Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 496, 2020 г.

В. Б. Хазанов

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЖОРДАНОВЫХ ПОЛУРЕШЕТОК ВЕКТОРОВ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

§1. Спектральные характеристики многопараметрической полиномиальной матрицы

Спектральная задача[1] для многопараметрической полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda}) = F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q) \in \mathbf{C}^{m\times n}[\boldsymbol{\lambda}]$ связана с задачей нахождения нетривиальных решений уравнения

$$F(\boldsymbol{\lambda})x = 0, \quad x \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}, \tag{1}$$

и условий их существования.

Первый вид нетривиального решения уравнения (1) – это рациональный (или полиномиальный) вектор $x(\boldsymbol{\lambda})$, удовлетворяющий этому уравнению при любых значениях мультипараметра $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q)$:

$$F(\boldsymbol{\lambda})x(\boldsymbol{\lambda}) = 0, \quad x(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{C}^n(\boldsymbol{\lambda}) \setminus \{0\}. \tag{2}$$

Он существует только у сингулярной полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, ранг ρ которой меньше числа ее столбцов: $\rho < n$. Совокупность таких векторов $\{x(\boldsymbol{\lambda})\}$ образует правое нуль-пространство $\mathbf{N}_c[F] \equiv \mathbf{N}_c(\boldsymbol{\lambda}) \equiv \ker F(\boldsymbol{\lambda})$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, размерность которого $u := n - \rho \equiv \dim \mathbf{N}_c[F]$. Полиномиальный вектор $x(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{N}_c(\boldsymbol{\lambda})$ называется правым полиномиальным решением матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. Базис правого нуль-пространства $\mathbf{N}_c(\boldsymbol{\lambda})$ может быть сформирован из линейно независимых правых полиномиальных решений $x_i(\boldsymbol{\lambda})$, $i = 1, \dots, u$: $\mathbf{N}_c(\boldsymbol{\lambda}) = \operatorname{span}(x_1(\boldsymbol{\lambda}), \dots, x_u(\boldsymbol{\lambda}))$.

Очевидно, что значение $x(\boldsymbol{\lambda}^*)$ любого полиномиального решения $x(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{N}_c(\boldsymbol{\lambda})$, вычисленное при любом значении $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbf{C}^q$, удовлетворяет соотношению вида (1): $F(\boldsymbol{\lambda}^*)x(\boldsymbol{\lambda}^*) = 0$. Обозначим $\mathbf{N}_c(\boldsymbol{\lambda}^*) = \operatorname{span}(x_1(\boldsymbol{\lambda}^*), \dots, x_u(\boldsymbol{\lambda}^*)) \subset \mathbf{C}^n$.

Ключевые слова: сингулярная многопараметрическая полиномиальная матрица, спектр, кратные точки спектра жордановы полурешеток векторов, результантный подход.

[1]Более подробное описание характеристик из §§1, 2 и 3 см. в работах [2–7].

Замечание. Векторы $x_1(\boldsymbol{\lambda}^*), \ldots, x_u(\boldsymbol{\lambda}^*)$ могут оказаться линейно зависимыми, так что $\dim \mathbf{N}_c(\boldsymbol{\lambda}^*) \leqslant \dim \mathbf{N}_c(\boldsymbol{\lambda})$.

Второй вид нетривиальных решений уравнения (1) – это отвечающий точке $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_q^*) \in \mathbf{C}^q$ вектор $x^* \in \mathbf{C}^n$, который удовлетворяет этому уравнению при фиксированном значении мультипараметра $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^*$:

$$F(\boldsymbol{\lambda}^*)x^* = 0, \quad x^* \notin \mathbf{N}_c(\boldsymbol{\lambda}^*). \tag{3}$$

Совокупность таких точек $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbf{C}^q$ будем называть конечным спектром $\sigma_c[F]$ многопараметрической полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, а вектор x^* – соответствующим $\boldsymbol{\lambda}^*$ правым собственным вектором.

Очевидно, что необходимым и достаточным условием существования собственного вектора x^*, не принадлежащего $\mathbf{N}_c(\boldsymbol{\lambda}^*)$, является выполнение неравенства $\rho^* := \operatorname{rank} F(\boldsymbol{\lambda}^*) < \rho$. Таким образом, конечный спектр $\sigma_c[F]$ многопараметрической полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ ранга ρ определяется как множество точек $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_q^*) \in \mathbf{C}^q$, координаты которых удовлетворяют системе нелинейных алгебраических уравнений

$$F\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_\rho \\ j_1, j_2, \ldots, j_\rho \end{pmatrix} \equiv \varepsilon_{\mathbf{ij}}^{(\rho)}(\boldsymbol{\lambda}) = 0, \quad \begin{matrix} 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_\rho \leqslant m, \\ 1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_\rho \leqslant n. \end{matrix} \tag{4}$$

