Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 496, 2020 г.

**Л. Ю. Колотилина**

# НОВЫЕ ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПЕРРОНОВСКОГО КОРНЯ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ КРИТЕРИИ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ МАТРИЦ

## §1. Введение и предварительные сведение

Как хорошо известно (см., например., [12]), условия невырожденности матрицы типа диагонального преобладания эквивалентны тому утверждению, что ее собственные значения содержатся в некоторой области гершгоринского типа. В частности, из условий невырожденности таким образом можно получить и верхнюю оценку перроновского корня неотрицательной матрицы (но не его нижнюю оценку).

В данной работе мы используем другой подход к рассмотрению этих связанных задач, предложенный и пропагандируемый в работе [10] и использованный затем в работе [2]. А именно, сперва мы единообразно выводим новые верхние и нижние оценки для перроновского корня неотрицательной матрицы, а затем применяем верхние оценки к неотрицательной матрице $C = |D_A|^{-1}|B|$ и, требуя выполнения неравенства $\rho(C) < 1$, мы получаем условия, гарантирующие невырожденность матрицы $A = D_A - B$. Более того (см. лемму 1.1 ниже), таким образом мы гарантируем, что матрица $A$ является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей. (После этого можно было бы также стандартным способом получить и описание областей, содержащих все собственные значения произвольной матрицы, но это не является целью настоящей работы.)

С этой позиции основные результаты работы – это новые общие верхние и нижние оценки для перроновского корня неотрицательной матрицы, а получение соответствующих критериев принадлежности к классу невырожденных $\mathcal{H}$-матриц является уже чисто технической задачей.

Уточним, что под перроновским корнем (необязательно неприводимой) неотрицательной матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, мы понимаем

*Ключевые слова*: неотрицательные матрицы, оценки для перроновского корня, критерии невырожденности, невырожденные $\mathcal{H}$-матрицы, DZT матрицы, $S$-SOB матрицы, структура разреженности.

ее спектральный радиус,

$$\rho(A) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i(A)|,$$

который является неотрицательным собственным значением $A$.

В работе используются следующие обозначения.

• $\langle n \rangle = \{1, \dots, n\}$, где $n \geqslant 1$ – целое число.

• Если $S \subseteq \langle n \rangle$, то $\bar{S} = \langle n \rangle \setminus S$ – дополнение подмножества $S$ в $\langle n \rangle$, а $|S|$ – мощность $S$.

• Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$. Тогда

$$R_i(A) = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad r_i(A) = R_i(A) - |a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$r(A) = \min_{i \in \langle n \rangle} R_i(A), \quad R(A) = \max_{i \in \langle n \rangle} R_i(A);$$

$$R_i^j(A) = R_i(A) - |a_{ij}|, \quad r_i^j(A) = r_i(A) - |a_{ij}|, \quad \text{где} \quad j \neq i, \quad i = 1, \dots, n,$$

и для заданного непустого подмножества $S \subset \langle n \rangle$ мы полагаем

$$R_i^S(A) = \sum_{j \in S} |a_{ij}|, \quad r_i^S(A) = \begin{cases} R_i^S(A) - |a_{ii}|, & i \in S, \\ R_i^S(A), & i \notin S, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

Наконец, через $D_A = \operatorname{diag}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$ мы будем обозначать диагональную часть матрицы $A$.

Статья построена следующим образом.

§2 посвящен верхним и нижним оценкам для перроновского корня неотрицательной матрицы. Сперва в разделе 2.1 выводятся общие оценки, учитывающие структуру разреженности матрицы и использующие непустые собственные подмножества $S$ множества индексов $\langle n \rangle$. Затем в разделе 2.2 мы специфицируем общие оценки и получаем более простые верхние и нижние оценки, которые связаны с такими критериями невырожденности матриц, как (разреженные) условия Островского–Брауэра ((sparse) Ostrowski–Brauer, (S)OB) и условия типа Дашница–Зусмановича (Dashnic–Zusmanovich type, DZT).

