Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 496, 2020 г.

П. М. Штейнер

КОНВЕРТАЦИЯ СТОЛБЦОВОЙ МАЖОРИЗАЦИИ

§1. Введение

Пусть $M_{n,m}$ обозначает множество всех действительных $n \times m$ матриц, пишем M_n, если $m = n$. В статье будут использоваться следующие матрицы подходящих размеров: I – единичная матрица, O – нулевая матрица, E_{ij} – матрица с 1 в (i, j)-й позиции и 0 в остальных, J – квадратная матрица из единиц. Транспонирование матрицы $A \in M_{n,m}$ обозначается $A^t \in M_{m,n}$. Через $A^{(j)}$ (соотв. $A_{(i)}$) обозначим j-й столбец (соотв. i-ю строку) матрицы A, $\mathcal{R}(A) = \{A_{(1)}, \dots, A_{(n)}\}$. Множество всех матриц перестановок порядка n обозначается P_n, а $P_{(ij)} \in P_n$ соответствует транспозиции чисел i и j, т.е. $P_{(ij)} = \sum\limits_{k=1}^{n} E_{kk} - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$. Для линейного оператора Φ на $\mathbb{R}^n$ его матрица в стандартном базисе обозначается $[\Phi]$. Максимальный (соотв. минимальный) элемент вектора $v \in \mathbb{R}^n$ обозначается $\max(v)$ (соотв. $\min(v)$).

Векторы из $\mathbb{R}^n$ считаются столбцами и отождествляются с соответствующими n-кортежами. j-й координатный вектор обозначается e_j, $e = (1, \dots, 1)^t$. Выпуклая оболочка множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$ обозначается $\mathrm{conv}(S)$.

Для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ $x^{\downarrow}$ обозначает вектор, полученный перестановкой координат x порядке невозрастания. Для векторов $x, v \in \mathbb{R}^n$ говорим, что x *мажорируется* v (обозн. $x \preceq v$), если $\sum\limits_{j=1}^{k} x_j^{\downarrow} \leqslant \sum\limits_{j=1}^{k} v_j^{\downarrow}$ при $k = 1, 2, \dots, n-1$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} x = \sum\limits_{j=1}^{n} v$.

Матрица называется *строчно-стохастической* (соотв. *столбцово-стохастической*), если все её элементы неотрицательны и их сумма по

Ключевые слова: матричная мажоризация, векторная мажоризация, монотонные отображения, линейные конвертеры.

Работа поддержана РНФ (грант 17-11-01124).

каждой строке (соотв. столбцу) равна 1. Множество всех $n\times n$ строчно-стохастических (соотв. столбцово-стохастических) матриц обозначается Ω_n^{row} (соотв. Ω_n^{col}). Если матрица является строчно- и столбцово-стохастической, то она называется *двояко-стохастической*. Согласно теореме Биркгофа–Неймана, множество Ω_n всех двояко-стохастических матриц размера $n \times n$ выпукло, а его вершинами являются матрицы перестановки, см. [22, Теорема I.2.A.2]. Множество Ω_n^{row} также выпукло, а его вершинами являются целочисленные строчно-стохастические матрицы, т.е. строчно-стохастические $(0, 1)$-матрицы. Множество целочисленных строчно-стохастических матриц обозначается через $\Omega_n^{\mathrm{row}}(0, 1)$.

В настоящей статье мы исследуем линейные конвертеры между разными типами мажоризаций. Первые такие операторы, а именно, линейные конвертеры из сильной мажоризации в направленную, были исследованы в [21]. Такие операторы есть, в точности, линейные отображения, сохраняющие сильную мажоризацию, или, что эквивалентно, направленную мажоризацию. В [15] были найдены все оставшиеся типы конвертеров между слабой, направленной и сильной мажоризацией.

Заметим, что из сильной мажоризации пар матриц следует их направленная мажоризация, а из нее следует слабая. Кроме того, конвертер из "более слабого" отношения в "более сильное" должен сохранять оба отношения. В общем случае, конвертер из "более сильного" отношения в "более слабое" не обязан сохранять никакое из них. Однако оказывается, что конвертеры из сильной мажоризации в направленную или слабую и из направленной в слабую являются в точности отображениями, сохраняющими сильную или, что эквивалентно, направленную мажоризацию.

Мы исследуем матричную мажоризацию, введенную в [6], и ее "транспонированный" аналог – столбцовую мажоризацию. В этом случае, мы характеризуем конвертеры между парами мажоризаций, не влекущих одна другую. Кроме того, мы приводим пример конвертера из "более сильной" мажоризации в "более слабую", не сохраняющего конвертируемые мажоризации.

Настоящая статья организована следующим образом. §2 содержит определения и основные свойства мажоризаций матриц. В §3 мы рассматриваем некоторые известные результаты об операторах, сохраняющих и конвертирующих мажоризации. В §4 мы характеризуем линейные конвертеры из столбцовой мажоризации в слабую, направленную и сильную. В §5 мы исследуем конвертеры в столбцовую мажоризацию. Наконец, §6 содержит некоторые теоретические контрпримеры.

§2. Мажоризации матриц

Пусть $\preceq$ обозначает отношение мажоризации. Существует несколько таких понятий, мы приводим некоторые из них. Пусть $A, B \in M_{n,m}$.

- *Слабая мажоризация*: $A \preceq^w B$, если существует такая матрица $R \in \Omega_n^{\mathrm{row}}$, что $A = RB$.
- *Направленная мажоризация*: $A \preceq^d B$, если $Ax \preceq Bx$ для любого вектора $x \in \mathbb{R}^m$.
- *Сильная мажоризация*: $A \preceq^s B$, если существует такая матрица $D \in \Omega_n$, что $A = DB$.
- *Матричная мажоризация*: $A \preceq^m B$, если существует такая матрица $R \in \Omega_m^{\mathrm{row}}$, что $A = BR$.
- *Двояко-стохастическая мажоризация*: $A \preceq^{ds} B$, если существует такая матрица $D \in \Omega_m$, что $A = BD$.

Из сильной мажоризации следует направленная, а из направленной следует сильная (см. лемму 2.4). Обратные импликации неверны (см. пример 2.5).

Классическая векторная мажоризация является частным случаем сильной и направленной мажоризаций для матриц с одним столбцом. Кроме того, двояко-стохастическая мажоризация является частным случаем матричной мажоризации.

Следующая теорема – результат Харди, Литлвуда и Полиа.

Теорема 2.1 ([22, теорема I.2.B.2]). *Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$. Тогда $a \preceq b$, если и только если $a \preceq^s b$ как $n \times 1$ матрицы.*

Следующая теорема называется теоремой Биркгофа–Неймана.

Теорема 2.2 ([22, теорема I.2.A.2]). *Элементы множества P_n матриц перестановок являются вершинами выпуклого множества Ω_n. Более того, Ω_n есть выпуклая оболочка множества P_n.*

Замечание 2.3. *Пусть* $a, b \in \mathbb{R}^n$*. Тогда* $a \preceq^d b$*, если и только если* $a \preceq^s b$ *как* $n \times 1$ *матрицы.*

Лемма 2.4 ([23, предложение 3.3])**.** *Для любых матриц* $A, B \in M_{n,m}$ *из* $A \preceq^s B$ *следует* $A \preceq^d B$*, а из* $A \preceq^d B$ *следует* $A \preceq^w B$*.*

Следующий пример показывает, что обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 2.5 ([23, примеры 1, 2])**.** *Пусть* $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \\ -3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ *и* $X = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{smallmatrix}\right)$*. Тогда* $X \preceq^w I$ *и* $E \preceq^d F$*, но* $X \not\preceq^d I$ *и* $E \not\preceq^s F$*.*

Однако, если $n \leqslant 3$, то направленная и сильная мажоризации эквивалентны.

