Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 496, 2020 г.

О. М. Косогоров, А. А. Макаров, С. В. Макарова

О МАТРИЧНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФИЛЬТРОВ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ СПЛАЙН-ВЕЙВЛЕТАМ СО СМЕЩЕННЫМ НОСИТЕЛЕМ

§1. Пространство координатных сплайнов

На отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку Δ^L с двумя дополнительными узлами вне отрезка $[a,b]$:

$$x^L_{-1} < a = x^L_0 < x^L_1 < \cdots < x^L_{n-1} < x^L_n = b < x^L_{n+1},$$

где $n = 2^L m$, причем $L, m \in \mathbb{Z}$, $L \geqslant 0$, $m \geqslant 1$.

Рассмотрим *порождающую* вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ с компонентами из пространства $C^1[a,b]$ и ненулевым вронскианом:

$$|\det(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}')(t)| \geqslant \mathrm{const} > 0, \quad t \in [a,b].$$

Для удобства, объекты, рассматриваемые на сетке Δ^L, будем снабжать верхним индексом L. Рассмотрим сплайны

$$\phi^L_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\det(\boldsymbol{\varphi}^L_{j-1}, \boldsymbol{\varphi}(t))}{\det(\boldsymbol{\varphi}^L_{j-1}, \boldsymbol{\varphi}^L_j)}, & t \in [x^L_{j-1}, x^L_j), \\ \dfrac{\det(\boldsymbol{\varphi}(t), \boldsymbol{\varphi}^L_{j+1})}{\det(\boldsymbol{\varphi}^L_j, \boldsymbol{\varphi}^L_{j+1})}, & t \in [x^L_j, x^L_{j+1}), \end{cases} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\varphi}^L_j \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}(x^L_j)$. Известно [1], что функции $\phi^L_j \in C[a,b]$. Более того, если $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, \rho(t))^T$, где $\rho \in C^1[a,b]$, то справедливо свойство *разбиения единицы*:

$$\sum_{j=0}^{n} \phi^L_j(t) \equiv 1, \quad t \in [a,b],$$

Ключевые слова: B-сплайн, минимальные сплайны, вейвлеты, сплайн-вейвлеты, вейвлетное разложение, блок фильтров, неравномерная сетка.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (МД-2242.2019.9).

при этом формулы (1) принимают вид

$$\phi_j^L(t) = \begin{cases} \dfrac{\rho(t) - \rho_{j-1}^L}{\rho_j^L - \rho_{j-1}^L}, & t \in [x_{j-1}^L, x_j^L), \\ \dfrac{\rho_{j+1}^L - \rho(t)}{\rho_{j+1}^L - \rho_j^L}, & t \in [x_j^L, x_{j+1}^L), \end{cases}$$

где $\rho_j^L \stackrel{\text{def}}{=} \rho(x_j^L)$.

Пространство

$$V^L \stackrel{\text{def}}{=} V^L(\Delta^L) = \left\{ s^L \mid s^L(t) = \sum_{j=0}^{2^L m} c_j^L \, \phi_j^L(t) \quad \forall \, c_j^L \in \mathbb{R}^1, t \in [a,b] \right\}$$

называется *пространством линейных минимальных $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнов (второго порядка)* на сетке Δ^L, причем

$$\dim V^L = 2^L m + 1.$$

Сами сплайны мы будем называть *координатными минимальными сплайнами максимальной гладкости.* В случае полиномиальных компонент порождающей вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}$ можно говорить о степени сплайна, тогда (полиномиальные) сплайны максимальной гладкости являются сплайнами первой степени. Разность между степенью сплайна и порядком его наивысшей непрерывной производной называется *дефектом* сплайна. Таким образом, сплайны максимальной гладкости являются сплайнами с минимальным дефектом (равным 1).

Ясно, что

$$\phi_j^L(x_i^L) = \delta_{j,i},$$

где $\delta_{j,i}$ – символ Кронекера. Более того, для строго монотонных функций $\rho(t)$ сплайн удовлетворяет неравенству $\phi_j^L(t) > 0$ внутри своего носителя.