Левые части уравнений системы (4) представляют собой всевозможные миноры порядка ρ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ размеров $m \times n$, так что эта система состоит из $N = \binom{m}{\rho}\binom{n}{\rho}$ уравнений (через $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ обозначены соответствующие мультииндексы $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_\rho)$, $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_\rho)$, которые определяют номера строк и столбцов соответствующего минора). Таким образом, конечный спектр $\sigma_c[F]$ q-параметрической полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ представляет собой совокупность $(q-k)$-мерных решений, $1 \leqslant k \leqslant \min\{N, q\}$, q-мерного аффинного пространства $\mathbf{C}_q$. Эти решения будем для простоты называть $(q-k)$-мерными собственными значениями матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. При $k = 1$ $(q-1)$-мерное собственное значение будем также называть собственным полиномом матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. Таким образом, любой отличный от константы общий делитель миноров из (4) является собственным полиномом матрицы.

Аналитическая (алгебраическая) кратность точки конечного спектра $\sigma_c[F]$ определяется как кратность нуля системы нелинейных алгебраических уравнений (4). Точка $\boldsymbol{\lambda}^* \in \sigma_c[F]$ многопараметрической полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ имеет аналитическую кратность $r+1$, если в этой точке обращаются в нуль полные дифференциалы вплоть до порядка r левых частей $\varepsilon^{\rho}_{\mathbf{ij}}(\boldsymbol{\lambda})$ всех миноров из системы (4), и хотя бы для одного из миноров значение дифференциала порядка $r+1$ в этой точке отлично от нуля. Конечный спектр матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ будем называть полным, если при этом учитывается кратность всех его точек.

Геометрической кратностью точки $\boldsymbol{\lambda}^* \in \sigma_c[F]$ многопараметрической полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ ранга ρ будем называть число $\varepsilon_0 := \rho - \rho^*$, где $\rho^* := \operatorname{rank} F^*$, $F^* \equiv F(\boldsymbol{\lambda}^*)$. Как и в однопараметрическом случае, геометрическая кратность точки $\boldsymbol{\lambda}^* \in \sigma_c[F]$ многопараметрической полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ не превосходит ее аналитическую кратность: $\varepsilon_0 \leqslant r+1$.

Замечание. Очевидно, что $\mathbf{N}_c(\boldsymbol{\lambda}^*) \neq \mathbf{N}_c[F^*] = \ker F(\boldsymbol{\lambda}^*)$, так что $\dim \mathbf{N}_c(\boldsymbol{\lambda}^*) \leqslant \dim \mathbf{N}_c[F^*]$.

§2. Жорданова полурешетка векторов многопараметрической полиномиальной матрицы. Порождающий корневой вектор

Рассмотрим векторные характеристики, относящиеся к кратным точкам конечного спектра полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, обобщающие понятия жордановых цепочек векторов и порождающих корневых векторов для однопараметрического случая (см., например, [1]).

Совокупность векторов $\{x_{\mathbf{k}}\}$, мультииндексы $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_q)$ которых принадлежат полурешетке K_t, будем называть правой жордановой полурешеткой векторов матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, отвечающей точке $\boldsymbol{\lambda}^*$ее конечного спектра, если выполняются соотношения:

$$\begin{gathered}\sum_{\mathbf{k}\leqslant l} \frac{1}{\mathbf{k}!} F^{(\mathbf{k})^*} x_{\mathbf{l}-\mathbf{k}} \equiv \sum_{k_1=0}^{l_1} \cdots \sum_{k_q=0}^{l_q} \frac{1}{k_1! k_2! \ldots k_q!} F^{(\mathbf{k})^*} x_{\mathbf{l}-\mathbf{k}} = 0, \\ \mathbf{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_q) \in K_t, \ \ \mathbf{l}-\mathbf{k} = (l_1-k_1, l_2-k_2, \ldots, l_q-k_q),\end{gathered} \tag{5}$$

причем $x_0 \in \mathbf{N}_c(\boldsymbol{\lambda}^*)$. Если на полурешетке K_{t+1} найдется хотя бы один мультииндекс $l \in K_{t+1} \setminus K_t$, для которого система

$$F^* z = \sum_{0<\mathbf{k}\leqslant l} \frac{1}{\mathbf{k}!} F^{(\mathbf{k})^*} x_{\mathbf{l}-\mathbf{k}} \tag{6}$$

является несовместной, то число $t+1$ будем называть высотой жордановой полурешетки.

