N$ и $n_l \geqslant 1$. Обновление весов $\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T_l^F}$ требуется производить не для всех k деревьев, а лишь для тех, к которым добавились вершины на предыдущем шаге. Даже если считать, что изменены все k весов $\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T_l^F}$ (что возможно лишь при $k < N/2$), то их вычисление по алгоритму Чу-Ли-Эдмондса занимает $O(\sum\limits_{l \in \mathcal{K}_F} n_l^2)$ операций. Эта величина максимальна (если число деревьев k не очень велико и не близко к N, то есть не на самых первых шагах алгоритма), когда одно из деревьев содержит максимально возможное число вершин, а именно $(N - k + 1)$. То есть сложность равна $O((N - k + 1)^2)$. Но в любом случае $\sum\limits_{l \in \mathcal{K}_F} n_l^2 \leqslant (\sum\limits_{l \in \mathcal{K}_F} n_l)^2 = N^2$, поэтому независимо от номера шага (или текущего числа деревьев) сложность не превосходит $O(N^2)$.

c) Вычисление приращений $\mu^{\circ}_{\mathcal{V}T_l^F} - \mu^{\bullet}_{\mathcal{V}T_l^F}$ занимает k действий сложения. Определение минимального из них занимает порядка $\log k$ действий сравнения.

Как и следовало ожидать, основные затраты алгоритма связаны с пунктом b), где, собственно, и происходит применение алгоритма Чу-Ли-Эдмондса. Сложность на каждом шаге (кроме нулевого) не превышают оценки $O(N^2)$. Тем самым, полная сложность предложенного комбинированного алгоритма составляет $O(N^3)$.

Одним из результатов работы алгоритма является в том числе и остовное минимально дерево. Если же минимальное остовное дерево находить прямо по алгоритму Чу-Ли-Эдмондса с перебором корней, то сложность обоих алгоритмов одинакова и равна $O(N^3)$.

9.3. Итог. Если предложенный алгоритм применять к поиску остовного минимального дерева, то он имеет ту же сложность, что и алгоритм Чу-Ли-Эдмондса с перебором корней. При этом алгоритм Чу-Ли-Эдмондса вынужденно вычисляет и минимальные остовные деревья с выделенным корнем, последовательно назначая каждую вершину корневой. В предложенном же алгоритме находится лишь одно минимальное остовное дерево (безотносительно корня). Однако, попутно последовательно находятся минимальные леса, состоящие из k деревьев, для всех $k = 1, 2, \ldots, N$.

Если же задача состоит в поиске минимального остовного леса, то предложенный алгоритм немедленно становится эффективнее алгоритма Чу-Ли-Эдмондса, уже при числе деревьев равном 2. Действительно, применение алгоритма Чу-Ли-Эдмондса потребует перебора всех пар корней и его сложность будет $C_N^2 \cdot O(N^2) = O(N^4)$, тогда как в предложенном алгоритме ничего не изменится. С увеличением числа деревьев сложность алгоритма Чу-Ли-Эдмондса будет возрастать, поскольку для его применения требуется назначать корни. При поиске минимального остовного леса, состоящего из k деревьев, и имеющего фиксированные корни, алгоритм Чу-Ли-Эдмондса работает с графом, эффективное число вершин которого равно $(N-k+1)$, и имеет сложность $O((N-k+1)^2)$. Если же требуется найти минимальный остовной лес безотносительно того, какие вершины, являются корнями, то приходится производить перебор вершин, назначаемых корнями. Это значает появление биномиального множителя при сложности и она оказывается равной $C_N^k \cdot O((N-k+1)^2)$. Предложенный же алгоритм останется прежним с той же сложностью $O(N^3)$, если его проводить до конца – вплоть до получения минимального остовного дерева. Но алгоритм можно и прервать, когда число деревьев в промежуточном минимальном лесе становится равным k. Это несколько уменьшает затраты на вычисление.

Отметим также, что предложенный алгоритм без изменений применяется к задаче на древовидный аналог связности. Именно: для невзвешенного орграфа найти остовной лес, содержащий наименьшее число деревьев. Здесь, все веса дуг оргафа полагаются равными единице и далее запускается алгоритм. Он прекращает работу, когда построит требуемый остовной лес.

