Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 496, 2020 г.

Л. Ю. Колотилина

ОБ ОДНОМ БЛОЧНОМ ОБОБЩЕНИИ МАТРИЦ НЕКРАСОВА

§1. Введение

Как известно, матрицы Некрасова, введенные в работе [9], невырожденность которых была установлена в [1], образуют важный подкласс класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц.

Напомним, что $A = (a_{ij})$ называется матрицей Некрасова, если

$$h_i(A) < |a_{ii}|, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.1}$$

где величины $h_i(A)$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned} &h_1(A) = r_1(A), \\ &h_i(A) = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ясно, что все диагональные элементы матрицы Некрасова ненулевые, т.е. ее диагональная часть невырождена.

Как было установлено в [19], любая матрица Некрасова $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей, т.е. ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$ с элементами

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j, \end{cases}$$

является невырожденной $\mathcal{M}$-матрицей.

В матричных терминах, вектор $h(A) = (h_i(A))$ можно записать в виде

$$h(A) = |D|(|D| - |L|)^{-1}|U|e = |D|[I_n - (|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A)]e, \tag{1.3}$$

где $e = [1, \ldots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$ – единичный вектор, I_n – единичная матрица порядка n, а $A = D - L - U$ – стандартное расщепление матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ на ее диагональную (D), строго нижнюю треугольную $(-L)$

Ключевые слова: матрицы Некрасова, обобщенные матрицы Некрасова, невырожденные $\mathcal{H}$-матрицы, $\mathcal{M}$-матрицы, DZ матрицы, SDD матрицы, верхние оценки обратных.

и строго верхнюю треугольную $(-U)$ части соответственно. Таким образом, условие (1.1) равносильно неравенству (см. [19])

$$(|D| - |L|)^{-1}|U|e = [I_n - (|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A)]e < e \tag{1.4}$$

и означает, что Z-матрица

$$|D|(|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A) = |D| - (I_n - |L||D|^{-1})^{-1}|U|,$$

полученная умножением слева матрицы сравнения $\mathcal{M}(A)$ на нижнюю унитреугольную матрицу $(I_n - |L||D|^{-1})^{-1}$, имеет строгое диагональное преобладание.

В последнее время матрицы Некрасова и их различные обобщения изучались во многих работах, см., например, [3–5, 7, 8, 11–15, 21] и библиографию в них. В частности, блочные обобщения, основанные на так называемой блочной матрице сравнения, были предложены и рассматривались в работах [5, 12].

В данной работе мы вводим в рассмотрение другое обобщение матриц Некрасова, которое непосредственно переносит исходное определение на блочный случай. Стоит отметить, что класс обобщенных матриц Некрасова содержит не только обычные матрицы Некрасова, что естественно, но также и подкласс класса матриц Дашница–Зусмановича (DZ) [2].

В работе используются следующие обозначения.

• Для матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, через

$$r_i(A) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

обозначаются ее усеченные абсолютные строчные суммы;

• $\operatorname{diag}(A) = \operatorname{diag}\{a_{11}, \ldots, a_{nn}\}$ – диагональная часть матрицы A.

• Через I_n (или I) обозначается единичная матрица порядка n.

• $e = [1, \ldots, 1]^T$ – единичный вектор.

• Матричные неравенства понимаются покомпонентно.

• Для блочной $m \times m$ матрицы $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, через $A = D_A - L_A - U_A$ (или $A = D - L - U$) обозначается стандартное расщепление A на ее блочно (или точечно при $m = n$) диагональную (D_A), блочно (точечно) строго нижнюю треугольную $(-L_A)$ и блочно (точечно) строго верхнюю треугольную $(-U_A)$ части.

Статья построена следующим образом. В §2 мы вводим в рассмотрение обобщенные матрицы Некрасова (generalized Nekrasov, GN) и изучаем их основные свойства, которые в основном являются блочными аналогами известных свойств обычных матриц Некрасова. В частности, мы показываем, что класс GN содержит класс матриц со строгим диагональным преобладанием (strictly diagonally dominant, SDD) и сам содержится в классе невырожденных $\mathcal{H}$-матриц. Также мы доказываем, что класс GN матриц замкнут относительно дополнений по Шуру, получаемых в результате исключения ведущих блочных подматриц.

В §3 рассматриваются верхние оценки нормы l_∞ для матрицы, обратной к GN матрице, как в общем случае, так и в частном случае блочных 2×2 матриц. Отдельно рассматривается еще более частный случай блочных 2×2 GN матриц со скалярным первым диагональным блоком. Оценки нормы обратных, полученные для таких матриц, оказываются применимыми к матрицам Дашница–Зусмановича первого типа, определенным в работе [6], а также к матрицам со строгим диагональным преобладанием, в применении к которым они, вообще говоря, улучшают классические оценки, установленные в работах [10] и [20].

§2. Обобщенные матрицы Некрасова и их свойства

В этом параграфе мы вводим в рассмотрение так называемые обобщенные матрицы Некрасова (Generalized Nekrasov, GN) как одно из возможных блочных обобщений обычных матриц Некрасова и изучаем их основные свойства. В частности, мы доказываем, что GN матрицы образуют подкласс класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц, и этот подкласс замкнут относительно дополнений по Шуру, получаемых в результате исключения ведущих блочных подматриц.