В §3 из соответствующих верхних оценок для перроновского корня, полученных в §2, выводятся некоторые условия, достаточные для принадлежности соответствующей матрицы к классу невырожденных $\mathcal{H}$-матриц. В частности, таким образом получено новое описание так называемых $S$-SOB матриц (см. [4]), а также альтернативные доказательства того, что $S$-SOB, SOB и DZT матрицы образуют подклассы класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц.

В заключение этого вводного параграфа мы приведем несколько хорошо известных результатов, которые потребуются нам в дальнейшем.

**Лемма 1.1.** *Пусть $A = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. Тогда $A \in \mathcal{H}$ в том и только том случае, когда $\rho(|D_A|^{-1}|B|) < 1$.*

**Доказательство.** По определению, $A \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}(A) = |D_A| - |B|$ – невырожденная $\mathcal{M}$-матрица. Но, как хорошо известно (см., например, [5, Chapter 6, Theorem 2.3]), $Z$-матрица $\mathcal{M}(A)$ является невырожденной $\mathcal{M}$-матрицей тогда и только тогда, когда $\rho(|D_A|^{-1}|B|) < 1$. $\square$

**Лемма 1.2** ([8]). *Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, – неотрицательная матрица. Тогда*

(i)

$$r(A) \leqslant \rho(A) \leqslant R(A). \tag{1.1}$$

*Кроме того, если матрица $A$ неприводима, то каждое из неравенств в* (1.1) *является равенством в том и только том случае, когда*

$$r(A) = R(A).$$

(ii)

$$\rho(A) \geqslant \max_i \{a_{ii}\}, \tag{1.2}$$

*и если матрица $A$ неприводима, то неравенство* (1.2) *выполняется строго.*

**Лемма 1.3** (см., например, [5, Chapter 2, Theorem 1.11]). *Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$, – неотрицательная матрица. Справедливы следующие утверждения:*

(i) *Если для некоторого неотрицательного вектора $x \neq 0$ имеет место неравенство*

$$Ax \geqslant \alpha x, \quad \alpha \geqslant 0, \tag{1.3}$$

*то*

$$\rho(A) \geqslant \alpha. \tag{1.4}$$

(ii) *Если для некоторого положительного вектора $x$ имеет место неравенство*

$$Ax \leqslant \beta x, \quad \beta \geqslant 0, \tag{1.5}$$

*то*

$$\rho(A) \leqslant \beta. \tag{1.6}$$

*Кроме того, если матрица $A$ неприводима и неравенство* (1.3) (*неравенство* (1.5)) *выполняется для некоторого неотрицательного вектора $x \neq 0$, то соотношение* (1.4) *(соотношение* (1.6)*) является равенством тогда и только тогда, когда соотношение* (1.3) *(соотношение* (1.5)*) есть равенство.*

## §2. Двусторонние оценки для перроновского корня неотрицательной матрицы

В этом параграфе мы выводим общие двусторонние оценки для перроновского корня неотрицательной матрицы, а также рассматриваем некоторые их частные случаи.

**2.1. Основные результаты.** Поскольку тот случай, когда $r(A) = R(A)$, т.е., все строчные суммы матрицы $A$ равны, является тривиальным, в дальнейшем мы будем рассматривать матрицы, для которых $r(A) < R(A)$. Основным общим результатом является следующая теорема.

**Теорема 2.1.** *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – неотрицательная матрица и пусть*

$$r(A) = \min_{i\in\langle n\rangle} R_i(A) < R(A) = \max_{i\in\langle n\rangle} R_i(A).$$

*Тогда*

$$\rho(A) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \min \left\{ R_i(A),\ \min_{\substack{S:\, i\notin S,\\ r_i^S(A)\neq 0}} \ \max_{\substack{j\in S:\\ a_{ij}\neq 0}} \rho(A(i,S,j)) \right\} \tag{2.1.a}$$