Полиномиальный вектор $x(\boldsymbol{\lambda})$ будем называть правым порождающим корневым вектором порядка t матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, отвечающим точке $\boldsymbol{\lambda}^*$ ее конечного спектра, если на полурешетке K_t мультииндексов $k = (k_1, k_2, \dots, k_q)$ выполняются равенства

$$\left.\frac{\partial^{|\mathbf{k}|}[F(\boldsymbol{\lambda})x(\boldsymbol{\lambda})]}{\partial\lambda_1^{k_1}\dots\delta\lambda_q^{k_q}}\right|_{\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*} = 0, \tag{7}$$

причем $x(\boldsymbol{\lambda}^*) \notin \mathbf{N}_c(\boldsymbol{\lambda}^*)$, и на полурешетке K_{t+1} найдется хотя бы один мультииндекс $\mathbf{l} \in K_{t+1} \setminus K_t$, для которого равенство вида (7) не выполняется.

Замечание. Равенства нулю значений частных производных в (7) можно заменить равенствами нулю значений дифференциалов:

$$d^\tau[F(\boldsymbol{\lambda})x(\boldsymbol{\lambda})]\big|_{\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*} = 0, \quad \tau = 0, 1, \dots, t, \tag{8}$$

а отличие от нуля значения одной из производной порядка $t+1$ записать в виде

$$d^{t+1}[F(\boldsymbol{\lambda})x(\boldsymbol{\lambda})]\big|_{\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*} \neq 0.$$

Лемма. *Справедливы следующие свойства правых векторных характеристик*:

(i) *Любая правая жорданова полурешетка векторов, отвечающая точке $\boldsymbol{\lambda}^*$ конечного спектра матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, начинается с собственного вектора x_0, удовлетворяющего уравнению* (3). *В частности, точке $\boldsymbol{\lambda}^*$ кратности единица отвечает жорданова полурешетка порядка (и кратности) единица, состоящая из единственного собственного вектора.*

(ii) *Правый порождающий корневой вектор $x(\boldsymbol{\lambda})$, отвечающий точке $\boldsymbol{\lambda}^*$ спектра матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, порождает совокупность векторов из соотношений* (5):

$$x_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\mathbf{k}!}x^{(\mathbf{k})^*}, \quad \mathbf{k} \in K, \tag{9}$$

из отвечающей этой точке $\boldsymbol{\lambda}^*$ правой жордановой полурешетки векторов. Если при этом соответствующая система вида (6) *является несовместной, то векторы* (9) *образуют правую жорданову полурешетку векторов соответствующей высоты.*

(iii) *Правое полиномиальное решение $x(\boldsymbol{\lambda})$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ удовлетворяет равенствам вида* (8) *при любом $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^*$ и при любых τ. Порождаемая им в соответствии с формулой* (9) *при любом $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^*$*

полурешетка векторов удовлетворяет равенствам (5) *без условия несовместности системы* (6)[2].

Порождающий корневой вектор $x(\boldsymbol{\lambda})$ с учетом (9) может быть представлен в виде

$$x(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{t} x_k(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_*)^{\mathbf{k}} \equiv \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{t} x_{k_1\ldots k_q}(\lambda_1 - \lambda_{1^*})^{k_1} \cdots (\lambda_q - \lambda_{q^*})^{k_q}.$$

Это позволяет по известной жордановой полурешетке векторов построить соответствующий порождающий корневой вектор (по начальному фрагменту жордановой полурешетки векторов можно построить порождающий его полиномиальный вектор).

Соотношения (8) для правых порядка t порождающих корневых векторов (а следовательно, и для векторов из правых жордановых полурешеток), отвечающих точке $\boldsymbol{\lambda}^*$ спектра матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, с учетом формул

$$d^\tau[F(\boldsymbol{\lambda})x(\boldsymbol{\lambda})] = \tau! \sum_{r=0}^{\tau} \frac{1}{r!} d^r F(\boldsymbol{\lambda}) \frac{1}{\tau - r} d^{\tau - r} x(\boldsymbol{\lambda}),$$

могут быть записаны следующим образом:

$$F^{[\tau]^*} x^*_{[\tau]} = 0, \quad \tau = 0, 1, \ldots, t.$$

Здесь $F^{[\tau]^*}$ и $x^*_{[\tau]}$ – вычисленные при $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^*$ блочные матрица и вектор размеров $(\tau + 1)m \times (\tau + 1)n$ и $(\tau + 1)n$ соответственно, имеющие вид

$$F^{[\tau]^*} = \begin{bmatrix} F & & & \\ dF & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{1}{\tau!}d^\tau F & \cdots & dF & F \end{bmatrix}, \quad x^*_{[\tau]} = \begin{bmatrix} x \\ dx \\ \vdots \\ \frac{1}{\tau!}d^\tau x \end{bmatrix}.$$

§3. Результантная матрица многопараметрической полиномиальной матрицы

Пусть q-параметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица представлена в виде

$$F(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}} \equiv \sum_{\mathbf{k}} F_{k_1\ldots k_q} \lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_q^{k_q},$$

---

[2] Такую полурешетку векторов будем называть *паразитической жордановой полурешеткой векторов*.