Определение 2.1. Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, блочная $m \times m$ матрица и пусть $A = D - L - U$ – ее стандартное блочное расщепление. Будем говорить, что A является обобщенной матрицей Некрасова (GN матрицей), если блочно диагональная матрица $\mathcal{M}(D)$ обратима, а матрица

$$
\begin{aligned}
N_A :=& \mathcal{M}(D)(\mathcal{M}(D) - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A) \\
=& (I_n - |L|\mathcal{M}(D)^{-1})^{-1}\mathcal{M}(A) \\
=& \mathcal{M}(D) - (I_n - |L|\mathcal{M}(D)^{-1})^{-1}|U|
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

имеет строгое диагональное преобладание, т.е. является SDD матрицей.

Заметим, что в случае точечного разбиения, когда $m = n$ и $D = \operatorname{diag}(A)$, матрица A является GN матрицей тогда и только тогда, когда она является матрицей Некрасова.

По определению 1, мы имеем $N_A = N_{\mathcal{M}(A)}$, и A – GN матрица тогда и только тогда, когда ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A)$ есть GN матрица.

Далее мы будем рассматривать менее очевидные свойства GN матриц и начнем со следующего предложения.

Предложение 2.1. *Пусть* $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, *– GN матрица. Тогда*

(i) $\mathcal{M}(D)$ *является SDD* $\mathcal{M}$*-матрицей*

и

(ii) *блочная нижняя унитреугольная матрица*

$$\mathcal{L}(A) = I_n - |L|\mathcal{M}(D)^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -|A_{21}|\mathcal{M}(A_{11})^{-1} & I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -|A_{m1}|\mathcal{M}(A_{11})^{-1} & -|A_{m2}|\mathcal{M}(A_{22})^{-1} & \dots & -|A_{m,m-1}|\mathcal{M}(A_{m-1,m-1})^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

монотонна, причем $\mathcal{L}(A)^{-1} \geqslant I_n$.

Доказательство. Докажем оба утверждения одновременно по индукции. Представим матрицу $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A)$ в следующем блочном 2×2 виде:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_i & 0 \\ * & * \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Здесь $\mathcal{L}_i$ – ведущая главная подматрица матрицы $\mathcal{L}$ блочного порядка i. Тогда, очевидно,

$$\mathcal{L}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_i^{-1} & 0 \\ * & * \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Пусть сперва $i = 1$. В этом случае, $\mathcal{L}_1 = I$, и, в силу (2.1), первые блочные строки матриц $\mathcal{M}(A)$ и $N(A) = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}(A)$ совпадают, так что $\mathcal{M}(A_{11})$ – это SDD $\mathcal{M}$-матрица, а матрица $\mathcal{M}(A_{11})^{-1}$ неотрицательна.

Предположим теперь, что уже установлено, что при $k = 1, \dots, i-1$, $i \leqslant m$, матрицы $\mathcal{M}(A_{kk})$ являются SDD $\mathcal{M}$-матрицами и что $\mathcal{L}_k^{-1} \geqslant I$. Поскольку, в силу (2.1),

$$\mathcal{M}(D) = \operatorname{Diag}(\mathcal{M}(A_{11}), \dots, \mathcal{M}(A_{mm})) = N(A) + \mathcal{L}^{-1}|U|,$$

мы заключаем, что

$$\mathcal{M}(A_{ii})e \geqslant \{N(A)e\}^{(i)} > 0,$$

где через $\{N(A)e\}^{(i)}$ обозначена i-ая блочная компонента вектора $N(A)e$. Это значит, что $\mathcal{M}(A_{ii})$ – SDD $\mathcal{M}$-матрица, так что $\mathcal{L}_i^{-1} \geqslant I$ неотрицательна.

Предложение доказано. □

Ввиду предложения 2.1, GN матрицы также можно определить и следующим образом.

Определение 2.1′. Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, – блочная $m \times m$ матрица и пусть $A = D - L - U$ – ее стандартное блочное расщепление. Тогда A является GN матрицей, если $\mathcal{M}(D)$ и N_A, определенная в (2.1), обе имеют строгое диагональное преобладание.

Ясно, что из (2.1) и предложения 2.1 следует, что $N(A)$ – Z-матрица, т.е. ее внедиагональные элементы неположительны. Следовательно, тот факт, что матрица $N(A)$ имеет строгое диагональное преобладание, равносилен неравенству

$$N_A e > 0. \tag{2.3}$$

Заметим, что если сама матрица A имеет строгое диагональное преобладание, т.е. $\mathcal{M}(A)e > 0$, то, в силу (2.1), мы также имеем $N_A = (I_n - |L|\mathcal{M}(D)^{-1})^{-1}\mathcal{M}(A)e > 0$. Таким образом, любая SDD матрица заведомо является и GN матрицей.

Теперь мы покажем, что GN матрицы являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами.

Теорема 2.1. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, – GN матрица. Тогда A – невырожденная $\mathcal{H}$-матрица.*

Доказательство. Поскольку матрица N_A имеет строгое диагональное преобладание, то, очевидно, матрица $\mathcal{M}(A) = \mathcal{L}(A)N_A$ является невырожденной, и нам остается показать, что $\mathcal{M}(A)$ – $\mathcal{M}$-матрица. Для этого достаточно доказать, что матрица $\mathcal{M}(A)$ монотонна, т.е. $\mathcal{M}(A)^{-1} \geqslant 0$. Действительно, в силу (2.1), мы имеем

$$\mathcal{M}(A)^{-1} = N_A^{-1}\mathcal{L}(A)^{-1},$$

и матрица $\mathcal{M}(A)^{-1}$ неотрицательна как произведение двух неотрицательных матриц. □