*и, если матрица $A$ неприводима, то*

$$\rho(A) \geqslant \min_{\substack{i\in\langle n\rangle:\\ R_i(A)<R(A)}} \max \left\{ R_i(A),\ \max_{\substack{S:\, i\notin S,\\ r_i^S(A)\neq 0}} \ \min_{\substack{j\in S:\\ a_{ij}\neq 0}} \rho(A(i,S,j)) \right\}. \tag{2.1.b}$$

*Здесь $S$ пробегает все непустые собственные подмножества множества $\langle n\rangle$, удовлетворяющие указанным условиям, и для произвольных $i \in \langle n\rangle$, $S \subset \langle n\rangle$ и $j \in S$*

$$\rho(A(i,S,j)) = \frac{1}{2}\left[a_{jj} + R_i^{\bar S}(A) + \sqrt{[a_{jj} - R_i^{\bar S}(A)]^2 + 4r_j(A)\, r_i^S(A)}\right] \tag{2.2}$$

*есть перроновский корень $2\times 2$ неотрицательной матрицы*

$$A(i,S,j) = \begin{bmatrix} R_i^{\bar S}(A) & r_i^S(A) \\ r_j(A) & a_{jj} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

**Доказательство.** Пусть

$$Ax = \rho(A)x, \tag{2.4}$$

где $x = (x_k)$ – перроновский вектор $A$. Предположим, что матрица $A$ неприводима, так что вектор $x$ положителен. Выберем индекс $i \in \langle n\rangle$ таким образом, что

$$x_i = \min_{k\in\langle n\rangle} x_k. \tag{2.5}$$

Заметим, что из (2.4) и (2.5) следует, что $\rho(A) \geqslant R_i(A)$. Поскольку, в силу леммы 1.2, для неприводимой матрицы $A$ справедливо неравенство $\rho(A) < R(A)$, мы заключаем, что

$$R_i(A) \leqslant \rho(A) < R(A). \tag{2.6}$$

Пусть теперь $S$ – произвольное непустое подмножество множества индексов $\langle n\rangle$, не содержащее $i$ и такое, что $r_i^S(A) \neq 0$. Заметим, что по крайней мере одно такое подмножество, а именно $S = \langle n\rangle \setminus \{i\}$, необходимо существует, поскольку матрица $A$ неприводима. Теперь выберем $j \in S$ таким образом, что

$$a_{ij} \neq 0 \quad \text{и} \quad x_j = \min_{k\in S:\ a_{ik}\neq 0} x_k.$$

Тогда будем иметь

$$\rho(A)x_i = \sum_{k\in\bar S} a_{ik}x_k + \sum_{k\in S:\ a_{ik}\neq 0} a_{ik}x_k \geqslant R_i^{\bar S}(A)x_i + r_i^S(A)x_j,$$

и

$$\rho(A)x_j = a_{jj}x_j + \sum_{k\neq j} a_{jk}x_k \geqslant a_{jj}x_j + r_j(A)x_i,$$

откуда следует, что

$$\rho(A)\begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} \geqslant A(i,S,j)\begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Заметим, что поскольку $A$ неприводима и $r_i^S(A) \neq 0$, то матрица $A(i,S,j)$ также неприводима. В силу леммы 1.3, из (2.7) вытекает, что

$$\rho(A) \geqslant \rho(A(i,S,j)),$$

и, ввиду (2.6), мы имеем

$$\rho(A) \geqslant \max\{R_i(A), \rho(A(i,S,j))\}.$$

Таким образом, для $i$, удовлетворяющего условию (2.5), справедливо неравенство

$$\rho(A) \geqslant \max\left\{R_i(A),\ \max_{\substack{S:\ i\notin S,\\ r_i^S(A)\neq 0}}\ \min_{\substack{j\in S:\\ a_{ij}\neq 0}} \rho(A(i,S,j))\right\},$$

откуда и следует нижняя оценка (2.1.b).