где $F_{\mathbf{k}}$ – постоянные матричные коэффициенты его мономов. Степень каждого монома $F_{\mathbf{k}}\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}}$ определяется порядком $|\mathbf{k}| \equiv \sum\limits_{i=1}^{q} k_i$ его мультииндекса[3] $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_q)$, а степень матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ определяется как наивысшая из степеней ее мономов: $s = \deg F := \max\limits_{F_k \neq 0} |\mathbf{k}|$. Запишем матрицу $F(\boldsymbol{\lambda})$ в порядке возрастания степеней ее $\binom{q+s}{s}$ мономов, располагая мономы[4] одной степени в лексикографическом порядке. Тогда моном степени t $\big($число таких мономов равно $\binom{q+t-1}{t}\big)$, содержащий $\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_t}$, $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_t \leqslant q$, предшествует моному той же степени, содержащему $\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\ldots\lambda_{j_t}$, $1 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant \ldots \leqslant j_t \leqslant q$, при условии, что или $i_1 < j_1$, или при $i_l = j_l,\ l = 1, \ldots, k-1,\ i_k < j_k$, где $2 \leqslant k \leqslant t$:

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{\lambda}) &= F_{00\ldots0} + (F_{10\ldots0}\lambda_1 + F_{01\ldots0}\lambda_2 + \cdots + F_{00\ldots1}\lambda_q) \\ &\quad + (F_{20\ldots0}\lambda_1^2 + F_{11\ldots0}\lambda_1\lambda_2 + \cdots + F_{00\ldots2}\lambda_q^2) \\ &\quad + \cdots + (F_{s00\ldots0}\lambda_1^s + F_{s-1,10\ldots0}\lambda_1^{s-1}\lambda_2 + F_{s-1,01\ldots0}\lambda_1^{s-1}\lambda_3 \\ &\quad + \cdots + F_{s-1,00\ldots1}\lambda_1^{s-1}\lambda_q + \cdots + F_{000\ldots0s}\lambda_q^s) \end{aligned}$$

Определим для $F(\boldsymbol{\lambda})$ результантный вектор[5] (результантную матрицу нулевого уровня)

$$\begin{aligned} &F^{\mathrm{R}\ 0}_{m\times n;q;s} \equiv F^{\mathrm{R}}_{m\times n;q;s} = \mathrm{col}\{F_k\}^s_{|k|=0} \\ &\equiv \big[F_{00\ldots0}F_{10\ldots0}F_{01\ldots0}\ldots F_{0\ldots01}F_{20\ldots0}F_{11\ldots0}\ldots F_{00\ldots2} \\ &\cdots\ \cdots F_{s0\ldots0}F_{s-1,1\ldots0}\ldots F_{0\ldots0s}\big]^B \end{aligned}$$

размеров $m\binom{s+q}{q} \times n$ и полиномиальную $m \times m\binom{s+q}{q}$ матрицу

$$\begin{aligned} &W^s_{m;q}(\boldsymbol{\lambda}) = \mathrm{row}\left\{\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}} I_m\right\}^s_{|\mathbf{k}|=0} \\ &\equiv \big[I_m\ \lambda_1 I_m\ \lambda_2 I_m \ldots \lambda_q I_m\ \lambda_1^2 I_m\ \lambda_1\lambda_2 I_m \ldots \lambda_q^2 I_m \\ &\cdots\ \cdots \lambda_1^s I_m\ \lambda_1^{s-1}\lambda_2 I_m \ldots \lambda_q^s I_m\ \big]. \end{aligned}$$

---

[3]Далее мультииндекс $\mathbf{k}$ в выражении $\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}}$ будем называть показателем мультипараметра $\boldsymbol{\lambda}$.

[4]Учитываются все мономы, включая старшие, даже с нулевыми матричными коэффициентами.

[5]В приведенном ниже выражении символ ^{B} означает блочное транспонирование.