§10. О применении минимальных остовных лесов

Сама задача о построении минимальных остовных лесов (с некоторым фиксированным количеством деревьев) взвешенного орграфа не была решена ранее. Тем не менее это важная задача хотя бы в силу того обстоятельства, что любые миноры квадратных матриц могут быть представлены в виде суммы (вообще говоря, знакопеременной) по заходящим (или исходящим) лесам орграфа [9], для которого исходная матрица является взвешенной мартицей смежности, или матрицей Лапласа (или Кирхгофа). Главные миноры и миноры, в которых номера вычеркиваемых строк и столбцов отличаются не более чем на один индекс, имеют знакопостоянную форму записи по заходящим лесам [10]. В характеристическом многочлене, скажем, матрицы Лапласа, коэффициент при k-ой степени спектрального параметра состоит из знакопостоянной суммы произведений матричных элементов по k-компонентным остовным заходящим лесам. Более того, в компонентах соответствующих собственных векторов в параметрическом представлении коэффициенты при степенях спектрального параметра вновь составлены из некоторых сумм произведений матричных элементов по заходящим лесам. Эти суммы также почти всегда (во всяком случае, внутри одной жордановой клетки или при отсутствии таковых) могут быть представлены в знакопостоянной форме [11]. Это обстоятельство для матриц, у которых все внедиагональные элементы одного знака (как, скажем, в вероятностных матрицах), позволяет пренебрегать малыми членами, по сравнению с большими, чего нельзя делать в стандартной записи миноров. При малых возмущениях динамических систем [12–14] асимптотическое по малому параметру ε поведение определяется матрицей генератора с элементами порядка $\exp(-v_{ij}/\varepsilon)$. Её спектральные характеристики определяются минимальными остовными лесами [15].

Список литературы

1. В. А. Буслов, *Структура ориентированных лесов минимального веса: родственные леса и неравенства выпуклости.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **475** (2018), 5–21.
2. R. C. Prim, *Shortest connection networks and some generalizations.* — Bell System Techn. J. **36** (1957), 1389–1401.
3. Joseph. B. Kruskal, *On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem.* — Proc. AMS. **7**, No. 1 (1956), 48–50.
4. Y. J. Chu, T. H. Liu, *On the shortest arborescence of a directed graph.* — Sci. Sinica, **14** (1965), 1396–1400.
5. J. Edmonds, *Optimum branchings* . — J. Res. Nat. Bur. Standards **71**, No. B (1967), 233-240.
6. R. E. Tarjan, *Finding optimum branchings.* — Networks, No. 1, **7** (1977).
7. H. N. Gabov, Z. Galil, T. Spencer, R. E. Tarjan, *Efficient Algorithms for Finding Minimum Spanning Trees in Undirecrted and Directed Graphs.* — Combinatorica, No. 2, **6** (1986), 109–122.
8. В. А. Буслов, *Структура ориентированных лесов минимального веса: алгебры подмножеств множества вершин.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **488** (2019), 5–30.
9. В. А. Буслов, *О коэффициентах характеристического многочлена лапласиана взвешенного ориентированного графа и теореме о всех минорах.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **427** (2014), 5–21.
10. В. А. Буслов, *О характеристическом многочлене и собственных векторах в терминах древовидной структуры орграфа.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **450** (2016), 14–36.
11. В. А. Буслов, *О связи кратностей спектра со знаками слагаемых в компонентах собственных векторов в древовидной структуре.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **464** (2017), 14–36.
12. В. А. Буслов, К. А. Макаров, *Иерархия масштабов времени при малой диффузии* — ТМФ **76**, No. 2 (1988), 219–230.
13. В. А. Буслов, К. А. Макаров, *Времена жизни и низшие собственные значения оператора малой диффузии.* — Мат. заметки **51**, No. 1 (1992), 20–31.
14. А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, *Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений.* — М. (1979), 429.
15. А. Д. Вентцель, *Об асимптотике собственных значений матриц с элементами порядка* $\exp\{-V_{ij}/2\varepsilon^2\}$. — ДАН СССР **202**, No. 2 (1972), 263–266.

Buslov V. A. Algorithm for sequential construction of spanning minimal directed forests

For a weighted digraph, an efficient algorithm for constructing spanning forests of the minimum weight for an arbitrary number of trees is proposed, up to obtaining the minimum spanning tree, if it exists. Algorithm consists in a sequential increase in the number of arcs (decrease in the number of trees) while maintaining a certain degree of affinity between minimal forests when the number of trees changes. The correctness of the algorithm is proved and its complexity is determined. The result of the algorithm is a set of minimum spanning forests consisting of k trees for all admissible k. Its complexity does not exceed $O(N^3)$.

Санкт-Петербургский государственный
Университет, физический факультет,
кафедра вычислительной физики
198504 Санкт-Петербург, Старый Петергоф,
ул. Ульяновская, д.3
E-mail: v.buslov@spbu.ru

Поступило 28 ноября 2020 г.