Выведем теперь верхнюю оценку (2.1.a) для произвольной неотрицательной матрицы $A$. В этом случае вектор $x$ в (2.4) является неотрицательным и ненулевым. Выберем $i \in \langle n\rangle$ из условия

$$x_i = \max_{k\in\langle n\rangle} x_k. \tag{2.8}$$

Заметим, что из (2.4), (2.8) и леммы 1.2 следует, что

$$r(A) \leqslant \rho(A) \leqslant R_i(A). \tag{2.9}$$

Как и выше, пусть $S$ – произвольное непустое подмножество множества $\langle n\rangle$, не содержащее $i$ и такое, что $r_i^S(A) \neq 0$. Теперь определим $j \in S$ из условий

$$a_{ij} \neq 0 \quad \text{и} \quad x_j = \max_{k\in S:\ a_{ik}\neq 0} x_k.$$

В этом случае мы имеем

$$\rho(A)x_i = \sum_{k\in\bar S} a_{ik}x_k + \sum_{k\in S} a_{ik}x_k \leqslant R_i^{\bar S}(A)x_i + r_i^S(A)x_j$$

и

$$\rho(A)x_j = a_{jj}x_j + \sum_{k\neq j} a_{jk}x_k \leqslant a_{jj}x_j + r_j(A)x_i.$$

Таким образом,

$$\rho(A)\begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} \leqslant A(i,S,j)\begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix}, \tag{2.10}$$

и, в силу леммы 1.3, выполняется неравенство

$$\rho(A) \leqslant \rho(A(i,S,j)).$$

Из полученного неравенства и (2.9) мы заключаем, что

$$\rho(A) \leqslant \min\{R_i(A),\ \rho(A(i,S,j))\},$$

откуда и следует желаемая верхняя оценка. □

Пусть $A$ – неотрицательная матрица. Применяя оценки Фробениуса к матрицам $A(i,S,j)$, участвующим в (2.1), для любого $S$, не содержащего $i$, мы получаем

$$\min\{R_i(A), R_j(A)\} \leqslant \rho(A(i,S,j)) \leqslant \max\{R_i(A), R_j(A)\}, \tag{2.11}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} &\min\left\{R_i(A),\ \min_{\substack{S:\ i\notin S,\\ r_i^S(A)\neq 0}} \max_{\substack{j\in S:\\ a_{ij}\neq 0}} \rho(A(i,S,j))\right\} \\ &\leqslant \min_{\substack{S:\ i\notin S,\\ r_i^S(A)\neq 0}} \max_{\substack{j\in S:\\ a_{ij}\neq 0}} \rho(A(i,S,j)) \\ &\leqslant \min_{\substack{S:\ i\notin S,\\ r_i^S(A)\neq 0}} \max_{\substack{j\in S:\\ a_{ij}\neq 0}} \max\{R_i(A), R_j(A)\} \leqslant R(A) \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned} &\max\left\{R_i(A),\ \max_{\substack{S:\ i\notin S,\\ r_i^S(A)\neq 0}} \min_{\substack{j\in S:\\ a_{ij}\neq 0}} \rho(A(i,S,j))\right\} \\ &\geqslant \max_{\substack{S:\ i\notin S,\\ r_i^S(A)\neq 0}} \min_{\substack{j\in S:\\ a_{ij}\neq 0}} \rho(A(i,S,j)) \\ &\geqslant \max_{\substack{S:\ i\notin S,\\ r_i^S(A)\neq 0}} \min_{\substack{j\in S:\\ a_{ij}\neq 0}} \min\{R_i(A), R_j(A)\} \geqslant r(A). \end{aligned}$$

Таким образом, нами установлен следующий результат.

**Предложение 2.1.** *В условиях теоремы* 2.1, *оценки* (2.1), *вообще говоря, улучшают оценки Фробениуса*

$$r(A) \leqslant \rho(A) \leqslant R(A).$$

Кроме того, используя неравенства (2.11), оценки (2.1) можно записать в следующем эквивалентном виде, где внутренние минимум и максимум берутся по меньшим множествам.