Мультииндекс $\mathbf{k}$ матриц $F_{\mathbf{k}}$ и $\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}} I_m$ определяет их блочную позицию в блочном столбце $F^{\mathrm{R}\ 0}_{m\times n;q;s}$ и блочной строке $(W^s_{m;q}(\boldsymbol{\lambda}))$:

$$\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_q) \Rightarrow 1 + \sum_{j=1}^{q} \binom{\sum_{i=1}^{j} k_{q-i+1} + j - 1}{j}.$$

Теперь полиномиальная матрица $F(\boldsymbol{\lambda})$ может быть представлена в виде

$$F(\boldsymbol{\lambda}) = W^s_{m;q}(\boldsymbol{\lambda}) F^{\mathrm{R}}_{m\times n;q;s}.$$

Пусть $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_q)$ – мультииндекс порядка $t = |\mathbf{l}| = \sum_{j=1}^{q} l_j$. Тогда матрице $F^{\mathbf{l}}(\boldsymbol{\lambda}) := \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{l}} F(\boldsymbol{\lambda})$ степени $s+t$ отвечает результантный вектор $F^{\mathbf{l}\ \mathrm{R}}_{m\times n;q;s+t}$ размеров $m\binom{s+t+q}{q} \times n$. В соответствии с (12), каждый блок $F_{\mathbf{k}}$ результантного вектора $F^{\mathrm{R}}_{m\times n;q;s}$ перемещается в позицию[6], отвечающую мультииндексу $\mathbf{k}+\mathbf{l}$:

$$\mathbf{k}+\mathbf{l} = (k_1 + l_1 +, \ldots, k_q + l_q) \Rightarrow 1 + \sum_{j=1}^{q} \binom{\sum_{i=1}^{j} (k_{q-i+1} + l_{q-i+1}) + j - 1}{j}.$$

В остальных позициях результантного вектора $F^{\mathbf{l}\ \mathrm{R}}_{m\times n;q;s+t}$ находятся нулевые матрицы.

Определим результантную матрицу $F^{\mathrm{R}\ t}_{m\times n;q;s}$ уровня $t > 0$ как

$$F^{\mathrm{R}\ t}_{m\times n;q;s} = \begin{bmatrix} F^{\mathrm{R}\ t-1}_{m\times n;q;s} & \mathrm{row}\left\{F^{\mathbf{l}\ \mathrm{R}}_{m\times n;q;s+t}\right\}_{|\mathbf{l}|=t} \\ \mathbf{O} & \end{bmatrix}, \tag{10}$$

где $\mathbf{O}$ – нулевая матрица размеров $m\binom{s+t+q-1}{q-1} \times n\binom{t-1+q}{q}$. Матрица $F^{\mathrm{R}\ t}_{m\times n;q;s}$ имеет размеры $m\binom{s+t+q}{q} \times n\binom{t+q}{q}$ и удовлетворяет соотношению

$$W^{s+t}_{m;q}(\boldsymbol{\lambda}) F^{\mathrm{R}\ t}_{m\times n;q;s} = F(\boldsymbol{\lambda}) W^t_{n;q}(\boldsymbol{\lambda}).$$

Из этого соотношения следует, что результантный вектор матрицы

$$H(\boldsymbol{\lambda}) = F(\boldsymbol{\lambda}) G(\boldsymbol{\lambda}), \tag{11}$$

где $G(\boldsymbol{\lambda})$ – полиномиальная $n \times p$ матрица степени t, удовлетворяет соотношению

$$H^{\mathrm{R}}_{m\times p;q;s+t} = F^{\mathrm{R}\ t}_{m\times n;q;s} G^{\mathrm{R}}_{n\times p;q;t}. \tag{12}$$

[6]В дальнейшем ссылка на мультииндекс блочной компоненты будет использоваться как ссылка на ее позицию.

Результантный столбец $G^{\mathrm{R}}_{n\times p;q;t}$ полиномиальной матрицы $G(\boldsymbol{\lambda})$ имеет размеры $n\binom{t+q}{q}\times p$.

§4. Вычисление жордановой полурешетки векторов полиномиальной матрицы

Рассмотрим случай, когда $\boldsymbol{\lambda}^* = \mathbf{0} = (0,\dots,0)$. Соотношения вида (5) и (6), определяющие соответствующую жорданову полурешетку векторов $\{x_{\mathbf{k}}\}$, $|\mathbf{k}| = 0,1,\dots,t$, высоты $t+1$, принимают вид

$$\begin{gathered}\sum_{k_1=0}^{l_1}\cdots\sum_{k_q=0}^{l_q} F_{\mathbf{k}}x_{\mathbf{l}-\mathbf{k}} = 0, \quad |l| = 0,1,\dots,t,\\ F_0 z = \sum_{\substack{k_1=0}}^{l_1}\cdots\sum_{\substack{k_q=0\\ |\mathbf{k}|>0}}^{l_q} F_{\mathbf{k}}x_{\mathbf{l}-\mathbf{k}}.\end{gathered} \tag{13}$$