Теперь для обобщенной матрицы Некрасова A, по аналогии со случаем обычных матриц Некрасова, мы введем в рассмотрение вектор

$$\begin{aligned} h(A) :=& \mathcal{M}(D)(\mathcal{M}(D) - |L|)^{-1}|U|e \\ =& (I - |L|\mathcal{M}(D)^{-1})^{-1}|U|e = \mathcal{L}(A)^{-1}|U|e. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Если $\mathcal{M}(D)$ есть $\mathcal{M}$-матрица, то вектор $h(A)$ неотрицателен, а если A – GN матрица, то условие $N_A e > 0$ можно записать в виде

$$M(D)e > h(A). \tag{2.5}$$

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Предложение 2.2. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $\mathcal{M}(D)$ является невырожденной $\mathcal{M}$-матрицей, а вектор $h(A)$ определяется по формуле* (2.4). *Тогда A является GN матрицей в том и только том случае, когда выполнено условие* (2.5).

Заметим, что в случае обычных некрасовских матриц мы имеем $\mathcal{M}(D) = |\operatorname{diag}(A)|$, а условие (2.5) сводится к неравенству $d(A) > h(A)$, где $d(A) = |\operatorname{diag}(A)|e$.

Теперь мы докажем, что если A – GN матрица, то отмасштабированная по блочному Якоби матрица $A' = D^{-1}A$ тем более является GN матрицей. Этот факт аналогичен тому факту, что если блочная матрица A имеет строгое диагональное преобладание, то матрица $D^{-1}A$, отмасштабированная по блочному Якоби, и подавно имеет строгое диагональное преобладание.

Предложение 2.3. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, – GN матрица. Тогда матрица $D^{-1}A$ также является GN матрицей.*

Доказательство. Используя очевидные неравенства

$$|D^{-1}L| \leqslant |D^{-1}||L| \quad \text{и} \quad |D^{-1}U| \leqslant |D^{-1}||U|,$$

а также неравенство Островского [18]

$$|D^{-1}| \leqslant \mathcal{M}(D)^{-1},$$

справедливое для невырожденной $\mathcal{H}$-матрицы D, мы выводим

$$\begin{aligned}
N_{D^{-1}A} &= I_n - (I_n - |D^{-1}L|)^{-1}\,|D^{-1}U| \\
&\geqslant I_n - (I_n - |D^{-1}||L|)^{-1}\,|D^{-1}||U| \\
&\geqslant I_n - (I_n - \mathcal{M}(D)^{-1}|L|)^{-1}\mathcal{M}(D)^{-1}|U| \\
&= (I_n - \mathcal{M}(D)^{-1}|L|)^{-1}(I_n - \mathcal{M}(D)^{-1}|L| - \mathcal{M}(D)^{-1}|U|) \\
&= (\mathcal{M}(D) - |L|)^{-1}\mathcal{M}(D)\mathcal{M}(D)^{-1}(\mathcal{M}(D) - |L| - |U|) \\
&= (\mathcal{M}(D) - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(D)^{-1}N_A.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Ввиду (2.6) и того факта, что, в силу предложения 2.1, матрица $\mathcal{M}(D)$ монотонна, из условия $N_A e > 0$ немедленно вытекает, что

$$N_{D^{-1}A}e \geqslant \mathcal{M}(D)^{-1}N_A e > 0,$$

что и доказывает то утверждение, что матрица $N_{D^{-1}A}$ имеет строгое диагональное преобладание, тогда как $D^{-1}A$ является GN матрицей. □

Заметим, что, в силу предложения 2.2, отмасштабированная по Якоби матрица $D^{-1}A$ является GN матрицей тогда и только тогда, когда

$$h(D^{-1}A) < e, \tag{2.7}$$

так что из предложения 2.3 следует, что если A – GN матрица, то имеет место неравенство (2.7).

Предложение 2.4. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{m} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, – блочная $m \times m$ матрица и пусть $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \mathbb{C}^n$ – невырожденная диагональная матрица. Тогда*

$$N_{\Delta A} = |\Delta| N_A.$$

Доказательство. Используя (2.1), мы выводим

$$\begin{aligned}
N_{\Delta A} &= \mathcal{M}(\Delta D)[\mathcal{M}(\Delta D) - |\Delta L|]^{-1}\mathcal{M}(\Delta A) \\
&= |\Delta|\mathcal{M}(D)[|\Delta|\mathcal{M}(D) - |\Delta||L|]^{-1}|\Delta|\mathcal{M}(A) \\
&= |\Delta|\mathcal{M}(D)[\mathcal{M}(D) - |L|]^{-1}\mathcal{M}(A) = |\Delta| N_A.
\end{aligned}$$ □

Из предложения 2.4 немедленно вытекает, что если A – GN матрица, то отмасштабированная по строкам матрица ΔA также является GN матрицей. Таким образом, класс GN замкнут относительно левого умножения на невырожденные диагональные матрицы.

В заключение этого параграфа мы докажем, что класс обобщенных матриц Некрасова $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m$ также замкнут и относительно дополнений по Шуру, получаемых в результате исключения ее ведущих главных блочных подматриц вида $A^{(k)} = (A_{ij})_{i,j=1}^k$, где $1 \leqslant k < m$.

Заметим, что поскольку любая GN матрица является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей, то все ее главные подматрицы обратимы, так что все дополнения по Шуру матрицы A определены корректно. Более того, любая ведущая главная подматрица $A^{(k)} = (A_{ij})_{i,j=1}^k$, $1 \leqslant k < m$, сама является GN матрицей, поскольку, как легко видеть, ассоциированная с ней матрица

$$N_{A^{(k)}} = \mathcal{L}(A^{(k)})^{-1}\mathcal{M}(A^{(k)})$$

имеет строгое диагональное преобладание как главная подматрица SDD матрицы N_A.