**Следствие 2.1.** *В условиях теоремы* 2.1 *перроновский корень* $\rho(A)$ *удовлетворяет верхней оценке*

$$\rho(A) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \min \left\{ R_i(A),\ \min_{\substack{S:\, i\notin S,\\ r_i^S(A)\neq 0}} \ \max_{\substack{j\in S:\, a_{ij}\neq 0,\\ R_j(A)<R_i(A)}} \rho(A(i,S,j)) \right\}, \qquad (2.12.a)$$

*а если матрица неприводима, то также и нижней оценке*

$$\rho(A) \geqslant \min_{\substack{i\in\langle n\rangle:\\ R_i(A)<R(A)}} \max \left\{ R_i(A),\ \max_{\substack{S:\, i\notin S,\\ r_i^S(A)\neq 0}} \ \min_{\substack{j\in S:\, a_{ij}\neq 0,\\ R_j(A)>R_i(A)}} \rho(A(i,S,j)) \right\}. \qquad (2.12.b)$$

Для неприводимой матрицы $A$ имеет место также и следующий вариант предложения 2.1.

**Предложение 2.2.** *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *– неприводимая неотрицательная матрица, для которой* $r(A) < R(A)$. *Тогда оценки* (2.12) *являются, вообще говоря, более точными, чем оценки Фробениуса*

$$r(A) < \rho(A) < R(A).$$

**Доказательство.** Действительно, если $A$ неприводима, $r_i^S(A) \neq 0$ и $R_j(A) < R_i(A)$, то $A(i,S,j)$ также неприводима, и мы имеем

$$\rho(A(i,S,j)) < \max\{R_i(A), R_j(A)\} = R_i(A) \leqslant R(A).$$

Аналогично, если $R_j(A) > R_i(A)$, то

$$\rho(A(i,S,j)) > \min\{R_i(A), R_j(A)\} = R_i(A) \geqslant r(A).$$

□

Ясно, что из теоремы 2.1 также немедленно вытекает следующий результат.

**Следствие 2.2.** *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *– неотрицательная матрица. Тогда*

$$\rho(A) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \ \min_{\substack{S:\, i\notin S,\\ r_i^S(A)\neq 0}} \ \max_{\substack{j\in S:\\ a_{ij}\neq 0}} \rho(A(i,S,j)), \qquad (2.13.a)$$

*а если матрица $A$ неприводима, то также и*

$$\rho(A) \geqslant \min_{\substack{i\in\langle n\rangle:\\ R_i(A)<R(A)}} \max_{\substack{S:\, i\notin S,\\ r_i^S(A)\neq 0}} \min_{\substack{j\in S:\\ a_{ij}\neq 0}} \rho(A(i,S,j)), \tag{2.13.b}$$

*где $\rho(A(i,S,j))$ определяется по формуле* (2.2) *для всех $j \in S$.*

Теперь из теоремы 2.1 мы выведем оценки, не учитывающие структуру разреженности матрицы и условия на $i$.

**Следствие 2.3.** *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – неотрицательная матрица. Тогда имеет место верхняя оценка*

$$\rho(A) \leqslant \max_{i\in\langle n\rangle} \min_{S\neq\varnothing:\, i\notin S} \max_{j\in S} \rho(A(i,S,j)), \tag{2.14.a}$$

*а в неприводимом случае – также и нижняя оценка*

$$\rho(A) \geqslant \min_{i\in\langle n\rangle} \max_{S\neq\varnothing:\, i\notin S} \min_{j\in S} \rho(A(i,S,j)). \tag{2.14.b}$$

**Доказательство.** Для доказательства верхней оценки заметим, что для любого множества $S$, не содержащего $i$ и такого, что $r_i^S(A) = 0$, и для всех $j \in S$ мы имеем

$$\rho(A(i,S,j)) = \max\{a_{jj},\ R_i(A)\},$$

тогда как, в силу (2.9) и оценки Фробениуса (1.2), имеют место неравенства

$$a_{jj} \leqslant \rho(A) \leqslant R_i(A).$$

Следовательно,

$$\rho(A(i,S,j)) = \max\{a_{jj},\ R_i(A)\} = R_i(A).$$

Отсюда следует, что

$$R_i(A) = \min_{\substack{S:\, i\notin S,\\ r_i^S(A)=0}} \max_{j\in S} \rho(A(i,S,j)),$$