При $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1,t)^T$, т.е. $\rho(t) = t$, функции ϕ_j^L совпадают с известными полиномиальными B-сплайнами первой степени (второго порядка), т.е. с одномерными функциями Куранта [2, 3]:

$$\phi_j^L(t) = \begin{cases} \dfrac{t - x_{j-1}^L}{x_j^L - x_{j-1}^L}, & t \in [x_{j-1}^L, x_j^L), \\ \dfrac{x_{j+1}^L - t}{x_{j+1}^L - x_j^L}, & t \in [x_j^L, x_{j+1}^L). \end{cases}$$

§2. О сплайн-вейвлетах со смещенным носителем

Пусть сетка Δ^{L+1} получена двукратным измельчением сетки Δ^L путем добавления новых узлов $\xi_j^L \in (x_j^L, x_{j+1}^L)$, $j = 0, \ldots, 2^L m - 1$, т.е.

$$x_j^{L+1} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_{-1}^L, & j = -1, \\ x_{j/2}^L, & j = 2k, \quad k = 0, \ldots, 2^L m, \\ \xi_{(j-1)/2}^L, & j = 2k-1, \quad k = 1, \ldots, 2^L m, \\ x_{2^L m+1}^L, & j = 2^{L+1} m + 1. \end{cases}$$

Тогда справедливы *калибровочные соотношения* [4]:

$$\phi_j^L(t) = \begin{cases} \phi_0^{L+1}(t) + p_{-1,2}^{L+1}\, \phi_1^{L+1}(t), & j = 0, \\ p_{j-1,0}^{L+1}\, \phi_{2j-1}^{L+1}(t) + p_{j-1,1}^{L+1}\, \phi_{2j}^{L+1}(t) \\ \qquad + p_{j-1,2}^{L+1}\, \phi_{2j+1}^{L+1}(t), & j = 1, \ldots, 2^L m - 1, \\ p_{2^L m-1,0}^{L+1}\, \phi_{2^{L+1}m-1}^{L+1}(t) + \phi_{2^{L+1}m}^{L+1}(t), & j = 2^L m, \end{cases} \tag{2}$$

где коэффициенты $p_{j,i}^{L+1} \in \mathbb{R}^1$, $i = 0, 1, 2$, вычисляются по формулам:

$$p_{j,0}^{L+1} = \frac{\det(\boldsymbol{\varphi}_{2j}^{L+1}, \boldsymbol{\varphi}_{2j+1}^{L+1})}{\det(\boldsymbol{\varphi}_{2j}^{L+1}, \boldsymbol{\varphi}_{2j+2}^{L+1})} = \frac{\rho_{2j+1}^{L+1} - \rho_{2j}^{L+1}}{\rho_{2j+2}^{L+1} - \rho_{2j}^{L+1}}, \qquad j = 0, \ldots, 2^L m - 1,$$

$$p_{j,1}^{L+1} = 1, \qquad j = -1, \ldots, 2^L m - 1,$$

$$p_{j,2}^{L+1} = \frac{\det(\boldsymbol{\varphi}_{2j+3}^{L+1}, \boldsymbol{\varphi}_{2j+4}^{L+1})}{\det(\boldsymbol{\varphi}_{2j+2}^{L+1}, \boldsymbol{\varphi}_{2j+4}^{L+1})} = \frac{\rho_{2j+4}^{L+1} - \rho_{2j+3}^{L+1}}{\rho_{2j+4}^{L+1} - \rho_{2j+2}^{L+1}}, \qquad j = -1, \ldots, 2^L m - 2.$$

Благодаря соотношениям (2), справедливо вложение $V^L \subset V^{L+1}$, а следовательно верно разложение

$$V^{L+1} = V^L \dotplus W^L, \tag{3}$$

где прямая сумма обозначена через $\dotplus$.

Пространство вейвлетов W^L можно определить как дополнение пространства V^L до пространства V^{L+1} таким образом, что любая функция из пространства V^{L+1} может быть записана в виде суммы некоторой функции из пространства V^L и некоторой функции из пространства W^L. При этом существуют различные возможности построения базисных функций в пространстве W^L.