Лемма 2.6 ([23, Следствие 3.22])**.** *Пусть* $A, B \in M_{n,m}$*, где* $n \leqslant 3$*. Тогда* $A \preceq^d B$*, если и только если* $A \preceq^s B$*.*

Напомним, что $\mathcal{R}(X)$ обозначает множество строк матрицы X.

Лемма 2.7 ([23, Предложение 3.3])**.** *Пусть* $A, B \in M_{n,m}$*. Тогда*

$$A \preceq^w B, \text{ если и только если } \mathcal{R}(A) \subseteq \operatorname{conv}(\mathcal{R}(B)).$$

Следствие 2.8. *Пусть* $a, b \in \mathbb{R}^n$*. Тогда* $a \preceq^w b$*, если и только если* $\max(a) \leqslant \max(b)$ *и* $\min(a) \geqslant \min(b)$*.*

Следующие свойства являются прямыми следствиями определений.

Замечание 2.9. *Пусть* $A, B \in M_{m,n}$*.*

(1) $A \preceq^s B$*, если и только если* $A^t \preceq^{ds} B^t$*.*
(2) *Из* $A \preceq^{ds} B$ *следует* $A \preceq^m B$*.*

Как было показано в замечании 2.9, сильная и двояко-стохастическая мажоризации совпадают с точностью до транспонирования матриц. Рассмотрим “транспонированную” версию матричной мажоризации.

Определение 2.10. *Пусть* $A, B \in M_{n,m}$. *Тогда* A столбцово мажорируется B *(обозн.* $A \preceq^c B$*), если существует такая матрица* $C \in \Omega_n^{\mathrm{col}}$, *что* $A = CB$.

Замечание 2.11. *Пусть* $A, B \in M_{m,n}$.

(1) $A \preceq^c B$, *если и только если* $A^t \preceq^m B^t$.
(2) *Из* $A \preceq^s B$ *следует* $A \preceq^c B$.

Для удобства мы используем столбцовую мажоризацию вместо матричной. Дело в том, что векторный случай матричной мажоризации предполагает, что векторы являются матрицами из $M_{1,m}$, а слабая, направленная, сильная и столбцовая предполагают, что векторы – матрицы из $M_{n,1}$. Это особенно существенно при исследовании линейных операторов. Кроме того, столбцовая, слабая и направленная мажоризации являются следствиями сильной.

Лемма 2.12. *Пусть* $A, B \in M_{1,m}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- $A = B$,
- $A \preceq^w B$,
- $A \preceq^d B$,
- $A \preceq^s B$,
- $A \preceq^c B$.

Доказательство. Это следует из того, что $\Omega_1 = \Omega_1^{\mathrm{row}} = \Omega_1^{\mathrm{col}} = \{1\}$. □

Далее мы всегда предполагаем, что $n > 1$.

Мажоризации имеют множество приложений, см. [18, 19] и содержащиеся в них ссылки. В частности, мажоризации используются для сравнения статистических экспериментов [27]. В [9] были рассмотрены мажоризации множеств матриц для сравнения серий статистических экспериментов. Иногда ограничение мажоризаций на некоторые подмножества $\mathbb{R}$ могут приводить к нетривиальным комбинаторным результатам, см. [4, 5, 6, 7, 8, 10].

Матричная мажоризация была введена и изучена в [6] и позднее исследовалась в линейной алгебре. В недавней статье в *Nature Communications* [13] матричная мажоризация была отправной точкой в обобщении, использованном для изучения базовых задач квантовой механики и квантовой термодинамики.

Важно уметь конструировать пары матриц, сравнимых в смысле разных типов мажоризации. Один из подходов – рассматривать образы пар, упорядоченных другой мажоризацией, при действии соответствующим конвертером (см. определение 3.5). Заметим, что множество операторов, сохраняющих отношение, совпадает с множеством операторов, конвертирующих его в себя.

§3. Линейные отображения, сохраняющие и конвертирующие мажоризации

Теория отображений, сохраняющих различные матричные отношения, множества, свойства и инварианты восходит к работам Фробениуса [12], Шура [26] и Дьедонне [11], в которых были охарактеризованы линейные отображения, сохраняющие определители, миноры и обратимость соответственно. За последнее столетие теория интенсивно развивалась, см., например, обзоры [20, 24]. В частности, линейные операторы на векторных пространствах, сохраняющие векторную мажоризацию были охарактеризованы Андо в [1].

Теорема 3.1 ([1, Следствие 2.7])**.** *Пусть Φ – линейный оператор на $\mathbb{R}^n$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Оператор Φ сохраняет векторную мажоризацию.*
(2) *Выполнено одно из следующих условий:*
  (a) $\Phi(x) = (e^t x)s$ *для некоторого вектора* $s \in \mathbb{R}^n$.
  (b) $\Phi(x) = \alpha P x + \beta J x$ *для некоторых чисел* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *и некоторой матрицы* $P \in P_n$.

Многие авторы внесли свой вклад в нахождение операторов, сохраняющих различные типы мажоризаций матриц, см. [3, 2, 21, 17, 16, 25, 14] и содержащиеся в них ссылки.

Определение 3.2. *Пусть Φ – линейный оператор на $M_{n,m}$, а $\preceq^x$ – некоторый тип мажоризации. Говорим, что Φ* сохраняет *мажоризацию $\preceq^x$, если из $A \preceq^x B$ следует, что $\Phi(A) \preceq^x \Phi(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$.*

Теорема 3.3 ([21, Теорема 2])**.** *Пусть Φ – линейный оператор на $M_{n,m}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Оператор Φ сохраняет направленную мажоризацию.*
(2) *Оператор Φ сохраняет сильную мажоризацию.*
(3) *Если $A \preceq^s B$, то $\Phi(A) \preceq^d \Phi(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$.*

(4) *Выполнено одно из следующих условий:*
   (a) *Существуют такие матрицы* $S_1, \ldots, S_m \in M_{n,m}$, *что* $\Phi(X) = \sum\limits_{j=1}^{m} (e^t X^{(j)}) S_j$.
   (b) *Существуют такие матрицы* $R, S \in M_m$ *и* $P \in P_n$, *что* $\Phi(X) = PXR + JXS$.

Теорема 3.4 ([17, Теорема 3.1]). *Пусть* Φ *– линейный оператор на* $M_{n,m}$. *Тогда* Φ *сохраняет* $\preceq^w$, *если и только если* $\Phi(X) = (aI+bP)XL$ *для любых* $X \in M_{n,m}$, *где* $L \in M_m$, $P \in P_n$, $P \neq I$, *a и b – такие действительные числа, что* $ab \leqslant 0$, *и если* $n \neq 2$, *то* $ab = 0$.

Линейные операторы, сохраняющие матричную мажоризацию были охарактеризованы в [16].