так что

$$\begin{aligned}
&\min\left\{R_i(A),\ \min_{\substack{S:\, i\notin S,\\ r_i^S(A)\neq 0}} \max_{\substack{j\in S:\\ a_{ij}\neq 0}} \rho(A(i,S,j))\right\}\\
&\leqslant \min\left\{\min_{\substack{S:\, i\notin S,\\ r_i^S(A)=0}} \max_{j\in S} \rho(A(i,S,j)),\ \min_{\substack{S:\, i\notin S,\\ r_i^S(A)\neq 0}} \max_{j\in S} \rho(A(i,S,j))\right\}\\
&= \min_{S:\, i\notin S} \max_{j\in S} \rho(A(i,S,j)),
\end{aligned}$$

и верхняя оценка (2.14.a) вытекает из (2.1.a).

Установим теперь нижнюю оценку (2.14.b). Для этого заметим, что если $i$ выбрано в соответствии с (2.5), то справедливы неравенства (2.6), и для произвольного $S$, для которого $i \notin S$ и $r_i^S(A) = 0$, и для всех $j \in S$ мы имеем

$$\rho(A) \geqslant \max\{a_{jj},\ R_i(A)\} = \rho(A(i,S,j)),$$

откуда следует, что

$$\rho(A) \geqslant \max_{\substack{S:\ i\notin S,\\ r_i^S(A)=0}} \min_{j\in S} \rho(A(i,S,j)).$$

Теперь из нижней оценки (2.1.b) вытекает, что

$$\begin{aligned}\rho(A) &\geqslant \min_{i\in\langle n\rangle} \max\left\{ \max_{\substack{S:\ i\notin S,\\ r_i^S(A)=0}} \min_{j\in S} \rho(A(i,S,j)),\ \max_{\substack{S:\ i\notin S,\\ r_i^S(A)\neq 0}} \min_{\substack{j\in S\\ a_{ij}\neq 0}} \rho(A(i,S,j)) \right\}\\ &\geqslant \min_{i\in\langle n\rangle} \max_{S:\ i\notin S} \min_{j\in S} \rho(A(i,S,j)).\end{aligned}$$

□

**2.2. Частные случаи.** В этом разделе мы рассмотрим некоторые результаты, вытекающие из следствий 2.1 – 2.3, если брать в них минимум и максимум лишь по некоторым специально выбранным подмножествам $S$.

Пусть сперва $S^i := \langle n\rangle \setminus \{i\}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $r_i^{S^i}(A) = r_i(A)$ ($\neq 0$, если $A$ неприводима), $R_i^{\overline{S^i}}(A) = a_{ii}$ и, в силу (2.3) и (2.2), для всех $j \in S$ мы имеем

$$A(i,S^i,j) = \begin{bmatrix} a_{ii} & r_i(A)\\ r_j(A) & a_{jj}\end{bmatrix}$$

и

$$\rho(A(i,S^i,j)) = \frac{1}{2}\left[a_{jj} + a_{ii} + \sqrt{(a_{jj} - a_{ii})^2 + 4r_j(A)\, r_i(A)}\right]. \qquad (2.15)$$

Применяя следствия 2.1, 2.2 и 2.3, где $S = S^i$, $i = 1, \ldots, n$, и используя (2.15), мы приходим к следующим результатам.

**Следствие 2.4.** *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *– неотрицательная матрица. Тогда*

$$\rho(A)\leqslant\frac{1}{2}\max_{i\in\langle n\rangle}\min\left\{R_i(A),\max_{\substack{j\neq i:a_{ij}\neq0,\\R_j(A)<R_i(A)}}\left\{a_{jj}+a_{ii}+\sqrt{(a_{jj}-a_{ii})^2+4r_j(A)\,r_i(A)}\right\}\right\}, \tag{2.16.a}$$

$$\rho(A) \leqslant \frac{1}{2}\max_{i\neq j:\ a_{ij}\neq 0}\left[a_{jj}+a_{ii}+\sqrt{(a_{jj}-a_{ii})^2+4r_j(A)\,r_i(A)}\right] \tag{2.17.a}$$