Из (9) следует, что жордановой полурешетке векторов $\{x_{\mathbf{k}}\}$, $|\mathbf{k}| = 0,1,\dots,t$, порядка $t+1$, удовлетворяющих соотношениям (5), отвечает удовлетворяющий условиям (8) порождающий корневой вектор $x(\boldsymbol{\lambda}) = \sum\limits_{|\mathbf{k}|=0}^{t} x_{\mathbf{k}}\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}}$ степени t. Учитывая связь соотношений для полиномиальных (11) и отвечающих им результатных матриц (12), а также вид этих результантных матриц, приходим к выводу, что соотношения вида (13) могут быть записаны в виде

$$\breve{F}^{\mathrm{R}\ l}_{m\times n;q;s}\breve{x}^{\mathrm{R}}_{n\times 1;q;l} = 0, \quad l = 0,1,\dots,t. \tag{14}$$

Здесь $\breve{F}^{\mathrm{R}\ l}_{m\times n;q;s}$ – квазирезультантная $m\binom{l+q}{q}\times n\binom{l+q}{q}$ матрица, образованная первыми $\binom{l+q}{q}$ блочными строками результантной $m\binom{s+l+q}{q}\times n\binom{l+q}{q}$ матрицы $F^{\mathrm{R}\ l}_{m\times n;q;s}$, а $\breve{x}^{\mathrm{R}}_{n\times 1;q;l} = \mathrm{col}\{x_k\}^{l}_{|\mathbf{k}|=0}$ – результантный вектор, отвечающий полиномиальному вектору $\breve{x}^{l}(\boldsymbol{\lambda})$ степени l, образованный соответствующими членами вектора $x(\boldsymbol{\lambda})$.

Заметим, что вектор $x^{\mathbf{e}_j}(\boldsymbol{\lambda}) = \lambda_j x(\boldsymbol{\lambda})$ степени $t+1$ формально порождает жорданову полурешетку векторов (9) "высоты" $t+2$, удовлетворяющую соотношениям вида (13). Она получается "сдвигом" исходной полурешетки в направлении, отвечающем параметру λ_j. При этом первые векторы $x_{\mathbf{k}} = 0$ при $|\mathbf{k}| = 0,1$, $\mathbf{k}\neq\mathbf{e}_j$. Аналогично, векторы

$x^{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}} x(\boldsymbol{\lambda})$ степени $t + |\mathbf{k}|$ ($|\mathbf{k}| = 1, \ldots, l$) также порождают "поднятые" жордановы полурешетки векторов "высоты" $t + |\mathbf{k}| + 1$, получаемые "сдвигами" исходной полурешетки на k_j позиций в направлении, отвечающем параметру λ_j, $j = 1, \ldots, q$. При этом соответствующее число начальных векторов получаемой полурешетки будут равны нулю. Таким образом, результантные векторы $x^{k\ \mathrm{R}}_{n\times 1;t+|\mathbf{k}|}$ удовлетворяют соотношениям вида (14):

$$\breve{F}^{\mathrm{R}\ t+|\mathbf{k}|}_{m\times n;q;s}\ x^{\mathbf{k}\ \mathrm{R}}_{n\times 1;q;t+|\mathbf{k}|} = 0, \quad |k| = 1, \ldots, l,$$

так что

$$\breve{F}^{\mathrm{R}\ t+l}_{m\times n;q;s}\ x^{\mathrm{R}\ l}_{n\times 1;q;t} = \mathbf{O}. \tag{15}$$

Следовательно, при определении жордановых полурешеток векторов порядка $t+1$ при $t > 0$ следует исключать из рассмотрения все "поднятые" до высоты $t+1$ жордановы полурешетки векторов меньших высот. Заметим, что полурешетка порядка $p+1$ "поднятая" до высоты $t+1$ ($t > p$) дает $\binom{t-p+q}{q}$ различных паразитических "полурешеток".

Аналогичные рассуждения справедливы в отношении правых полиномиальных решений $x(\boldsymbol{\lambda}) = \sum\limits_{\mathbf{k}} x_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}}$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, которые (в случае их существования) порождают "паразитические" жордановы полурешетки векторов "высоты" $t+1$, отвечающие любому значению λ^*. Аналогичное утверждение будет справедливо и для векторов $x^{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}} x(\boldsymbol{\lambda})$ степени $t + |\mathbf{k}|$ ($|\mathbf{k}| = 1, \ldots, l$). Таким образом, результантная матрица $x^{\mathrm{R}\ l}_{n\times 1;q;t}$, отвечающая полиномиальному решению $x(\boldsymbol{\lambda})$, также будет удовлетворять соотношению вида (15). Следовательно, при определении жордановых полурешеток векторов высоты $t+1$ следует исключать из рассмотрения все паразитические жордановы полурешетки векторов, порожденные полиномиальными решениями индексов, не превосходящих t, с учетом возможности умножения их на некоторую степень $\boldsymbol{\lambda}$. Окончательно получаем следующий алгоритм.