Например, в качестве базисных функций в пространстве W^L можно использовать базисные функции из пространства V^{L+1} с центрами в нечетных узлах. Так получаются «ленивые» вейвлеты, которые не требуют дополнительных вычислений, являясь подмножеством масштабирующих функций (подробнее см. [4]). Ясно, что $\dim W^L = 2^L m$, причем выполняется условие дополнения размерностей рассматриваемых пространств, т.е. $\dim V^{L+1} = \dim V^L + \dim W^L$.

Здесь мы рассмотрим другой вариант (см. [5]) выбора базисных функций в пространстве W^L, заключающийся в использовании базисных функции из пространства V^{L+1} с центрами в четных узлах, при дополнительно накладываемом условии обнуления сплайна в последнем узле на отрезке $[a,b]$. В этом случае, мы считаем, что сплайн равен нулю при условии равенства нулю его значений на обоих концах одного элементарного сеточного интервала. Тогда соответствующие базисные функции удаляются из базисов рассматриваемых пространств V^{L+1}, V^L, W^L. Снабдим обозначения рассматриваемых пространств индексом «0»:

$$V_0^L \stackrel{\text{def}}{=} V_0^L(\Delta^L) = \left\{ S^L \;\middle|\; S^L(t) = \sum_{j=0}^{2^L m-1} C_j^L\, \phi_j^L(t)\, \forall C_j^L \in \mathbb{R}^1, t \in [a,b] \right\}, \tag{4}$$

$$\dim V_0^L = 2^L m.$$

Тогда $\dim W_0^L = 2^L m$, и выполняется условие дополнения размерностей рассматриваемых пространств:

$$\dim V_0^{L+1} = \dim V_0^L + \dim W_0^L.$$

Составим из базисных функций ϕ_j^L вектор-строку

$$\mathbf{\Phi}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(\phi_0^L, \phi_1^L, \ldots, \phi_{2^L m-1}^L\right).$$

Вводя для вектора, состоящего из коэффициентов аппроксимации, обозначение

$$\boldsymbol{C}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(C_0^L, C_1^L, \ldots, C_{2^L m-1}^L\right)^T,$$

запишем (4) в векторном виде:

$$S^L(t) = \mathbf{\Phi}^L(t)\, \boldsymbol{C}^L.$$

Тогда существует матрица *уточняющей реконструкции масштабирующих функций* (или матрица *последовательного деления*) $\mathfrak{P}^{L+1}$ размера $2^{L+1}m \times 2^L m$ такая, что

$$\mathbf{\Phi}^L = \mathbf{\Phi}^{L+1}\, \mathfrak{P}^{L+1}, \tag{5}$$

где элементы столбцов составлены из коэффициентов калибровочных соотношений (2). Мы здесь учитываем, что в каждом из пространств удалено по одной базисной функции:

$$
\phi_j^L(t) = \begin{cases} \phi_0^{L+1}(t) + p_{-1,2}^{L+1}\,\phi_1^{L+1}(t), & j=0, \\ p_{j-1,0}^{L+1}\,\phi_{2j-1}^{L+1}(t) + p_{j-1,1}^{L+1}\,\phi_{2j}^{L+1}(t) & \\ \qquad\qquad + p_{j-1,2}^{L+1}\,\phi_{2j+1}^{L+1}(t), & j = 1,\dots,2^L m-1. \end{cases} \tag{6}
$$

Матрица $\mathfrak{P}^{L+1}$ имеет следующий вид:

$$
\mathfrak{P}^{L+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_{-1,2}^{L+1} & p_{0,0}^{L+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_{0,2}^{L+1} & p_{1,0}^{L+1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^{L+1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{2^L m-3,0}^{L+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{2^L m-3,2}^{L+1} & p_{2^L m-2,0}^{L+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_{2^L m-2,2}^{L+1} \end{bmatrix}.
$$

Благодаря калибровочным соотношениям (6), справедливо вложение $V_0^L \subset V_0^{L+1}$, а следовательно, аналогично (3), верно вейвлетное разложение

$$
V_0^{L+1} = V_0^L \dotplus W_0^L. \tag{7}
$$

Базисные вейвлет-функции обозначим через

$$
\Psi_i^L(t) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{2i}^{L+1}(t), \quad i = 0,1,\dots,2^L m-1,
$$