*и*

$$\rho(A) \leqslant \frac{1}{2}\max_{i\neq j}\left[a_{jj}+a_{ii}+\sqrt{(a_{jj}-a_{ii})^2+4r_j(A)\,r_i(A)}\right]. \tag{2.18.a}$$

*Если же матрица* $A$ *неприводима, то аналогично имеем*

$$\rho(A)\geqslant\frac{1}{2}\min_{\substack{i\in\langle n\rangle:\\r_i(A)<R(A)}}\max\left\{R_i(A),\min_{\substack{j\neq i:a_{ij}\neq0,\\R_j(A)>R_i(A)}}\left\{a_{jj}+a_{ii}+\sqrt{(a_{jj}-a_{ii})^2+4r_j(A)r_i(A)}\right\}\right\}, \tag{2.16.b}$$

$$\rho(A) \geqslant \frac{1}{2}\min_{i\neq j:\ a_{ij}\neq 0}\left[a_{jj}+a_{ii}+\sqrt{(a_{jj}-a_{ii})^2+4r_j(A)\,r_i(A)}\right] \tag{2.17.b}$$

*и*

$$\rho(A) \geqslant \frac{1}{2}\min_{i\neq j}\left[a_{jj}+a_{ii}+\sqrt{(a_{jj}-a_{ii})^2+4r_j(A)\,r_i(A)}\right]. \tag{2.18.b}$$

Заметим, что оценки (2.17) были впервые получены в [1] как частный случай более общих оценок и, очевидно, улучшают оценки (2.18), установленные Брауэром и Джентри в работе [7]. Как несложно понять, верхняя оценка (2.18.a) вытекает из условий невырожденности Островского–Брауэра [6, 11] (которые также иногда называют условиями двойного строгого диагонального преобладания (Double Strict Diagonal Dominance, DSDD), см., например, [13]):

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| > r_i(A)\,r_j(A) \quad \text{для всех} \quad i\neq j. \tag{2.19}$$

Условия невырожденности, аналогичные (2.19), но учитывающие структуру разреженности матрицы, а именно

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| > r_i(A)\,r_j(A) \quad \text{для всех} \quad i\neq j \quad \text{таких, что} \quad a_{ij}\neq 0, \tag{2.20}$$

были установлены в работе [9] и соответствуют оценке (2.17.a).

Действительно, из того факта, что матрица $\rho(A)I_n - A$ является вырожденной, и условий невырожденности (2.20) следует, что неравенство

$$[\rho(A) - a_{ii}]\,[\rho(A) - a_{jj}] \leqslant r_i(A)\, r_j(A)$$

должно выполняться при некоторых $i \neq j$, таких что $a_{ij} \neq 0$, откуда и вытекает верхняя оценка (2.17.a).

С другой стороны, можно показать, что условия невырожденности (2.20) легко получаются из верхней оценки (2.17.a). Действительно, пусть $A = D_A - B$ и пусть $C = |D_A|^{-1}|B|$. По лемме 1.1, $A$ является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей тогда и только тогда, когда $\rho(C) < 1$. Но, ввиду (2.17.a) и соотношений

$$c_{ii} = 0, \quad r_i(C) = \frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

неравенство $\rho(C) < 1$ выполнено, если справедливы условия (2.20).