Замкнутость класса GN относительно дополнений по Шуру устанавливается в следующей теореме, обобщающей соответствующий результат о замкнутости множества матриц Некрасова относительно дополнений по Шуру, установленный в работе [16].

Теорема 2.2. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, – GN матрица, представленная в блочной форме как*

$$A = \begin{bmatrix} A^{(11)} & A^{(12)} \\ A^{(21)} & A^{(22)} \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

где $A^{(11)} = A^{(k)}$ – ведущая главная подматрица матрицы A блочного порядка k, $1 \leqslant k < m$. Тогда дополнение по Шуру

$$S_2(A) = A^{(22)} - A^{(21)}(A^{(11)})^{-1}A^{(12)}$$

также является GN матрицей.

Доказательство. Пусть $A = D_A - L_A - U_A$ – стандартное расщепление матрицы A на ее блочно диагональную (D_A), строго нижнюю блочно треугольную $(-L_A)$ и строго верхнюю блочно треугольную $(-U_A)$ части соответственно.

В соответствием с определением 1, для GN матрицы A справедливо неравенство

$$N_A e = \mathcal{L}(A)^{-1}\mathcal{M}(A)e > 0,$$

где, как и выше,

$$\mathcal{L}(A) = I_n - |L_A|\mathcal{M}(D_A)^{-1}.$$

Сперва мы докажем эту теорему в том случае, когда $A = \mathcal{M}(A)$ является GN $\mathcal{M}$-матрицей, т.е. $D_A = \mathcal{M}(D_A)$, а матрицы L_A и U_A неотрицательны. В соответствием с блочным разбиением (2.8) матрицы A, представим D_A и L_A в блочном виде как

$$D_A = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, \qquad L_A = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ A^{(21)} & L_2 \end{bmatrix},$$

где $A^{(11)} = D_1 - L_1 - U_1$ и $A^{(22)} = D_2 - L_2 - U_2$ – это стандартные блочные расщепления диагональных блоков $A^{(11)}$ и $A^{(22)}$. Тогда

$$\mathcal{L}(A) = I_n - L_A D_A^{-1} = \begin{bmatrix} I - L_1 D_1^{-1} & 0 \\ -A^{(21)} D_1^{-1} & I - L_2 D_2^{-1} \end{bmatrix}$$

и

$$\mathcal{L}(A)^{-1} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix},$$

где

$$L_{11} = (I - L_1 D_1^{-1})^{-1} = \mathcal{L}(A^{(11)})^{-1}$$

и

$$L_{22} = (I - L_2 D_2^{-1})^{-1} = \mathcal{L}(A^{(22)})^{-1}.$$

В этих обозначениях мы имеем

$$N_A = \mathcal{L}(A)^{-1} A = \begin{bmatrix} L_{11} A^{(11)} & -L_{11} A^{(12)} \\ L_{21} A^{(11)} - L_{22} A^{(21)} & L_{22} A^{(22)} - L_{21} A^{(12)} \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S_2(N_A) &= L_{22} A^{(22)} - L_{21} A^{(12)} \\ &\quad + (L_{21} A^{(11)} - L_{22} A^{(21)})(A^{(11)})^{-1} L_{11}^{-1} L_{11} A^{(12)} \\ &= L_{22}(A^{(22)} - A^{(21)}(A^{(11)})^{-1} A^{(12)}) \\ &= \mathcal{L}(A^{(22)})^{-1} S_2(A). \end{aligned}$$

Поскольку матрица N_A имеет строгое диагональное преобладание, ее дополнение по Шуру $S_2(N_A)$ также имеет строгое диагональное преобладание, т.е.

$$\mathcal{L}(A^{(22)})^{-1} S_2(A) e > 0. \tag{2.9}$$

Поскольку, очевидно, $S_2(A) \leqslant A^{(22)}$, для компонент стандартных блочных расщеплений матриц $S_2(A)$ и $A^{(22)}$ справедливы неравенства $L_{S_2(A)} \geqslant L_{A^{(22)}} = L_2$ и $D_{S_2(A)} \leqslant D_{A^{(22)}} = D_2$, из которых следует, что

$$\mathcal{L}(S_2(A)) = I - L_{S_2(A)} D_{S_2(A)}^{-1} \leqslant I - L_2 D_2^{-1} = \mathcal{L}(A^{(22)}).$$

Поскольку $\mathcal{L}(S_2(A))$ – невырожденная $\mathcal{M}$-матрица, отсюда следует, что

$$\mathcal{L}(S_2(A))^{-1}\mathcal{L}(A^{(22)}) \geqslant I. \tag{2.10}$$

Теперь, используя (2.9) и (2.10), мы выводим

$$\begin{aligned} N_{S_2(A)}e &= \mathcal{L}(S_2(A))^{-1}S_2(A)e \\ &= [\mathcal{L}(S_2(A))^{-1}\mathcal{L}(A^{(22)})]\mathcal{L}(A^{(22)})^{-1}S_2(A)e > 0. \end{aligned}$$

Тем самым показано, что $N_{S_2(A)}$ – SDD матрица, т.е. $S_2(A)$ является GN матрицей, что завершает доказательство для того случая, когда A является $\mathcal{M}$-матрицей.