и введем вектор-строку

$$
\boldsymbol{\Psi}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(\Psi_0^L, \Psi_1^L, \dots, \Psi_{2^L m-1}^L\right).
$$

Соответствующие вейвлет-коэффициенты аппроксимации обозначим через D_i^L, $i = 0,1,\dots,2^L m-1$, и введем вектор

$$
\boldsymbol{D}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(D_0^L, D_1^L, \dots, D_{2^L m-1}^L\right)^T.
$$

Поскольку пространство вейвлетов W_0^L по определению является подпространством V_0^{L+1}, можно представить вейвлет-функции Ψ_i^L в виде линейной комбинации масштабирующих функций ϕ_j^{L+1}. Таким образом, существует матрица *уточняющей реконструкции вейвлет-функций* $\mathfrak{Q}^{L+1}$ размера $2^{L+1}m \times 2^L m$ такая, что

$$\boldsymbol{\Psi}^L = \boldsymbol{\Phi}^{L+1}\,\mathfrak{Q}^{L+1}, \tag{8}$$

где все элементы столбцов матрицы $\mathfrak{Q}^{L+1}$ – нули, за исключением единственной единицы.

Матрица $\mathfrak{Q}^{L+1}$ имеет следующий вид:

$$\mathfrak{Q}^{L+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя обозначения для блочных матриц, представления (5) и (8) можно записать в виде единого калибровочного соотношения для масштабирующих функций и вейвлетов:

$$\left[\boldsymbol{\Phi}^L \mid \boldsymbol{\Psi}^L\right] = \boldsymbol{\Phi}^{L+1}\left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right]. \tag{9}$$

Ввиду разложения (7), любая функция из пространства V_0^{L+1} может быть записана в виде суммы некоторой функции из пространства V_0^L и некоторой функции из пространства W_0^L, причем справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} S^{L+1}(t) &= \boldsymbol{\Phi}^{L+1}(t)\,\boldsymbol{C}^{L+1} = \boldsymbol{\Phi}^L(t)\,\boldsymbol{C}^L + \boldsymbol{\Psi}^L(t)\,\boldsymbol{D}^L \\ &= \boldsymbol{\Phi}^{L+1}(t)\,\mathfrak{P}^{L+1}\,\boldsymbol{C}^L + \boldsymbol{\Phi}^{L+1}(t)\,\mathfrak{Q}^{L+1}\,\boldsymbol{D}^L. \end{aligned}$$

Пусть известны коэффициенты $\boldsymbol{C}^L$ и $\boldsymbol{D}^L$. Тогда коэффициенты $\boldsymbol{C}^{L+1}$ могут быть получены из коэффициентов $\boldsymbol{C}^L$ и $\boldsymbol{D}^L$ в виде

$$\boldsymbol{C}^{L+1} = \mathfrak{P}^{L+1}\,\boldsymbol{C}^L + \mathfrak{Q}^{L+1}\,\boldsymbol{D}^L \tag{10}$$

или, если использовать обозначения для блочных матриц, в виде

$$\boldsymbol{C}^{L+1} = \left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right] \left[\frac{\boldsymbol{C}^L}{\boldsymbol{D}^L}\right]. \tag{11}$$

Блочная матрица $\left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right]$ имеет следующий вид

$$\left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1\;0\;0\;\dots\;0 \\ p^{L+1}_{-1,2} & p^{L+1}_{0,0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\;0\;0\;\dots\;0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\;1\;0\;\dots\;0 \\ 0 & p^{L+1}_{0,2} & p^{L+1}_{1,0} & \dots & 0 & 0 & 0\;0\;0\;\dots\;0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\;0\;1\;\dots\;0 \\ 0 & 0 & p^{L+1}_{1,2} & \dots & 0 & 0 & 0\;0\;0\;\dots\;0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p^{L+1}_{2^L m-3,0} & 0 & 0\;0\;0\;\dots\;0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0\;0\;0\;\dots\;0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p^{L+1}_{2^L m-3,2} & p^{L+1}_{2^L m-2,0} & 0\;0\;0\;\dots\;0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0\;0\;0\;\dots\;1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p^{L+1}_{2^L m-2,2} & 0\;0\;0\;\dots\;0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