Алгоритм. Для построения жордановых полурешеток векторов полиномиальной $m \times n$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ степени s, отвечающих нулевой точке спектра следует:

(i) вычислить базисную $n \times r_0$ матрицу $X^{\mathrm{R}}_{n\times r_0;q;0}$ ($0 \leqslant r_0 \leqslant n$) правого нуль-пространства результантной матрицы $F^{\mathrm{R}}_{m\times n;q;s}$;

(ii) вычислить базисную $n \times h_0$ матрицу $\breve{X}^{\mathrm{R}}_{n\times h_0;q;0}$ ($r_0 \leqslant h_0 \leqslant n$) правого нуль-пространства $m \times n$ матрицы $\breve{F}^{\mathrm{R}}_{m\times n;q;s} \equiv F_0$;

(iii) $\tau_0 := h_0 - r_0$;
(iv) $\gamma_0 := \tau_0$;
(v) вычислить базисную $n \times \tau_0$ матрицу $\widetilde{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_0;q;0}$ разности подпространств $\check{X}^{\mathrm{R}}_{n\times h_0;q;0} \setminus X^{\mathrm{R}}_{n\times r_0;q;0}$;
(vi) для $t = 1$ с шагом 1 до $s\min\{m,n\}$ повторять:
(vi.i) вычислить базисную $n\binom{t+q}{q} \times r_t$ матрицу $X^{\mathrm{R}}_{n\times r_t;q;t}$ правого нуль-пространства $m\binom{s+t+q}{q} \times n\binom{t+q}{q}$ матрицы $F^{\mathrm{R}_r\ t}_{m\times n;s}$;
(vi.ii) вычислить базисную $n\binom{t+q}{q} \times h_t$ матрицу $\check{X}^{\mathrm{R}}_{n\times h_t;q;t}$ ($r_t \leqslant h_t \leqslant n$) правого нуль-пространства $m\binom{t+q}{q} \times n\binom{t+q}{q}$ матрицы $\check{F}^{\mathrm{R}\ t}_{m\times n;q;s}$;
(vi.iii) $\tau_t := (h_t - r_t) - (h_{t-1} - r_{t-1})$;
(vi.iv) $\sigma_t := \tau_{t-1} - \tau_t$;
(vi.v) $\gamma_t := \gamma_{t-1} + \binom{t-1+q}{q}\sigma_t$;
(vi.vi) если $\tau_t = 0$ то $\widehat{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\sigma_t;q;t-1} := \widetilde{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_{t-1};q;t-1}$; выход
(vi.vii) вычислить базисную $n\binom{t+q}{q} \times \tau_t$ матрицу $\widetilde{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_t;q;t}$ разности подпространств $\check{X}^{\mathrm{R}}_{n\times h_t;q;t} \setminus \left(X^{\mathrm{R}}_{n\times r_t;q;t} \bigcup_{i=0}^{t-1} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \widehat{X}^{\mathrm{R}}_{n\times r_i;q;i} \end{bmatrix} \right)$;
(vi.viii) сформировать $n\binom{t-1+q}{q} \times \tau_t$ матрицу $\overline{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_t;q;t-1}$ из первых $\binom{t-1+q}{q}$ блочных компонент матрицы $\widetilde{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_t;q;t}$;
(vi.ix) вычислить базисную $n\binom{t+q}{q} \times \sigma_t$ матрицу $\widehat{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\sigma_t;q;t-1}$ разности подпространств $\widetilde{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_{t-1};q;t-1} \setminus \overline{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_t;q;t-1}$. ◄

Столбцы матрицы $\widetilde{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\tau_0;q;0}$ являются линейно независимыми собственными векторами матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$; число τ_0 дает геометрическую кратность точки спектра. Величина $s\min\{m,n\}$ представляет собой максимально возможный порядок жордановой полурешетки векторов матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$. На шаге t ($t > 0$) процесса вычисляются следующие характеристики нулевого собственного значения матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$:

τ_t – число жордановых полурешеток, порядок которых не меньше $t+1$;

σ_t – число жордановых цепочек, порядок которых равен t;

γ_t – сумма векторов из жордановых полурешеток, мультииндексы которых не превосходят t;

$\widehat{X}_{t-1}(\boldsymbol{\lambda})$ – отвечающая результантному столбцу $\widehat{X}^{\mathrm{R}}_{n\times\sigma_t;q;t-1}$ полиномиальная $n \times \sigma_t$ матрица, столбцы которой являются порождающими корневыми векторами порядка t, векторные коэффициенты которых, в свою очередь, образуют жордановы полурешетки векторов порядка t.