Наконец, рассмотрим общий случай, в котором

$$\mathcal{M}(A) = \begin{bmatrix} \mathcal{M}(A^{(11)}) & -|A^{(12)}| \\ -|A^{(21)}| & \mathcal{M}(A^{(22)}) \end{bmatrix}.$$

Поскольку $|(A^{(11)})^{-1}| \leqslant \mathcal{M}(A^{(11)})^{-1}$ (см. [18]), то

$$\mathcal{M}(S_2(A)) \geqslant \mathcal{M}(A^{(22)}) - |A^{(21)}|\mathcal{M}(A^{(11)})^{-1}|A^{(12)}| = S_2(\mathcal{M}(A)). \tag{2.11}$$

Мы имеем

$$S_2(A) \in \{GN\} \Longleftrightarrow \mathcal{M}(S_2(A)) \in \{GN\} \Longleftrightarrow N_{\mathcal{M}(S_2(A))}e > 0.$$

Как нетрудно убедиться, если $B_1 = D_1 - L_1 - U_1$ и $B_2 = D_2 - L_2 - U_2$ – $\mathcal{M}$-матрицы и $B_1 \geqslant B_2$, то

$$N_{B_1} = (I - L_1D_1^{-1})^{-1}B_1 \geqslant (I - L_2D_2^{-1})^{-1}B_2 = N_{B_2}.$$

Из этого факта и неравенства (2.11) следует, что

$$N_{\mathcal{M}(S_2(A))} \geqslant N_{S_2(\mathcal{M}(A))}. \tag{2.12}$$

Как было установлено в первой части доказательства, для дополнения по Шуру GN $\mathcal{M}$-матрицы $\mathcal{M}(A)$ справедливо неравенство

$$N_{S_2(\mathcal{M}(A))}e > 0,$$

а значит, ввиду (2.12), справедливо и неравенство

$$N_{\mathcal{M}(S_2(A))}e > 0.$$

Таким образом, $\mathcal{M}(S_2(A))$ является GN матрицей, что и означает, что $S_2(A)$ – GN матрица. $\square$

§3. Верхние оценки $\|A^{-1}\|_\infty$ для GN матриц A

В этом параграфе сперва мы выводим общую верхнюю оценку нормы $\|A^{-1}\|_\infty$ для GN матрицы A. Затем мы рассматриваем случай блочных 2×2 GN матриц и, в частности, тот подслучай, когда первый диагональный блок блочной 2×2 GN матрицы $A = (A_{ij})$ имеет порядок один. В заключение, полученные оценки обратных применяются к SDD матрицам.

Общая оценка обратных для GN матриц легко получается из следующей теоремы.

Теорема 3.1 ([8]). *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, и пусть для некоторой матрицы $G \in \mathbb{C}^{n\times n}$ матрица GA имеет строгое диагональное преобладание. Тогда обе матрицы A и G обратимы, и справедлива оценка*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{|G|e\}_i}{\{\mathcal{M}(GA)e\}_i}. \tag{3.1}$$

Ясно, что если $A = (A_{ij})$ – GN матрица, то ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1 при $G = \mathcal{L}(A)^{-1}$. Таким образом, используя теорему 3.1 и неравенство Островского [18]

$$|A^{-1}| \leqslant \mathcal{M}(A)^{-1},$$

справедливое для $\mathcal{H}$-матрицы A, для обратной к GN матрице мы немедленно получаем следующую верхнюю оценку.

Теорема 3.2. *Пусть $A = (A_{ij})_{i,j=1}^m \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, является GN матрицей. Тогда*

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|_\infty \leqslant \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{\mathcal{L}(A)^{-1}e\}_i}{\{\mathcal{L}(A)^{-1}\mathcal{M}(A)e\}_i} \\ &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{\mathcal{L}(A)^{-1}e\}_i}{\{N(A)e\}_i} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{\mathcal{L}(A)^{-1}e\}_i}{\{\mathcal{M}(D)e - \mathcal{L}(A)^{-1}|U|e\}_i} \\ &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{\mathcal{L}(A)^{-1}e\}_i}{\{\mathcal{M}(D)e - h(A)\}_i}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Заметим, что для того, чтобы воспользоваться оценкой (3.2), необходимо решить две линейных системы с блочно унитреугольной матрицей $\mathcal{L}(A) = I_n - |L|\mathcal{M}(D)^{-1}$, скажем,

$$\mathcal{L}(A)x = e \quad \text{и} \quad \mathcal{L}(A)y = |U|e,$$

каждая из которых предполагает последовательное решение линейных систем с матрицами $\mathcal{M}(A_{ii})$, $i = 1, \dots, m-1$.

Как нетрудно видеть, в случае обычных матриц Некрасова, оценка (3.2) сводится к оценке, установленной в работе [3].