Существует множество мажоризаций, которые можно определить на пространстве матриц, и естественным образом возникает задача характеризации отображений, конвертирующих их между собой. Линейные конвертеры между слабой, направленной и сильной мажоризациями были получены в [15].

Определение 3.5. *Пусть* Φ *– линейный оператор на* $M_{n,m}$, *а* $\preceq^x, \preceq^y$ *– два типа мажоризации. Говорим что* Φ *конвертирует мажоризацию* $\preceq^x$ *в мажоризацию* $\preceq^y$, *если из* $A \preceq^x B$ *следует, что* $\Phi(A) \preceq^y \Phi(B)$ *для любых* $A, B \in M_{n,m}$.

Напомним, что сильная и направленная мажоризации совпадают, если $n \leqslant 3$. Для остальных значений n имеет место следующая теорема, характеризующая конвертеры из направленной мажоризации в сильную.

Теорема 3.6 ([15, Теорема 4.5]). *Пусть* Φ *– линейный оператор на* $M_{n,m}$, *где* $n > 3$. *Следующие утверждения эквивалентны:*
(1) *Если* $A \preceq^d B$, *то* $\Phi(A) \preceq^s \Phi(B)$ *для любых* $A, B \in M_{n,m}$.
(2) *Выполнено одно из следующих условий:*
   (a) *Существуют такие матрицы* $S_1, \ldots, S_m \in M_{n,m}$, *что* $\Phi(X) = \sum\limits_{j=1}^{m} (e^t X^{(j)}) S_j$.
   (b) *Существуют такие матрицы* $S \in M_m$, $P \in P_n$ *и* $R \in M_m$, *где* $\operatorname{rank} R \leqslant 1$, *что* $\Phi(X) = PXR + JXS$.

Теорема 3.7 ([15, Теорема 5.4]). *Пусть* Φ *– линейный оператор на* $M_{n,m}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Из* $A \preceq^w B$ *следует* $\Phi(A) \preceq^s \Phi(B)$ *для любых* $A, B \in M_{n,m}$.
(2) *Из* $A \preceq^w B$ *следует* $\Phi(A) \preceq^d \Phi(B)$ *для любых* $A, B \in M_{n,m}$.
(3) *Выполнено одно из следующих условий:*
   (a) $\Phi(X) = O$.
   (b) $n = 2$ *и существует такая матрица* $L \in M_m$, *что* $\Phi(X) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} XL$.

Теорема 3.8 ([15, Теорема 6.20]). *Пусть* Φ *– линейный оператор на* $M_{n,m}$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Оператор* Φ *сохраняет направленную мажоризацию.*
(2) *Оператор* Φ *сохраняет сильную мажоризацию.*
(3) *Если* $A \preceq^s B$, *то* $\Phi(A) \preceq^d \Phi(B)$ *для любых* $A, B \in M_{n,m}$.
(4) *Если* $A \preceq^d B$, *то* $\Phi(A) \preceq^w \Phi(B)$ *для любых* $A, B \in M_{n,m}$.
(5) *Если* $A \preceq^s B$, *то* $\Phi(A) \preceq^w \Phi(B)$ *для любых* $A, B \in M_{n,m}$.
(6) *Выполнено одно из следующих условий:*
   (a) *Существуют такие матрицы* $S_1, \ldots, S_m \in M_{n,m}$, *что* $\Phi(X) = \sum\limits_{j=1}^{m} (e^t X^{(j)}) S_j$.
   (b) *Существуют такие матрицы* $R, S \in M_m$ *и* $P \in P_n$, *что* $\Phi(X) = PXR + JXS$.

Следующий результат является обобщением теоремы 3.1.

Теорема 3.9 ([15, Теорема 6.14]). *Пусть* Φ *– линейный оператор на* $\mathbb{R}^n$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Оператор* Φ *сохраняет векторную мажоризацию.*
(2) *Если* $a \preceq b$, *то* $\Phi(a) \preceq^w \Phi(b)$ *для любых* $a, b \in \mathbb{R}^n$.
(3) *Выполнено одно из следующих условий:*
   (a) $\Phi(x) = (e^t x)s$ *для некоторого вектора* $s \in \mathbb{R}^n$.
   (b) $\Phi(x) = \alpha P x + \beta J x$ *для некоторых чисел* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *и некоторой матрицы* $P \in P_n$.

Оказывается, каждый линейный конвертер между сильной, направленной и слабой мажоризациями сохраняет хотя бы одну мажоризацию, которую конвертирует.

Целью настоящей статьи является исследование конвертеров между столбцовой и слабой (соотв. направленной или сильной) мажоризациями. В этом случае, существуют конвертеры из слабой (соотв. направленной или сильной) мажоризации в столбцовую, не сохраняющие ни одну из этих мажоризаций.

§4. Линейные конвертеры из столбцовой мажоризации

Далее мы рассматриваем столбцовую мажоризацию. Как было показано в замечании 2.11, для любых $A, B \in M_{n,m}$ выполнено $A \preceq^c B$, если и только если $A^t \preceq^m B^t$.

Лемма 4.1. *Пусть $R \in M_m$ – такая матрица, что из $A \preceq^c B$ следует $AR \preceq^w BR$ для любых $A, B \in M_{n,m}$. Тогда $R = O$.*

Доказательство. Предположим, что $R \neq O$. Без ограничения общности предположим, что $R_{(1)} \neq 0^t$. Пусть B – такая матрица, что $B^{(1)} = e$ и $B^{(j)} = 0$ для $j \in \{2, \dots, m\}$. Пусть матрица $C \in \Omega_n^{\mathrm{col}}$ такая, что $C_{(1)} = e^t$ и $C_{(i)} = 0^t$ для $i \in \{2, \dots, n\}$. Таким образом, $CB \preceq^c B$.

Тогда мы получаем, что $CBR \preceq^w BR$. Но $(CBR)_{(1)} = nR_{(1)}$, в то время как $(BR)_{(i)} = R_{(1)}$ для любых $i \in \{1, \dots, n\}$. Отсюда следует, что $(CBR)_{(1)} \notin \mathrm{conv}(\mathcal{R}(BR))$ и $CBR \not\preceq^w BR$ по лемме 2.7. □

Лемма 4.2. *Пусть $A, B \in M_{n,m}$ и $A \preceq^c B$. Тогда $e^t A = e^t B$ и $JA = JB$.*

Доказательство. Если $A \preceq^c B$, то $A = CB$ для некоторой матрицы $C \in \Omega_n^{\mathrm{col}}$. Отсюда следует, что $e^t A = e^t CB = e^t B$. Кроме того, $JA = ee^t A = ee^t B = JB$. □

Теорема 4.3. *Пусть Φ – линейный оператор на $M_{n,m}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Если $A \preceq^c B$, то $\Phi(A) \preceq^w \Phi(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$.*
(2) *Если $A \preceq^c B$, то $\Phi(A) \preceq^d \Phi(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$.*
(3) *Если $A \preceq^c B$, то $\Phi(A) \preceq^s \Phi(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$.*
(4) *Если $A \preceq^c B$, то $\Phi(A) = \Phi(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$.*
(5) *Выполнено одно из следующих условий:*
   (a) *Существуют такие матрицы $S_1, \dots, S_m \in M_{n,m}$, что $\Phi(X) = \sum\limits_{j=1}^{m} (e^t X^{(j)}) S_j$.*
   (b) *Существует такая матрица $S \in M_m$, что $\Phi(X) = JXS$.*

Доказательство. Поскольку из сильной мажоризации следует направленная, а из направленной следует слабая, мы получаем, что из (4) следует (3), откуда следует (2), откуда следует (1). Кроме того, (5) влечет (4) по лемме 4.2. Таким образом, необходимо показать только, что из (1) следует (5).