§3. Фильтры декомпозиции и реконструкции

Рассмотрим пространство $\mathbb{L}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, всех числовых последовательностей, представленных вектор-столбцами $\boldsymbol{l} = (l_0, l_1, \dots, l_n)^T$. Рассмотрим два экземпляра пространства $\mathbb{L}_n$, обозначая их через $\mathcal{C}^L$ и $\mathcal{D}^L$. Элементами пространства $\mathcal{C}^L$ являются векторы $\boldsymbol{C}^L$, а элементами пространства $\mathcal{D}^L$ – векторы $\boldsymbol{D}^L$. Обозначим через $\mathcal{C}^L \times \mathcal{D}^L$ прямое произведение пространств $\mathcal{C}^L$ и $\mathcal{D}^L$, т.е.

$$\mathcal{C}^L \times \mathcal{D}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left[\frac{\boldsymbol{C}^L}{\boldsymbol{D}^L}\right] \,\Big|\, \boldsymbol{C}^L \in \mathcal{C}^L, \boldsymbol{D}^L \in \mathcal{D}^L \right\}.$$

Рассмотрим оператор $\mathfrak{R}:\ \mathcal{C}^L \times \mathcal{D}^L \mapsto \mathcal{C}^{L+1}$, $\quad \mathfrak{R} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right]$, для которого

$$\boldsymbol{C}^{L+1} = \mathfrak{R} \left[\frac{\boldsymbol{C}^L}{\boldsymbol{D}^L}\right] = \left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right] \left[\frac{\boldsymbol{C}^L}{\boldsymbol{D}^L}\right].$$

Оператор $\mathfrak{R}$ называется оператором *реконструкции* (или *синтеза*), формулы (10)–(11) называются формулами *реконструкции*, а матрицы $\mathfrak{P}^{L+1}$ и $\mathfrak{Q}^{L+1}$ называются *фильтрами реконструкции.*

Рассмотрим обратный процесс разбиения известных коэффициентов $\boldsymbol{C}^{L+1}$ на более грубую версию $\boldsymbol{C}^{L}$ и уточняющие коэффициенты $\boldsymbol{D}^{L}$, который определяется матричными уравнениями

$$\boldsymbol{C}^{L} = \mathfrak{A}^{L+1}\boldsymbol{C}^{L+1}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{D}^{L} = \mathfrak{B}^{L+1}\boldsymbol{C}^{L+1}, \tag{14}$$

где матрицы $\mathfrak{A}^{L+1}$ и $\mathfrak{B}^{L+1}$ одинакового размера $2^{L}m \times 2^{L+1}m$ определяются из соотношения (9) следующим образом:

$$\left[\boldsymbol{\Phi}^{L} \mid \boldsymbol{\Psi}^{L}\right] \left[\frac{\mathfrak{A}^{L+1}}{\mathfrak{B}^{L+1}}\right] = \boldsymbol{\Phi}^{L+1}. \tag{15}$$

Рассмотрим оператор $\mathfrak{D}: \ \mathcal{C}^{L+1} \mapsto \mathcal{C}^{L} \times \mathcal{D}^{L}, \quad \mathfrak{D} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{\mathfrak{A}^{L+1}}{\mathfrak{B}^{L+1}}\right]$, для которого

$$\left[\frac{\boldsymbol{C}^{L}}{\boldsymbol{D}^{L}}\right] = \mathfrak{D}\,\boldsymbol{C}^{L+1} = \left[\frac{\mathfrak{A}^{L+1}}{\mathfrak{B}^{L+1}}\right]\boldsymbol{C}^{L+1}.$$

Оператор $\mathfrak{D}$ называется оператором *декомпозиции* (или *анализа*), формулы (13)–(14) называются формулами *декомпозиции*, а матрицы $\mathfrak{A}^{L+1}$ и $\mathfrak{B}^{L+1}$ – *фильтрами декомпозиции.*