Замечание. В том случае, когда матрица $F(\boldsymbol{\lambda})$ имеет полный столбцовый ранг n, соответствующие операции алгоритма следует пропустить.

Рассмотрим теперь случай, когда точка $\boldsymbol{\lambda}^*$ спектра матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ не является нулевой. Тогда делаем замену $\boldsymbol{\lambda} := \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*$ (т.е. замены $\lambda_j := \lambda_j - \lambda_j^*,\ j = 1, \ldots, q$) и применяем описанный алгоритм к полиномиальной матрице $F_*(\boldsymbol{\lambda}) := F(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*)$. Получив жорданову полурешетку векторов $\{x_{*k}\}$, $\sigma_k = 0, 1, \ldots, t$, и, тем самым, порождающий корневой вектор $x_*(\boldsymbol{\lambda}) = \sum\limits_{\mathbf{k}} x_{*k}\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}}$, выполняем обратную замену $\boldsymbol{\lambda} := \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^*$ (т.е. $\lambda_j := \lambda_j + \lambda_j^*,\ j = 1, \ldots, q$). В результате получаем порождающий корневой вектор $x(\boldsymbol{\lambda}) := \sum\limits_{\mathbf{k}} x_{*\mathbf{k}}(\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^*)^k \equiv \sum\limits_{k} x_{k_1\ldots k_q}(\lambda_1 + \lambda_1^*)_1^k \cdots (\lambda_q + \lambda_q^*)_q^k$ степени t, отвечающий точке $\boldsymbol{\lambda}^*$ спектра исходной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ и, тем самым, искомую жорданову полурешетку векторов $\{x_{\mathbf{k}}\}$, $|\mathbf{k}| = 0, 1, \ldots, t$.

§5. Иллюстрация реализации алгоритма

Пример 1. Спектр регулярной двухпараметрической матрицы

$$F(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 1+\lambda & 1+\mu \\ 1-\mu & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

определяется ее характеристическим полиномом $\varpi(\lambda, \mu) = \lambda^2 - \mu^2$. Точка $(0, 0)$ ее спектра имеет кратность 2.

Строятся квазирезультантные матрицы:

$$\breve{F}^{\mathrm{R}\ 0}_{2\times 2;2;2} = F(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \breve{F}^{\mathrm{R}\ 1}_{2\times 2;2;2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & -1 & 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & & 1 & 1 \\ -1 & 0 & & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычисляются базисные матрицы их правых нуль-пространств:

$$\check{X}^{\mathrm{R}}_{2\times 1;2;1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \check{X}^{\mathrm{R}}_{2\times 3;2;1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Находится базис разности подпространства $\check{X}^{\mathrm{R}}_{2\times 3;2;1}$ и подпространства

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \check{X}^{\mathrm{R}}_{2\times 1;2;1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \check{X}^{\mathrm{R}}_{2\times 1;2;1} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}:$$

$$\widetilde{X}^{\mathrm{R}}_{2\times 1;2;1} = [1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T.$$

Блочные компоненты полученного вектора дают искомую жорданову полурешетку векторов:

$$x_{00} = [1 \quad -1]^T, \quad x_{10} = [-1 \quad 0]^T, \quad x_{01} = [0 \quad 1]^T.$$

Список литературы

1. В. Б. Хазанов, *О некоторых спектральных характеристиках λ-матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **139** (1984), 111–124.
2. В. Б. Хазанов, *Многопараметрическая проблема собственных значений: жордановы полурешетки векторов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **219** (1994), 213–220.
3. В. Б. Хазанов, *О спектральных свойствах многопараметрических полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **229** (1995), 284–321.
4. В. Б. Хазанов, *Результантный подход к вычислению векторных характеристик многопараметрических полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **323** (2005), 182–214.
5. В. Б. Хазанов, *Балансовое соотношение спектральных характеристик многопараметрической полиномиальной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **367** (2009), 187–194.
6. В. Б. Хазанов, *К вычислению характеристик регулярного конечного спектра сингулярной многопараметрической полиномиальной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 259–271.
7. В. Б. Хазанов, *Построение минимального базиса правого нуль-пространства сингулярной многопараметрической полиномиальной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 272–287.

Khazanov V. B. Computation of Jordan semi-lattices of vectors of a multiparameter polynomial matrix.

An algorithm for computing Jordan semi-lattices of vectors corresponding to a multiple point of the spectrum of a singular multiparameter polynomial matrix, based on using quasi-resultant matrices, is suggested. An illustration of the algorithm implementation is provided.

С.-Петербургский государственный
морской технический университет
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: khazanovvb@gmail.com

Поступило 18 июля 2020 г.