Предположим, что условие 1 выполнено. Пусть $A \preceq^s B$. Тогда $A \preceq^c B$. Из последнего следует, что $\Phi(A) \preceq^w \Phi(B)$. Таким образом, из $A \preceq^s B$ следует $\Phi(A) \preceq^w \Phi(B)$ для любых $A, B \in M_{n,m}$. Но тогда по теореме 3.8 Φ имеет вид (a) условия 5, или $\Phi(X) = PXR + JXS$ для некоторых матриц $R, S \in M_m$ и $P \in P_n$.

Таким образом, достаточно доказать, что, если $\Phi(X) = PXR+JXS$, то $R = O$. Пусть $A = CB$ для некоторой матрицы $C \in \Omega_n^{\mathrm{col}}$. Тогда $\Phi(A) \preceq^w \Phi(B)$, если и только если
$PAR + JAS \preceq^w PBR + JBS$, если и только если
$PCBR + JBS \preceq^w PBR + JBS$ (по лемме 4.2), если и только если
$PCBR + JBS = W(PBR) + W(JBS)$ для некоторой матрицы $W \in \Omega_n^{\mathrm{row}}$, если и только если
$PCBR + JBS = WPBR + JBS$ для некоторой матрицы $W \in \Omega_n^{\mathrm{row}}$, если и только если
$PCBR = WPBR$ для некоторой матрицы $W \in \Omega_n^{\mathrm{row}}$, если и только если
$PAR \preceq^w PBR$, если и только если
$AR \preceq^w BR$.

Таким образом, из $A \preceq^c B$ следует $AR \preceq^w BR$ для любых $A, B \in M_{n,m}$. По лемме 4.1, это значит, что $R = O$. Наконец, $\Phi(X) = JXS$ для некоторой матрицы $S \in M_m$. □

§5. О линейных конвертерах в столбцовую мажоризацию

Этот параграф посвящен отображениям векторного пространства. Для начала исследуем обратимость операторов из теоремы 3.1. Если оператор определяется формулой $\Phi(x) = (e^t)s$ для некоторого вектора $s \in \mathbb{R}^n$, то этот оператор необратим. Если же $\Phi(x) = \alpha Px + \beta Jx$ для некоторых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и некоторой матрицы $P \in P_n$, то оператор Φ может быть обратим.

Лемма 5.1. *Пусть* $P \in P_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Тогда матрица* $\alpha P + \beta J$ *обратима, если и только если* $\alpha \neq 0$ *и* $\alpha + n\beta \neq 0$. *Кроме того,* $(\alpha P + \beta J)^{-1} = \frac{1}{\alpha} P^{-1} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta n)} J$.

Доказательство. Матрица βJ вырождена. Кроме того,

$$(-n\beta P + \beta J)e = -n\beta e + n\beta e = 0.$$

Значит, матрица $\alpha P + \beta J$ вырождена, если $\alpha = 0$ или $\alpha + n\beta = 0$.

Заметим, что $JP = PJ = JP^{-1} = P^{-1}J = J$ и $JJ = nJ$.

Тогда $(\alpha P + \beta J)((\alpha + n\beta)P^{-1} - \beta J) = \alpha(\alpha + n\beta)I + \beta(\alpha + n\beta)J - \alpha\beta J - \beta^2 nJ = \alpha(\alpha + n\beta)I$. Откуда следует, что $(\alpha P + \beta J)^{-1} = \frac{1}{\alpha} P^{-1} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta n)} J$. □

Следствие 5.2. *Для любых* $P \in P_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *с условиями* $\alpha \neq 0$ *и* $\alpha + n\beta \neq 0$ *выполнено* $(\alpha P + \beta J)^{-1} = \alpha' P' + \beta' J$ *для некоторых* $P' \in P_n$, $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ *с условиями* $\alpha' \neq 0$ *и* $\alpha' + n\beta' \neq 0$.

Доказательство. По лемме 5.1, мы можем выбрать такие $P' = P^{-1}$, $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$ и $\beta' = -\frac{\beta}{\alpha(\alpha+n\beta)}$, что, в самом деле, $(\alpha P + \beta J)^{-1} = \frac{1}{\alpha} P^{-1} - \frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta n)} J = \alpha' P' + \beta' J$. Кроме того, $\alpha' \neq 0$ и $\alpha' + n\beta' = \frac{1}{\alpha} - \frac{n\beta}{\alpha(\alpha+n\beta)} = \frac{(\alpha+n\beta)-n\beta}{\alpha(\alpha+n\beta)} = \frac{1}{\alpha+n\beta} \neq 0$. □

Следствие 5.3. *Пусть* Φ *– линейный оператор на* $\mathbb{R}^n$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Оператор* Φ *обратим и конвертирует векторную мажоризацию в слабую.*
(2) $\Phi(x) = \alpha P x + \beta J x$ *для некоторых* $P \in P_n$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *удовлетворяющих условиям* $\alpha \neq 0$ *и* $\alpha \neq -n\beta$.

Доказательство. Сначала предположим, что $\Phi(x) = \alpha P x + \beta J x$, где $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq -n\beta$. Тогда оператор Φ обратим по лемме 5.1. Кроме того, по теореме 3.9, оператор Φ конвертирует векторную мажоризацию в слабую.

Далее предположим, что оператор Φ обратим и конвертирует векторную мажоризацию в слабую. Тогда, по теореме 3.9, $[\Phi] = se^t$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$ или $[\Phi] = \alpha P + \beta J$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $P \in P_n$.

$\Phi(x) \neq (e^t x)s$, поскольку матрица se^t вырождена. Таким образом, $\Phi(x) = \alpha P x + \beta J x$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq -n\beta$ по лемме 5.1. □

Лемма 5.4. *Пусть* Φ *– линейный оператор на* $\mathbb{R}^n$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Оператор* Φ *обратим и конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую.*
(2) $\Phi(x) = \alpha Px + \beta Jx$ *для некоторых* $P \in P_n$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *где* $\alpha \neq 0$ *и* $\alpha \neq -n\beta$.

Доказательство. Предположим сначала, что $\Phi(x) = \alpha Px + \beta Jx$, где $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq -n\beta$. Тогда оператор Φ обратим по лемме 5.1. Кроме того, по теореме 3.1, оператор Φ сохраняет векторную мажоризацию, что является более сильным утверждением, чем утверждение о том, что Φ конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую, см. замечание 2.11.

Далее предположим, что оператор Φ обратим и конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую. Обозначим $T = [\Phi]$.

1. Докажем, что $TQ^tT^{-1} \in \Omega_n^{\mathrm{col}}$ для любого $Q^t \in \Omega_n$. Рассмотрим $TQ^tT^{-1}e_j$ для каждого $j \in \{1, \ldots, n\}$. По теореме 2.1 имеем $Q^tT^{-1}e_j \preceq T^{-1}e_j$, а значит, $TQ^tT^{-1}e_j = \Phi(Q^tT^{-1}e_j) \preceq^c \Phi(T^{-1}e_j) = e_j$. Таким образом, существует такая матрица $C \in \Omega_n^{\mathrm{col}}$, что $(TQ^tT^{-1})^{(j)} = Ce_j = C^{(j)}$. Отсюда следует, что каждый столбец матрицы TQ^tT^{-1} является столбцом некоторой столбцово-стохастической матрицы. Итак, $TQ^tT^{-1} \in \Omega_n^{\mathrm{col}}$.