Операторы $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{R}$ взаимно обратны. Они реализуют линейный изоморфизм пространств $\mathcal{C}^{L+1}$ и $\mathcal{C}^{L} \times \mathcal{D}^{L}$. Действительно, из соотношений (9) и (15), ввиду существования матрицы $\left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right]^{-1}$ (см. далее), имеем

$$\left[\frac{\mathfrak{A}^{L+1}}{\mathfrak{B}^{L+1}}\right] = \left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right]^{-1}.$$

В силу предыдущего представления, справедлива цепочка равенств

$$\mathfrak{R}\mathfrak{D} = \left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right]\left[\frac{\mathfrak{A}^{L+1}}{\mathfrak{B}^{L+1}}\right] = \mathfrak{P}^{L+1}\mathfrak{A}^{L+1} + \mathfrak{Q}^{L+1}\mathfrak{B}^{L+1} = I,$$

где I – единичная матрица соответствующего размера.

С другой стороны, верно представление

$$\mathfrak{D}\mathfrak{R} = \left[\frac{\mathfrak{A}^{L+1}}{\mathfrak{B}^{L+1}}\right]\left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right] = \left[\frac{\mathfrak{A}^{L+1}\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{A}^{L+1}\mathfrak{Q}^{L+1}}{\mathfrak{B}^{L+1}\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{B}^{L+1}\mathfrak{Q}^{L+1}}\right] = I,$$

откуда имеем

$$\mathfrak{A}^{L+1}\mathfrak{P}^{L+1} = I, \quad \mathfrak{B}^{L+1}\mathfrak{Q}^{L+1} = I,$$
$$\mathfrak{A}^{L+1}\mathfrak{Q}^{L+1} = O, \quad \mathfrak{B}^{L+1}\mathfrak{P}^{L+1} = O,$$

где I – единичные, а O – нулевые матрицы соответствующих размеров.

Из представления (12) видно, что матрицы $\left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right]$ разрежены. Однако матрицы, обратные к матрицам $\left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right]$, в общем случае теряют разреженную структуру. Найдем их явное представление.

Для матрицы $\left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right]$ трехдиагональная матрица

$$\left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right]' \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & & \\ p^{L+1}_{-1,2} & 0 & p^{L+1}_{0,0} & & & & & & \\ & 0 & 1 & 1 & & & & & \\ & & p^{L+1}_{0,2} & 0 & p^{L+1}_{1,0} & & & & \\ & & & 0 & 1 & \ddots & & & \\ & & & & p^{L+1}_{1,2} & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & 1 & & \\ & & & & & & 0 & p^{L+1}_{2^L m-2,0} & \\ & & & & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & & & p^{L+1}_{2^L m-2,2} & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

получается перестановкой столбцов матрицы (12) в соответствии с подстановкой

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 2^L m-1 & 2^L m & 2^L m+1 & \dots & 2^{L+1}m-1 \\ 0 & 2 & 4 & \dots & 2^{L+1}m-2 & 1 & 3 & \dots & 2^{L+1}m-1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Матрицу, соответствующую перестановке столбцов (17), обозначим через T. Тогда верно представление

$$\left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right]' = \left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right] T. \tag{18}$$

Определитель матрицы $\det\left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right]'$ отличен от нуля. Здесь с точностью до знака укажем, что $\left|\det\left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right]'\right| = \left|\prod\limits_{j=-1}^{2^L m-2} p^{L+1}_{j,2}\right|$, а следовательно у данной матрицы существует обратная.