Рассмотрим теперь тот частный случай, в котором A – блочная 2×2 GN матрица порядка $n = n_1 + n_2$, $n_1, n_2 \geqslant 1$,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L}(A) = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ -|A_{21}|\mathcal{M}(A_{11})^{-1} & I_{n_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{L}(A)^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ |A_{21}|\mathcal{M}(A_{11})^{-1} & I_{n_2} \end{bmatrix}, \quad N_A = \begin{bmatrix} \mathcal{M}(A_{11}) & -|A_{12}| \\ 0 & S_2(\mathcal{M}(A)) \end{bmatrix}.$$

В этом случае,

$$x = \mathcal{L}(A)^{-1}e = \begin{bmatrix} e \\ e + |A_{21}|\mathcal{M}(A_{11})^{-1}e \end{bmatrix}$$

и

$$z = N_A e = \begin{bmatrix} \mathcal{M}(A_{11})e - |A_{12}|e \\ \mathcal{M}(A_{22})e - |A_{21}|\mathcal{M}(A_{11})^{-1}|A_{12}|e \end{bmatrix} > 0,$$

откуда, в силу (3.2), получаем

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{ \max_{1\leqslant i\leqslant n_1} \frac{1}{|a_{ii}| - r_i(A)},\ \max_{1\leqslant i\leqslant n_2} \frac{x_{n_1+i}}{z_{n_1+i}} \right\}. \tag{3.3}$$

Ясно, что для вычисления оценки (3.3) требуется решить две линейные системы с матрицей $\mathcal{M}(A_{11})$. Заметим, что в общем случае в (3.3) невозможно использовать оценку

$$z_{n_1+i} \geqslant \{\mathcal{M}(A_{22})e - \|\mathcal{M}(A_{11})^{-1}\|_\infty |A_{21}|\,|A_{12}|e\}_i, \quad i = 1, \dots, n_2,$$

позволяющую избежать решения системы с матрицей $\mathcal{M}(A_{11})$, поскольку результирующий знаменатель может оказаться неположительным.

Оценка (3.3) упрощается в том частном случае, когда $n_1 = 1$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & u^T \\ v & A_{22} \end{bmatrix}, \quad u^T = [a_{12}, \dots, a_{1n}] \ \text{ и } \ v = [a_{21}, \dots, a_{n1}]^T, \tag{3.4}$$

$$\mathcal{L}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{|v|}{|a_{11}|} & I_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$N_A = \begin{bmatrix} |a_{11}| & -|u|^T \\ 0 & \mathcal{M}(A_{22}) - \frac{|v||u|^T}{|a_{11}|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |a_{11}| & -|u|^T \\ 0 & S_2(\mathcal{M}(A)) \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$\{\mathcal{L}(A)^{-1}e\}_i = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ 1 + \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|}, & i \geqslant 2, \end{cases}$$

и

$$\{N_A e\}_i = \begin{cases} |a_{11}| - r_1(A), & i = 1, \\ |a_{ii}| - r_i^1(A) - \frac{|a_{i1}|}{|a_{11}|}|r_1(A), & i \geqslant 2. \end{cases} \tag{3.5}$$

Здесь и далее мы используем следующие обозначения:

$$r_i^j(A) = r_i(A) - |a_{ij}|, \quad i \neq j.$$

Итак, для матриц вида (3.4) из теоремы 3.2 вытекает следующий результат.

Следствие 3.1. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *– GN матрица вида* (3.4). *Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max\left\{\frac{1}{|a_{11}| - r_1(A)},\ \max_{2\leqslant i\leqslant n}\frac{|a_{11}| + |a_{i1}|}{[|a_{ii}| - r_i^1(A)]|a_{11}| - |a_{i1}|r_1(A)}\right\}. \tag{3.6}$$

Здесь уместно заметить, что соотношения (3.5) означают, что, в терминологии работы [6], GN матрица (3.4) является матрицей Дашница–Зусмановича (DZ) [2] первого типа, а оценка (3.6) совпадает (с точностью до соответствующей перестановки строк и столбцов) с оценкой (4.17), установленной для таких матриц в работе [6].

Для сокращения записи введем следующие дополнительные обозначения:

$$p_i(A) = |a_{ii}| - r_i(A), \quad i = 1, \dots, n;$$

$$\begin{aligned} s_{ij}(A) &= [|a_{jj}| - r_j^i(A)]|a_{ii}| - |a_{ji}|r_i(A) \\ &= p_j(A)|a_{ii}| + p_i(A)|a_{ji}|, \quad i, j = 1, \dots, n; \end{aligned}$$

$$f_{ij}(A) = \frac{|a_{ii}| + |a_{ji}|}{p_j(A)|a_{ii}| + p_i(A)|a_{ji}|} = \frac{|a_{ii}| + |a_{ji}|}{s_{ij}(A)}, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{3.7}$$

Заметим, что при $i = j$ мы имеем

$$s_{ii}(A) = 2|a_{ii}|p_i(A), \quad f_{ii}(A) = \frac{1}{p_i(A)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Во введенных обозначениях оценку (3.6) можно записать следующим образом:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|a_{11}| + |a_{i1}|}{s_{1i}(A)} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} f_{1i}(A). \tag{3.6$'$}$$

Кроме того, из (3.7) легко следует, что

$$\min\left\{\frac{1}{p_i(A)},\ \frac{1}{p_j(A)}\right\} \leqslant f_{ij}(A) \leqslant \max\left\{\frac{1}{p_i(A)},\ \frac{1}{p_j(A)}\right\}. \tag{3.8}$$

Следовательно, оценку (3.6′) также можно записать и в виде

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n:\\ p_i(A)\leqslant p_1(A)}} f_{1i}(A) = \max\left\{\frac{1}{p_1(A)} \quad \max_{\substack{1< i\leqslant n:\\ p_i(A)\leqslant p_1(A)}} f_{1i}(A)\right\}. \tag{3.6″}$$

Теперь мы установим альтернативную оценку для обратной к GN матрице вида (3.4), т.е. для обратной к матрице перестановочно подобной матрице Дашница–Зусмановича первого типа.