2. Рассмотрим оператор $\widetilde{\Phi}$, заданный формулой $\widetilde{\Phi}(v) = (T^{-1})^t v$. Тогда для любого $Q \in \Omega_n$ имеем

$$\widetilde{\Phi}(Qv) = (T^{-1})^t Qv = (T^{-1})^t QT^t (T^{-1})^t v = ((T^{-1})^t QT^t)\widetilde{\Phi}(v).$$

По пункту 1, матрица $(T^{-1})^t QT^t = (TQ^tT^{-1})^t$ является строчно-стохастической. Отсюда следует, что для любого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ и для любой матрицы $Q \in \Omega_n$ существует такая матрица $R \in \Omega_n^{\mathrm{row}}$, что $\widetilde{\Phi}(Qv) = R\widetilde{\Phi}(v)$. Отсюда следует, что оператор $\widetilde{\Phi}$ конвертирует векторную мажоризацию в слабую.

3. По следствию 5.3, мы получаем, что $[\widetilde{\Phi}] = (T^{-1})^t = \alpha P + \beta J$ для некоторых $P \in P_n$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, где $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq -n\beta$. Тогда, по свойству 5.2, $T^t = \alpha' P' + \beta' J$ для некоторых $P' \in P_n$ и $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ с условиями $a' \neq 0$ и $a' \neq -nb'$. Наконец, $T = \alpha' P'^t + \beta' J$. □

Лемма 5.5. *Пусть* Φ – *линейный оператор на* $\mathbb{R}^n$ *и* $\mathrm{rank}[\Phi] < n - 1$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Оператор* Φ *конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую мажоризацию.*
(2) $\Phi(x) = (e^t x)s$ *для некоторого вектора* $s \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Если линейное отображение задано матрицей $T = se^t$, то оно сохраняет векторную мажоризацию, как показано в теореме 3.1. Их этого следует, что оператор Φ, в частности, конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую, см. замечание 2.11.

Теперь предположим, что оператор Φ конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую.

1. Обозначим $T = [\Phi]$. Поскольку $\operatorname{rank} T < n-1$, существует такой ненулевой вектор $w \in \mathbb{R}^n$, что $Tw = 0$, и как минимум одна координата вектора w равна нулю. С точностью до перестановки столбцов матрицы T, мы можем предположить, что $w_1, \cdots, w_k \neq 0$ и $w_{k+1} = \ldots w_n = 0$, где $1 \leqslant k < n$. В итоге, $Tw = w_1 T^{(1)} + \cdots + w_k T^{(k)} = 0$.

2. Поскольку Φ конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую, для любого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ и матрицы $Q \in \Omega_n$ имеем $TQv \preceq^c Tv$. Пусть $v = w$ и $Q = P_{(ij)}$, где $i \leqslant k$ и $j > k$ произвольны. Тогда $TP_{ij}w \preceq^c Tw = 0$, то есть $TP_{ij}w = 0$. Другими словами, $w_1 T^{(1)} + \cdots + w_k T^{(k)} - w_i T^{(i)} + w_i T^{(j)} = 0$. При вычитании из этого равенства равенства, получаемого из условия $Tw = 0$, получаем $w_i T^{(j)} - w_i T^{(i)} = 0$, то есть $T^{(i)} = T^{(j)}$ для любых $i \leqslant k$ и $j > k$. Отсюда следует, что $T = se^t$ для некоторого вектора $s \in \mathbb{R}^n$. □

Лемма 5.6. *Пусть Φ – линейный оператор на $\mathbb{R}^n$. Обозначим $T = [\Phi]$. Если Φ конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую, то*

(1) $T^{(i)} \preceq^c T^{(j)}$ *для любых* i, j;
(2) $\frac{1}{n} Te \preceq^c T^{(j)}$ *для любого* j.

Доказательство. Предположим, что оператор Φ – линейный конвертер из векторной мажоризации в столбцовую. Отсюда следует, что $TQe_j \preceq^c Te_j = T^{(j)}$ для любого $Q \in \Omega_n$. Тогда, подставив $Q = P_{(ij)}$, мы получим $T^{(i)} \preceq^c T^{(j)}$, а подставив $Q = \frac{1}{n} J$, получим $\frac{1}{n} Te \preceq^c T^{(j)}$. □

Для $n = 2$ имеет место следующий результат.

Лемма 5.7. *Пусть Φ – линейный оператор на $\mathbb{R}^2$. Следующие условия эквивалентны.*

(1) *Оператор Φ сохраняет векторную мажоризацию.*
(2) *Оператор Φ конвертирует векторную мажоризацию в слабую.*
(3) *Оператор Φ конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую.*
(4) *Выполнено одно из следующих условий:*

(a) $\Phi(x) = (e^t x)s$ *для некоторого вектора* $s \in \mathbb{R}^2$*;*

(b) $\Phi(x) = \alpha Px + \beta Jx$ *для некоторых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *и* $P \in P_2$.

Доказательство. Теорема 3.9 показывает, что пункты 1, 2 и 4 эквивалентны. Пункт 1 влечет пункт 3, см. замечание 2.11. Таким образом, достаточно показать, что из пункта 3 следует пункт 4. Предположим, что Φ конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую и обозначим $T = [\Phi]$.

1. Предположим, что оператор Φ обратим. Тогда Φ удовлетворяет пункту 4(b) по лемме 5.4.

2. Если $T = O$, то оператор Φ удовлетворяет пункту 4(a).

3. Наконец, пусть $\operatorname{rank} T = 1$. Если $T^{(1)} = 0$, то $T^{(2)} = 0$ по лемме 5.6, противоречие. Таким образом, мы можем предположить, что столбцы $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ ненулевые. Тогда $T^{(2)} = \alpha T^{(1)}$ для некоторого $\alpha \neq 0$. В частности, $T\begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

4. Поскольку Φ конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую, мы получаем, что $T\begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \end{pmatrix} \preceq^c T\begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix} = 0$. Отсюда следует, что $T\begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \end{pmatrix} = 0$.

5. Наконец, $T^{(2)} = \alpha T^{(1)}$ и $T^{(1)} = \alpha T^{(2)}$. Отсюда следует, что $\alpha = \pm 1$. Если $\alpha = 1$, то $T = T^{(2)} e^t$ и оператор Φ удовлетворяет пункту 4(a).