Для наглядности приведем вид обратной матрицы для случая $m = 1$, $L = 2$. Верхний индекс $L+1$ у коэффициентов $p^{L+1}_{i,j}$ в записи ниже опущен.

$$\left[\mathfrak{P}^3 \mid \mathfrak{Q}^3\right]'^{-1}_{8\times 8} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{p_{-1,2}} & 0 & -\dfrac{p_{0,0}}{p_{-1,2}\,p_{0,2}} & 0 & \dfrac{p_{0,0}p_{1,0}}{p_{-1,2}p_{0,2}p_{1,2}} & 0 & -\dfrac{p_{0,0}p_{1,0}p_{2,0}}{p_{-1,2}p_{0,2}p_{1,2}p_{2,2}} \\ 1 & -\dfrac{1}{p_{-1,2}} & 0 & \dfrac{p_{0,0}}{p_{-1,2}\,p_{0,2}} & 0 & -\dfrac{p_{0,0}p_{1,0}}{p_{-1,2}p_{0,2}p_{1,2}} & 0 & \dfrac{p_{0,0}p_{1,0}p_{2,0}}{p_{-1,2}p_{0,2}p_{1,2}p_{2,2}} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{p_{0,2}} & 0 & -\dfrac{p_{1,0}}{p_{0,2}\,p_{1,2}} & 0 & \dfrac{p_{1,0}p_{2,0}}{p_{0,2}p_{1,2}p_{2,2}} \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{1}{p_{0,2}} & 0 & \dfrac{p_{1,0}}{p_{0,2}\,p_{1,2}} & 0 & -\dfrac{p_{1,0}p_{2,0}}{p_{0,2}p_{1,2}p_{2,2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{p_{1,2}} & 0 & -\dfrac{p_{2,0}}{p_{1,2}\,p_{2,2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\dfrac{1}{p_{1,2}} & 0 & \dfrac{p_{2,0}}{p_{1,2}\,p_{2,2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{p_{2,2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\dfrac{1}{p_{2,2}} \end{bmatrix}.$$

Из представления (18) находим

$$\left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right]^{-1} = T\left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right]'^{-1},$$

откуда следует, что для нахождения матрицы $\left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right]^{-1}$ к строкам матрицы $\left[\mathfrak{P}^{L+1} \mid \mathfrak{Q}^{L+1}\right]'^{-1}$ требуется применить перестановку обратную к (17), т.е. перестановку σ^{-1}, в которой записи образа и прообраза поменяны местами. Таким образом,

$$\left[\mathfrak{P}^3 \mid \mathfrak{Q}^3\right]^{-1}_{8\times 8} = \left[\begin{array}{cccccccc}
0 & \frac{1}{p_{-1,2}} & 0 & -\frac{p_{0,0}}{p_{-1,2}\,p_{0,2}} & 0 & \frac{p_{0,0}p_{1,0}}{p_{-1,2}p_{0,2}p_{1,2}} & 0 & -\frac{p_{0,0}p_{1,0}p_{2,0}}{p_{-1,2}p_{0,2}p_{1,2}p_{2,2}} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{p_{0,2}} & 0 & -\frac{p_{1,0}}{p_{0,2}\,p_{1,2}} & 0 & \frac{p_{1,0}p_{2,0}}{p_{0,2}p_{1,2}p_{2,2}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{p_{1,2}} & 0 & -\frac{p_{2,0}}{p_{1,2}\,p_{2,2}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{p_{2,2}} \\
\hline
1 & -\frac{1}{p_{-1,2}} & 0 & \frac{p_{0,0}}{p_{-1,2}\,p_{0,2}} & 0 & -\frac{p_{0,0}p_{1,0}}{p_{-1,2}p_{0,2}p_{1,2}} & 0 & \frac{p_{0,0}p_{1,0}p_{2,0}}{p_{-1,2}p_{0,2}p_{1,2}p_{2,2}} \\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{p_{0,2}} & 0 & \frac{p_{1,0}}{p_{0,2}\,p_{1,2}} & 0 & -\frac{p_{1,0}p_{2,0}}{p_{0,2}p_{1,2}p_{2,2}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{p_{1,2}} & 0 & \frac{p_{2,0}}{p_{1,2}\,p_{2,2}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{p_{2,2}}
\end{array}\right].$$