Теорема 3.3. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *– GN матрица вида* (3.4). *Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \left(1+\frac{r_1(A)}{|a_{11}|}\right)\max\left\{\frac{1}{|a_{11}|},\ \max_{\substack{i\neq 1:\\ p_i(A)\leqslant p_1(A)}} f_{1i}(A)\right\}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Следуя [17], преобразуем матрицу $N(A)$ в матрицу

$$B := N(A)Q = \begin{bmatrix} |a_{11}| & -|u|^T \\ 0 & S_2(\mathcal{M}(A)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{|u|^T}{|a_{11}|} \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |a_{11}| & 0 \\ 0 & S_2(\mathcal{M}(A)) \end{bmatrix},$$

которая, наряду с матрицей $N(A)$, имеет строгое диагональное преобладание. Тогда будем иметь

$$\mathcal{M}(A)^{-1} = [\mathcal{L}(A)BQ^{-1}]^{-1} = Q[\mathcal{L}(A)B]^{-1}, \tag{3.10}$$

$$\|Q\|_\infty = 1+\frac{r_1(A)}{|a_{11}|}. \tag{3.11}$$

Рассмотрим матрицу

$$C := \mathcal{M}(A)Q = \mathcal{L}(A)B = \begin{bmatrix} |a_{11}| & 0 \\ -|v| & S_2(\mathcal{M}(A)) \end{bmatrix}.$$

Поскольку

$$\mathcal{L}(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{|v|}{|a_{11}|} & I_{n-1} \end{bmatrix} = \mathcal{L}(A),$$

а $N_C = \mathcal{L}(C)^{-1}C = B$ является SDD матрицей, то C – блочная 2×2 GN матрица. Следовательно, к $C = \mathcal{L}(A)B$ применима теорема 3.2, и мы получаем

$$
\begin{aligned}
\|C^{-1}\|_\infty &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\{\mathcal{L}(A)^{-1}e\}_i}{\{Be\}_i} \\
&= \max\left\{\frac{1}{|a_{11}|},\ \max_{i\geqslant 2} \frac{|a_{11}|+|a_{i1}|}{[|a_{i1}|-r_i^1(A)]|a_{11}|-|a_{i1}|r_1(A)}\right\} \\
&= \max\left\{\frac{1}{|a_{11}|},\ \max_{i\geqslant 2} f_{1i}(A)\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Наконец, используя (3.10), (3.11), (3.12) и (3.8), мы выводим

$$
\begin{aligned}
\|A^{-1}\|_\infty &\leqslant \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty \leqslant \|Q\|_\infty\, \|C^{-1}\|_\infty \\
&\leqslant \left(1+\frac{r_1(A)}{|a_{11}|}\right)\max\left\{\frac{1}{|a_{11}|},\ \max_{i\neq 1} f_{1i}(A)\right\} \\
&= \left(1+\frac{r_1(A)}{|a_{11}|}\right)\max\left\{\frac{1}{|a_{11}|},\ \max_{\substack{i\neq 1:\\ p_i(A)\leqslant p_1(A)}} f_{1i}(A)\right\}.
\end{aligned}
$$

Теорема 3.3 доказана. □

Как нетрудно убедиться, объединяя следствие 3.1 и теорему 3.3, а также используя очевидные неравенства

$$
\left(1+\frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}\right)\frac{1}{|a_{ii}|} \leqslant \frac{1}{p_i(A)}, \quad i=1,\dots,n,
$$

мы приходим к следующему интегрированному результату.

Следствие 3.2. *Пусть* $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $n\geqslant 1$, *– матрица со строгим диагональным преобладанием. Тогда*

$$
\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \begin{cases}
\zeta_1(A), & \text{если } \zeta_1(A)\geqslant \frac{1}{p_1(A)},\\
\left(1+\frac{r_1(A)}{|a_{11}|}\right)\frac{1}{|a_{11}|}, & \text{если } \zeta_1(A)\leqslant \frac{1}{|a_{11}|},\\
\min\left\{\frac{1}{p_1(A)}, \left(1+\frac{r_1(A)}{|a_{11}|}\right)\zeta_1(A)\right\}, & \text{если } \frac{1}{|a_{11}|}\leqslant\zeta_1(A)\leqslant\frac{1}{p_1(A)},
\end{cases}
\tag{3.13}
$$

где мы использовали обозначение

$$
\zeta_i(A)=\max_{j\neq i} f_{ij}(A) = \max_{\substack{j\neq i:\\ p_j(A)\leqslant p_i(A)}} f_{ij}(A), \quad i=1,\dots,n.
\tag{3.14}
$$

Рассмотрим теперь случай SDD матриц, которые, очевидно, можно рассматривать как блочные 2×2 GN матрицы с $n_1=1$.

Поскольку свойство строгого диагонального преобладания сохраняется при симметричных перестановках строк и столбцов матрицы, из следствия 3.1, теоремы 3.3 и следствия 3.2 немедленно вытекает, что матрицы, обратные к SDD матрицам, удовлетворяют следующим верхним оценкам.

Следствие 3.3. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, *является* SDD *матрицей. Тогда*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} \max_{\substack{1\leqslant j\leqslant n:\\ p_j(A)\leqslant p_i(A)}} f_{ij}(A), \tag{3.15}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} \left\{ \left(1+\frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}\right) \max\left\{ \frac{1}{|a_{ii}|},\ \max_{\substack{j\neq i:\\ p_j(A)\leqslant p_i(A)}} f_{ij}(A) \right\}\right\} \tag{3.16}$$

и

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} \begin{cases} \zeta_i(A), & \text{если } \zeta_i(A) \geqslant \frac{1}{p_i(A)},\\ \left(1+\frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}\right)\frac{1}{|a_{ii}|}, & \text{если } \zeta_i(A)\leqslant \frac{1}{|a_{ii}|},\\ \min\left\{\frac{1}{p_i(A)}, \left(1+\frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}\right)\zeta_i(A)\right\}, & \text{если } \frac{1}{|a_{ii}|}\leqslant \zeta_1(A)\leqslant \frac{1}{p_i(A)}, \end{cases} \tag{3.17}$$

где $\zeta_i(A)$ *определены в* (3.14).