6. Пусть $\alpha = -1$. Тогда условие $Te_1 \preceq^c Te_2$ дает $T^{(1)} \preceq^c -T^{(1)}$. В частности, $e^t T^{(1)} = -e^t T^{(1)}$ по лемме 4.2. Таким образом, $e^t T^{(1)} = 0$ и $T = \begin{pmatrix} l & -l \\ -l & l \end{pmatrix}$ для некоторого $l \in \mathbb{R}$. Наконец, Φ удовлетворяет пункту 4(b). □

Лемма 5.8. *Пусть* Φ *– линейный оператор на* $\mathbb{R}^n$*, конвертирующий векторную мажоризацию в столбцовую. Обозначим* $T = [\Phi]$*. Пусть* $rank T = n - 1$*, где* $n > 2$*. Тогда*

(1) *все столбцы матрицы* T *различны;*

(2) *если вектор* $v \in \mathbb{R}$ *такой, что* $Tv = 0$*, то* v *пропорционален* e*;*

(3) $Te = 0$*;*

(4) $e^t T^{(j)} = 0$ *для любого* j.

Доказательство. Предположим, что Φ – линейный конвертер из векторной мажоризации в столбцовую. Тогда для любого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ такого, что $Tv = 0$, имеем $TQv = 0$ для любого $Q \in \Omega_n$.

1. Предположим, что $T^{(i)} = T^{(j)}$. Тогда положим $v = e_i - e_j$ и $Q = P_{(jk)}$ для произвольного $k \neq i, j$. Тогда $Tv = 0 = TQv = TP_{(jk)}(e_i - e_j)$. Отсюда следует, что $T^{(i)} - T^{(k)} = 0$. Таким образом, все столбцы T равны, и $\operatorname{rank} T = 1$. Итак, при $n > 2$ все столбцы T различны.

2. Пусть $Tv = 0$. Докажем, что вектор v пропорционален e. Предположим обратное, то есть $v_i \neq v_j$ для некоторых i, j. Тогда рассмотрим $Q = P_{(ij)}$, и условие $TQv = 0$ дает

$$v_1 T^{(1)} + \cdots + v_n T^{(n)} - v_i T^{(i)} - v_j T^{(j)} + v_i T^{(j)} + v_j T^{(i)} = 0 \qquad (1)$$

Если мы вычтем уравнение $Tv = 0$ из уравнения (1), то получим $(v_i - v_j)(T^{(i)} - T^{(j)}) = 0$. По пункту 1, все столбцы T различны. Наконец, $v_i = v_j$, противоречие. Таким образом, вектор v пропорционален e, и $Te = 0$.

3. Поскольку $\operatorname{rank} T < n$, то существует такой вектор $v \in \mathbb{R}^n$, что $Tv = 0$. Тогда, по пункту 2, $Te = 0$.

4. По лемме 5.6, получаем, что $0 = \frac{1}{n} Te \preceq T^{(j)}$ для любого j. Наконец, по лемме 4.2, получаем, что $e^t T^{(j)} = 0$ для любого j. □

Лемма 5.9. *Пусть матрица $T \in M_n$ такая, что $Te = 0$. Предположим, что $TQ\left(\begin{smallmatrix} v \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \preceq^c T\left(\begin{smallmatrix} v \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ для любой матрицы $Q \in \Omega_n$ и любого вектора $v \in \mathbb{R}^{n-1}$.*

Тогда $TQb \preceq^c Tb$ для любого $Q \in \Omega_n$ и $b \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $Q \in \Omega_n$ и $b = \left(\begin{smallmatrix} v \\ b_n \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^n$. Тогда $Qe = e$. Положим $w = b - b_n e$. Тогда $w_n = 0$ и, по условию, существует такая матрица $C \in \Omega_n^{\mathrm{col}}$, что $TQw = CTw$. Тогда $TQb = TQw + b_n TQe = TQw + b_n Te = TQw = CTw = CTw + b_n CTe = CTb$. □

Лемма 5.10. *Пусть матрица $T \in M_n$ такая, что $Te = 0$. Предположим, что $TR\left(\begin{smallmatrix} v \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \preceq^c T\left(\begin{smallmatrix} v \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ для любых $R \in \Omega_n^{\mathrm{row}}$ и $v \in \mathbb{R}^{n-1}$.*

Тогда $TRb \preceq^c Tb$ для любых $R \in \Omega_n^{\mathrm{row}}$ и $b \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Как и в лемме 5.9, результат следует из того, что $Re = e$ для любых $R \in \Omega_n^{\mathrm{row}}$. □

Лемма 5.11. *Пусть $T \in M_n$, $b \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что $TPb \preceq^c Tb$ для любого $P \in P_n$.*

Тогда $TQb \preceq^c Tb$ для любого $Q \in \Omega_n$.

Доказательство. Пусть $Q \in \Omega_n$. Тогда, по теореме 2.2, $Q = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k$ для некоторых $P_1, \ldots, P_k \in P_n$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

По условию, существуют такие матрицы $C_1, \dots, C_k \in \Omega_n^{\mathrm{col}}$, что $TP_ib = C_iTb$.

Легко видеть, что $C = \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_k C_k \in \Omega_n^{\mathrm{col}}$ и $TQb = T(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k)b = (\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_k C_k)Tb = CTb$. □

Лемма 5.12. *Пусть $T \in M_n$, $b \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что $TDb \preceq^c Tb$ для любого $D \in \Omega_n^{\mathrm{row}}(0,1)$.*

Тогда $TRb \preceq^c Tb$ для любого $R \in \Omega_n^{\mathrm{row}}$.

Доказательство. Как и в лемме 5.11, результат следует из того, что каждая строчно-стохастическая матрица является выпуклой комбинацией некоторых целочисленных строчно-стохастических матриц. □

§6. Примеры и контрпримеры

В этом параграфе мы приводим примеры линейных конвертеров, которые не сохраняют конвертируемые мажоризации.

Для начала нам необходимо найти некоторые пары векторов, упорядоченных в смысле столбцовой мажоризации.

Лемма 6.1. *Пусть $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -b_1-b_2 \end{pmatrix}$ для произвольных $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Тогда $b \preceq^c -b \preceq^c b$.*

Доказательство. По определению столбцовой мажоризации, $-b \preceq^c b$ эквивалентно $b \preceq^c -b$. Кроме того, если одна из координат b нулевая, то $-b = Pb$ для некоторой матрицы перестановки P.

Таким образом, мы можем предположить, что две координаты вектора b положительны. Без ограничения общности будем считать, что $b_1, b_2 > 0$. Тогда $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{b_1}{b_1+b_2} \\ 0 & 0 & \frac{b_2}{b_1+b_2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Omega_3^{\mathrm{col}}$ и $Cb = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{b_1}{b_1+b_2} \\ 0 & 0 & \frac{b_2}{b_1+b_2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -b_1-b_2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ b_1+b_2 \end{pmatrix} = -b$. □

Лемма 6.2. *Пусть $b = \begin{pmatrix} b_1-b_2 \\ b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}$ для произвольных $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Тогда $x \preceq^c b$ для любого $x \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ -b_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1-b_2 \\ -b_1+b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.*

Доказательство. Прямые вычисления показывают, что

$$\begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&1&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1-b_2\\b_2\\-b_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1\\-b_1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&1&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1-b_2\\b_2\\-b_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_2\\-b_2\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1-b_2\\b_2\\-b_1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} b_1-b_2\\b_2-b_1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&1\\0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1-b_2\\b_2\\-b_1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Лемма 6.3. *Пусть* Φ *– линейный оператор, заданный матрицей* $T = \begin{pmatrix} 1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1 \end{pmatrix}$. *Тогда* $TPb \preceq^c Tb$ *для любой матрицы* $P \in P_3$ *и любого вектора* $b \in \mathbb{R}^3$ *с условием* $b_3 = 0$.