Отсюда находим явное представление фильтров декомпозиции:

$$\mathfrak{A}^3_{4\times 8} = \left[\begin{array}{cccccccc}
0 & \frac{1}{p_{-1,2}} & 0 & -\frac{p_{0,0}}{p_{-1,2}\,p_{0,2}} & 0 & \frac{p_{0,0}p_{1,0}}{p_{-1,2}p_{0,2}p_{1,2}} & 0 & -\frac{p_{0,0}p_{1,0}p_{2,0}}{p_{-1,2}p_{0,2}p_{1,2}p_{2,2}} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{p_{0,2}} & 0 & -\frac{p_{1,0}}{p_{0,2}\,p_{1,2}} & 0 & \frac{p_{1,0}p_{2,0}}{p_{0,2}p_{1,2}p_{2,2}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{p_{1,2}} & 0 & -\frac{p_{2,0}}{p_{1,2}\,p_{2,2}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{p_{2,2}}
\end{array}\right],$$

$$\mathfrak{B}^3_{4\times 8} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{p_{-1,2}} & 0 & \dfrac{p_{0,0}}{p_{-1,2}\,p_{0,2}} & 0 & -\dfrac{p_{0,0}p_{1,0}}{p_{-1,2}p_{0,2}p_{1,2}} & 0 & \dfrac{p_{0,0}p_{1,0}p_{2,0}}{p_{-1,2}p_{0,2}p_{1,2}p_{2,2}} \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{1}{p_{0,2}} & 0 & \dfrac{p_{1,0}}{p_{0,2}\,p_{1,2}} & 0 & -\dfrac{p_{1,0}p_{2,0}}{p_{0,2}p_{1,2}p_{2,2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\dfrac{1}{p_{1,2}} & 0 & \dfrac{p_{2,0}}{p_{1,2}\,p_{2,2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\dfrac{1}{p_{2,2}} \end{bmatrix}.$$

Явное представление фильтров декомпозиции и реконструкции необходимо, например, для построения помехоустойчивых кодов. Однако саму декомпозицию можно осуществить и без построения фильтров декомпозиции в явном виде. Для этого приходится решать разреженную систему линейных уравнений (11), разрешимость которой гарантируется линейной независимостью базисных функций. Для того, чтобы решить ее относительно коэффициентов $\boldsymbol{C}^L$ и $\boldsymbol{D}^L$, матрицу системы сперва нужно сделать ленточной (16), а затем уже применить один из специальных методов решения [6, 7].

Список литературы

1. А. А. Макаров, *О построении сплайнов максимальной гладкости.* – Пробл. матем. анализа **60** (2011), 25–38.
2. Ю. К. Демьянович, *Сплайн-вэйвлеты при однократном локальном укрупнении сетки.* – Зап. научн. семин. ПОМИ **405** (2012), 97–118.
3. А. А. Макаров, *О двух алгоритмах вейвлет-разложения пространств линейных сплайнов.* – Зап. научн. семин. ПОМИ **463** (2017), 277–293.
4. A. Makarov, S. Makarova, *On lazy Faber's type decomposition for linear splines*, AIP Conference Proceedings **2164**, 110006, 2019.
5. S. Makarova, A. Makarov, *On linear spline wavelets with shifted supports*, Lect. Notes Comp. Sci. **11974** (2020), 430–437.
6. Э. Столниц, Т. ДеРоуз, Д. Салезин, *Вейвлеты в компьютерной графике.* Пер. с англ. НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ижевск, 2002.
7. С. Уэлстид, *Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии.* Пер. с англ. Триумф, М., 2003.

Kosogorov O. M., Makarov A. A., Makarova S. V. Matrix representation of filter banks corresponding to spline wavelets with shifted supports.

The paper presents a matrix representation of filter banks corresponding to spline wavelets with shifted supports. The matrix form of decomposition and reconstruction filters simplifies the writing of nonuniform nonstationary

wavelet transforms built on nonuniform grids on a finite segment. Such a representation of filters is used, for example, in constructing error-correcting codes.

С.-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения
Россия, 190000, Санкт-Петербург
ул. Большая Морская, 67
E-mail: okosogorov@mail.ru

С.-Петербургский государственный университет
Россия, 199034, Санкт-Петербург
Университетская набережная, 7/9
E-mail: a.a.makarov@spbu.ru

С.-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения
Россия, 190000, Санкт-Петербург
ул. Большая Морская, 67
E-mail: sdrobot@mail.ru

Поступило 22 октября 2020 г.