Как легко видеть, оценки (3.16) и (3.17) улучшают оценку

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\left(1+\frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}\right)\left(1+\frac{\max_{j\neq i}|a_{ji}|}{|a_{ii}|}\right) \times \max\left\{\frac{1}{|a_{ii}|},\ \max_{j\neq i}\frac{|a_{ii}|}{s_{ij}(A)}\right\}\right\}, \tag{3.18}$$

недавно установленную в работе [17]. (Заметим, что в [17] вместо сомножителя $1+\frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}$ использовалось число 2.)

Наконец, заметим, что, ввиду (3.8), для SDD матрицы A все оценки (3.15)–(3.17), вообще говоря, улучшают классическую верхнюю оценку [10, 20]

$$\|A^{-1}\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{p_i(A)}.$$

Список литературы

1. В. В. Гудков, *Об одном признаке неособенности матриц.* — Латвийский математический ежегодник, Рига (1966), 385–390.
2. Л. С. Дашниц, М. С. Зусманович, *О некоторых критериях регулярности матриц и локализации их спектра.* — Ж. вычисл. мат. мат. физ., **10**, No. 5 (1970), 1092–1097.
3. Л. Ю. Колотилина, *Оценки бесконечной нормы обратных к матрицам Некрасова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **419** (2013), 111–120.
4. Л. Ю. Колотилина, *Оценки обратных для обобщенных матриц Некрасова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **428** (2014), 182–195.
5. Л. Ю. Колотилина, Оценки обратных в норме l_∞ для некоторых блочных матриц. — Зап. научн. семин. ПОМИ **439** (2015), 145–158.
6. Л. Ю. Колотилина, *О матрицах Дашница–Зусмановича (DZ) и матрицах типа Дашница–Зусмановича (DZT) и их обратных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 145–165.
7. Л. Ю. Колотилина, *Матрицы некрасовского типа и оценки для их обратных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 169–183.
8. Л. Ю. Колотилина, *Некоторые новые классы невырожденных матриц и верхние оценки для их обратных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 184–200.
9. Р. Мемке, П. А. Некрасов, *Решеніе линейной системы уравненій посредствомъ последовательныхъ приближеній.* — Матем. сб., **16** (1892), 437–459.
10. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, *Convergence properties of the spline fit.* — J. Soc. Ind. Appl. Math. **11** (1963), 95–104.
11. L. Cvetković, P.-F. Dai, K. Doroslovački, Y.-T. Li, *Infinity norm bounds for the inverse of Nekrasov matrices.* — Appl. Math. Comput. **219** (2013), 5020–5024.
12. L. Cvetković, K. Doroslovački, *Max norm estimation for the inverse of block matrices.* — Appl. Math. Comput. **242** (2014), 694–706.
13. L. Cvetković, V. Kostić, K. Doroslovački, *Max-norm bounds for the inverse of S-Nekrasov matrices.* — Appl. Math. Comput. **218** (2012), 9498–9503.
14. L. Cvetković, V. Kostić, M. Nedović, *Generalizations of Nekrasov matrices and applications.* — Open Math. **13** (2015), 96–105.
15. L. Cvetković, V. Kostić, S. Rauški, *A new subclass of H-matrices.* — Appl. Math. Comput. **208** (2009), 206–210.
16. Kh. D. Ikramov, M. Yu. Ibragimov, *The Nekrasov property is hereditary for Gaussian elimination.* — ZAMM **77** (1997), 394–396.
17. C. Q. Li, *Schur complement-based infinity norm bounds for the inverse of SDD matrices.* — Bull. Malays. Math. Psci. Soc. (2018). `https://doi.org/10.1007/s40840-020-00895-x`.
18. A. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv. **10** (1937), 69–96.
19. F. Robert, *Blocs-H-matrices et convergence des méthodes itérative.* — Linear Algebra Appl. **2** (1969), 223–265.
20. J. M. Varah, *A lower bound for the smallest singular value of a matrix.* — Linear Algebra Appl. **11** (1975), 3–5.

21. Y. Wang, L. Gao, *An improvement of the infinity norm bound for the inverse of* $\{P_1, P_2\}$*-Nekrasov matrices.* — J. Ineq. Appl. **177** (2019).

Kolotilina L. Yu. A block generalization of Nekrasov matrices.

The paper introduces the so-called generalized Nekrasov (GN) matrices, which provide a block extension of the conventional Nekrasov matrices. Basic properties of GN matrices are studied. In particular, it is proved that the GN matrices form a subclass of nonsingular $\mathcal{H}$-matrices and this subclass is closed with respect to Schur complements obtained by eliminating leading principal block submatrices. Also an upper bound for the l_∞-norm of the inverse to a GN matrix is obtained, which generalizes the known bound for Nekrasov matrices. The case of block two-by-two GN matrices with scalar first diagonal block, which prove to be Dashnic–Zusmanovich matrices of the first type, is considered separately. The bounds obtained are applied to SDD matrices.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: lilikona@mail.ru

Поступило 14 октября 2020 г.