Доказательство. Пусть $b = \begin{pmatrix} b_1\\b_2\\0 \end{pmatrix}$. Тогда $Tb = b_1T^{(1)} + b_2T^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1-b_2\\b_2\\-b_1 \end{pmatrix}$.

Пусть $P \in P_3$. Тогда $TPb = b_1T^{(i)} + b_2T^{(j)}$ для некоторых различных индексов i и j. Таким образом, достаточно доказать, что $b_1T^{(i)} + b_2T^{(j)} \preceq^c b_1T^{(1)} + b_2T^{(2)}$ для любой пары различных индексов i, j. Всего существует шесть вариантов.

1. $b_1T^{(1)} + b_2T^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1-b_2\\b_2\\-b_1 \end{pmatrix}$. 2. $b_1T^{(1)} + b_2T^{(3)} = \begin{pmatrix} b_1\\-b_2\\-b_1+b_2 \end{pmatrix}$.

3. $b_1T^{(2)} + b_2T^{(1)} = \begin{pmatrix} -b_1+b_2\\b_1\\-b_2 \end{pmatrix}$. 4. $b_1T^{(2)} + b_2T^{(3)} = \begin{pmatrix} -b_1\\b_1-b_2\\b_2 \end{pmatrix}$.

5. $b_1T^{(3)} + b_2T^{(1)} = \begin{pmatrix} b_2\\-b_1\\b_1-b_2 \end{pmatrix}$. 6. $b_1T^{(3)} + b_2T^{(2)} = \begin{pmatrix} -b_2\\-b_1+b_2\\b_1 \end{pmatrix}$.

В каждом из этих случаев либо $b_1T^{(i)} + b_2T^{(j)} = STb$, либо $b_1T^{(i)} + b_2T^{(j)} = -STb$ для некоторой матрицы $S \in P_3$. Тогда, по лемме 6.1, $TPb \preceq^c Tb$ для любых $P \in P_3$ и $b \in \mathbb{R}^3$ с условием $b_3 = 0$. $\square$

Лемма 6.4. *Пусть* Φ *– линейный оператор, заданный матрицей* $T = \begin{pmatrix} 1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1 \end{pmatrix}$. *Тогда* Φ *конвертирует векторную мажоризацию в столбцовую.*

Доказательство. По лемме 6.3, $TPb' \preceq^c Tb'$ для любых $P \in P_3$ и $b' \in \mathbb{R}^3$ с условием $b'_3 = 0$. Тогда, по лемме 5.11, $TQb' \preceq^c Tb'$ для любых $Q \in \Omega_3$ и $b' \in \mathbb{R}^3$ с условием $b'_3 = 0$. Наконец, по лемме 5.9, $TQb \preceq^c Tb$ для любых $b \in \mathbb{R}^n$ и $Q \in \Omega_n$. $\square$

Лемма 6.5. *Пусть Φ – линейный оператор, заданный матрицей* $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. *Тогда* $TDb \preceq^c Tb$ *для любых* $D \in \Omega_3^{\mathrm{row}}(0,1)$ *и* $b \in \mathbb{R}^3$ *с условием* $b_3 = 0$.

Доказательство. 1. Пусть $b = \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда $Tb = b_1T^{(1)} + b_2T^{(2)} = \left(\begin{smallmatrix} b_1-b_2 \\ b_2 \\ -b_1 \end{smallmatrix}\right)$.

2. В $\Omega_3^{\mathrm{row}}(0,1)$ есть $3^3 = 27$ различных матриц, 6 из которых – матрицы перестановки. В лемме 6.3 было показано, что $TPb \preceq^c Tb$ для любой матрицы $P \in P_3$.

3. В $\Omega_3^{\mathrm{row}}(0,1)$ есть 3 матрицы ee_i^t, где $i = 1,2,3$. Напомним, что $Te = 0$. Тогда $Tee_i^tb = 0$. Наконец, $0 \preceq^c Tb$ по лемме 6.2.

4. Теперь осталось рассмотреть такие матрицы из $\Omega_3^{\mathrm{row}}(0,1)$, которые имеют столбец, содержащий ровно две единицы. Таких матриц 18. Заметим, что $T(e_1+e_2) = Te - Te_3 = -Te_3$.

5. Например,

$$T\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)b = T\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)b = T\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ b_2-b_1 \end{smallmatrix}\right) = (b_2-b_1)T^{(3)} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ b_1-b_2 \\ b_2-b_1 \end{smallmatrix}\right).$$

6. Теперь мы можем рассмотреть общий случай. Пусть i_1, i_2, i_3 – перестановка чисел $1,2,3$. Пусть j_1, j_2 – различные числа из множества $\{1,2,3\}$. Предположим, что матрица $D \in \Omega_3^{\mathrm{row}}(0,1)$ такая, что $d_{i_1j_1} = d_{i_2j_1} = d_{i_3j_2} = 1$, а остальные элементы нулевые. Пусть D' такая матрица, что $d_{i_3j_1} = -1$, $d_{i_3j_2} = 1$, а остальные элементы нулевые. Тогда $TDb = TD'b = (b_{j_2} - b_{j_1})T^{(i_3)}$.

7. Необходимо показать, что $(b_{j_2} - b_{j_1})T^{(i_3)} \preceq^c Tb$ для любых i_3 и $j_1 \neq j_2$. Поскольку столбцы T совпадают с точностью до перестановки элементов в них, мы без ограничения общности можем предположить, что $i_3 = 1$. Тогда всевозможные различные j_1 и j_2 дают $(b_{j_2}-b_{j_1})T^{(1)} \in \{\pm b_1T^{(1)}, \pm b_2T^{(1)}, \pm(b_1-b_2)T^{(1)}\}$.

8. Из этого следует, что $(b_{j_2} - b_{j_1})T^{(1)} \preceq^c Tb$ по лемме 6.2. □

Лемма 6.6. *Пусть Φ – линейный оператор, заданный матрицей* $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. *Тогда Φ конвертирует слабую мажоризацию в столбцовую мажоризацию.*

Доказательство. По лемме 6.5, $TDb' \preceq^c Tb'$ для всех $D \in \Omega_3^{\mathrm{row}}(0,1)$ и $b' \in \mathbb{R}^3$ с условием $b_3' = 0$. Тогда, по лемме 5.12, $TRb' \preceq^c Tb'$ для любых $R \in \Omega_3^{\mathrm{row}}$ и $b' \in \mathbb{R}^3$ с условием $b'_3 = 0$. Наконец, по лемме 5.10, $TRb \preceq^c Tb$ для любых $b \in \mathbb{R}^n$ и $R \in \Omega_3^{\mathrm{row}}$. $\square$

Пусть линейный оператор Φ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда Φ не удовлетворяет необходимым условиям сохранения векторной мажоризации (теорема 3.1), слабой мажоризации ([17, Теорема 2.3]) и столбцовой мажоризации ([16, Теорема 2.1]). Таким образом, оператор Φ не сохраняет векторную, слабую и столбцовую мажоризации. Покажем это явно.

Следующий пример показывает, что линейный оператор Φ, заданный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, не сохраняет векторную и слабую мажоризации.

Пример 6.7. *Пусть* $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *и* $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Тогда* $a = P_{(12)}b$ *и, как следствие,* $a \preceq^w b$ *и* $a \preceq b$.

Но $\Phi(a) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *и* $\Phi(b) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Тогда, по следствию* 2.8, $\Phi(a) \not\preceq^w \Phi(b)$, *а значит,* $\Phi(a) \not\preceq \Phi(b)$.

Следующий пример показывает, что линейный оператор Φ, заданный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, не сохраняет столбцовую мажоризацию.

Пример 6.8. *Пусть* $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *и* $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Положим* $a = Cb$. *Тогда* $a = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *и* $a \preceq^c b$.

Но $\Phi(a) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ *и* $\Phi(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. *Если матрица* $X \in \Omega_3^{\mathrm{col}}$, *то* $(X \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})_1 \leqslant 1$. *Как следствие,* $\Phi(a) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \not\preceq^c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \Phi(b)$.

Следующий пример показывает линейный оператор на M_n, конвертирующий сильную, направленную и слабую мажоризации в столбцовую, но не сохраняющий никакую из них.

Пример 6.9. *Пусть ϕ – линейный оператор на $\mathbb{R}^n$, заданный матрицей* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Пусть оператор* $\Phi : M_3 \to M_3$ *определяется следующим образом. Для любой матрицы* $X \in M_3$, $\Phi(X)^{(1)} = \phi(X^{(1)})$ *и* $\Phi(X)^{(j)} = 0$ *для любого* $j > 1$. *Тогда оператор* Φ *линеен и конвертирует сильную, направленную и слабую мажоризации в столбцовую. Кроме того,* Φ *не сохраняет ни одну из этих мажоризаций.*

Доказательство. Пусть $A, B \in M_{n,m}$ и пусть $A \preceq^w B$. Тогда, в частности, $A^{(1)} \preceq^w B^{(1)}$. По лемме 6.6, ϕ конвертирует слабую мажоризацию в столбцовую. Отсюда следует, что $\Phi(A)^{(1)} = C\Phi(B)^{(1)}$ для некоторой матрицы $C \in \Omega_3^{\mathrm{col}}$. Наконец, $\Phi(A) = C\Phi(B)$ в силу определения Φ. Таким образом, Φ конвертирует слабую мажоризацию в столбцовую.

Поскольку из сильной мажоризации следует направленная, а из направленной следует слабая, мы получаем, что оператор Φ конвертирует все три эти мажоризации в столбцовую.

Наконец, в примере 6.7 было показано, что оператор ϕ не сохраняет векторную и слабую мажоризации. Пример 6.8 показывает, что ϕ не сохраняет столбцовую мажоризацию. Как следствие, Φ не сохраняет эти мажоризации. $\square$

Автор благодарен своему научному руководителю профессору Александру Эмилевичу Гутерману за постановку задачи и интересные и полезные обсуждения.

Список литературы

1. T. Ando, *Majorization, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues.* — Linear Algebra Appl. **118** (1989), 163–248.
2. L. B. Beasley, S.-G. Lee, Y.-H. Lee, *A characterization of strong preservers of matrix majorization.* — Linear Algebra Appl. **367** (2003), 341–346.
3. L. B. Beasley, S.-G. Lee, *Linear operators preserving multivariate majorization.* — Linear Algebra Appl. **304(1)** (2000), 141–159.
4. R. A. Brualdi, G. Dahl, *Majorization-constrained doubly stochastic matrices.* — Linear Algebra Appl. **361** (2003), 75–97.
5. R. A. Brualdi, G. Dahl, *Majorization classes of integral matrices.* — Linear Algebra Appl. **436** (2012), 802-–813.
6. G. Dahl, *Matrix majorization.* — Linear Algebra Appl. **288** (1999), 53–73.
7. G. Dahl, *Majorization polytopes.* — Linear Algebra Appl. **297** (1999), 157–175.
8. G. Dahl, *Transportation matrices with staircase patterns and majorization.* — Linear Algebra Appl. **429(7)** (2008), 1840–1850.
9. G. Dahl, A. Guterman, P. Shteyner, *Majorization for matrix classes.* — Linear Algebra Appl. **555** (2018), 201–221.
10. G. Dahl, A. Guterman, P. Shteyner, *Majorization for* $(0, 1)$*-matrices.* — Linear Algebra Appl. **585** (2020), 147–163.
11. J. Dieudonné, *Sur une généralisation du groupe orthogonal à quatre variables.* — Arch. Math. **1** (1949), 282–287.
12. G. Frobenius, *Uber die darstellung der endlichen gruppen durch linear substitutionen.* — Sitzungsber Deutsch. Akad. Wiss. Berlin (1897), 994–1015.

13. G. Gour, D. Jennings, F. Buscemi, R. Duan, I. Marvian, *Quantum majorization and a complete set of entropic conditions for quantum thermodynamics.* — Nature Comm. **9** (2018).
14. А. Э. Гутерман, П. М. Штейнер, *Линейные отображения, сохраняющие мажоризацию наборов матриц.* — Вестник СПбГУ, Математика. Механика. Астрономия **7(65)** (2020), 217–229.
15. A. Guterman, P. Shteyner, *Linear converters of weak, directional and strong majorizations.* — Linear Algebra Appl. 1–21, в печати.
16. A. M. Hasani, M. Radjabalipour, *On linear preservers of (right) matrix majorization.* — Linear Algebra Appl. **423** (2007), 255–261.
17. A. M. Hasani, M. Radjabalipour, *Linear preserver of matrix majorization.* — Int. J. Pure Appl. Math. **32(4)** (2006), 475–482.
18. G. Koshevoy, *Multivariate Lorenz majorization.* — Soc. Choice Welfare **12(1)** (1995), 93–102.
19. G. Koshevoy, *The Lorenz zonotope and multivariate majorizations.* — Soc. Choice Welfare **15(1)** (1997), 1–14.
20. C.-K. Li, S. Pierce, *Linear preserver problems.* — Amer. Math. Monthly **108(7)** (2001), 591–605.
21. C.-K. Li, E. Poon, *Linear operators preserving directional majorization.* — Linear Algebra Appl. **325(1)** (2001), 141–146.
22. A. W. Marshall, I. Olkin, B. C. Arnold, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications, second edition.* Springer, New York, 2011.
23. F. D. Martinez Peria, P. G. Massey, L. E. Silvestre, *Weak matrix majorization.* — Linear Algebra Appl. **403** (2005), 343–368.
24. S. Pierce et al, *A survey of linear preserver problems.* — Linear Multilinear Algebra **33(1-2)** (1992), 1–119.
25. M. Radjabalipour, P. Torabian, *On nonlinear preservers of weak matrix majorization.* — Bull. Iran. Math. Soc. **32(2)** (2011), 21–30.
26. I. Schur, *Einige bemerkungen zur determinantentheorie.* — Akad. Wiss., Berlin (1925), 454–463.
27. E. Torgersen, *Stochastic orders and comparison of experiments.* — Lect. Notes Monograph Ser. **19** (1991), 334–371.

Shteyner P. M. Converting column majorization.

The paper characterizes linear operators converting column majorization into weak, directional, and strong majorizations. An example of a linear converter from weak, directional, and strong majorizations to column majorization preserving none of these majorizations is provided.

Московский Государственный
Университет имени М. В. Ломоносова;
Московский Центр фундаментальной
и прикладной математики;
Московский физико-технический институт
E-mail: pashteiner@ya.ru

Поступило 1 октября 2020 г.