Рассмотрим теперь результаты, вытекающие из следствий 2.1 и 2.3, если в них брать максимум и минимум по множествам $S_j = \{j\}$, где $j \neq i$. Заметим, что

$$r_i^{S_j}(A) = a_{ij}, \quad R_i^{\overline{S_j}}(A) = R_i^j(A), \quad A(i, S_j, j) = \begin{bmatrix} R_i^j(A) & a_{ij} \\ r_j(A) & a_{jj} \end{bmatrix}$$

и

$$\rho(A(i, S_j, j)) = \frac{1}{2}\left[a_{jj} + R_i^j(A) + \sqrt{[a_{jj} - R_i^j(A)]^2 + 4a_{ij}r_j(A)}\right]. \quad (2.21)$$

Ясно, что

$$\max_{\substack{S:\, i \notin S,\\ r_i^S(A) \neq 0}} \; \min_{\substack{j \in S:\\ a_{ij} \neq 0}} \rho(A(i, S, j)) \geqslant \max_{\substack{j \neq i:\\ a_{ij} \neq 0}} \rho(A(i, S_j, j))$$

и

$$\min_{\substack{S:\, i \notin S,\\ r_i^S(A) \neq 0}} \; \max_{\substack{j \in S:\\ a_{ij} \neq 0}} \rho(A(i, S, j)) \leqslant \min_{\substack{j \neq i:\\ a_{ij} \neq 0}} \rho(A(i, S_j, j)).$$

Таким образом, из следствий 2.1 и 2.3 вытекают следующие двусторонние оценки.

**Следствие 2.5.** *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *– неотрицательная матрица. Тогда*

$$\rho(A)\leqslant\frac{1}{2}\max_{i\in\langle n\rangle}\min\left\{R_i(A),\ \min_{\substack{j\neq i:\\ a_{ij}\neq 0}}\left\{a_{jj}+R_i^j(A)+\sqrt{[a_{jj}-R_i^j(A)]^2+4a_{ij}r_j(A)}\right\}\right\} \tag{2.22.a}$$

*и*

$$\rho(A) \leqslant \frac{1}{2}\max_{i\in\langle n\rangle}\min_{j\neq i}\left\{a_{jj} + R_i^j(A) + \sqrt{[a_{jj} - R_i^j(A)]^2 + 4a_{ij}r_j(A)}\right\}. \tag{2.23.a}$$

*Кроме того, если матрица* $A$ *неприводима, то*

$$\rho(A)\geqslant\frac{1}{2}\min_{\substack{i\in\langle n\rangle:\\ R_i(A)<R(A)}}\max\left\{R_i(A),\max_{\substack{j\neq i:\\ a_{ij}\neq 0}}\left\{a_{jj}+R_i^j(A)+\sqrt{[a_{jj}-R_i^j(A)]^2+4a_{ij}r_j(A)}\right\}\right\} \tag{2.22.b}$$

*и*

$$\rho(A) \geqslant \frac{1}{2}\min_{i\in\langle n\rangle}\max_{j\neq i}\left\{a_{jj} + R_i^j(A) + \sqrt{[a_{jj} - R_i^j(A)]^2 + 4a_{ij}r_j(A)}\right\}. \tag{2.23.b}$$

Напомним, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является матрицей типа Дашница–Зусмановича (Dashnic–Zusmanovich type, DZT), см. [13] и [3], если

$$\forall i \in \langle n\rangle \quad \exists j \neq i: \quad [|a_{ii}| - r_i^j(A)]|a_{jj}| > |a_{ij}|r_j(A). \tag{2.24}$$

Как известно, всякая DZT матрица является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей, и можно говорить о DZT условиях невырожденности.

Как несложно понять, оценки (2.23) соответствуют DZT условиям невырожденности (2.24).

Действительно, поскольку матрица $\rho(A)I_n - A$ является вырожденной, из условий невырожденности (2.24) следует, что

$$\begin{aligned}\exists i \in \langle n\rangle: \ \forall j \neq i \quad & [\rho(A) - a_{ii} - r_i^j(A)]\,[\rho(A) - a_{jj}] \\ &= [\rho(A) - R_i^j(A)]\,[\rho(A) - a_{jj}] \leqslant a_{ij}r_j(A),\end{aligned}$$

что означает, что для некоторого $i \in \langle n\rangle$ и для всех $j \neq i$ справедливо неравенство

$$\rho(A) \leqslant \rho(A(i, S_j, j)),$$

где $\rho(A(i, S_j, j))$ определено в (2.21), и мы приходим к верхней оценке (2.23.a).

С другой стороны, применяя верхнюю оценку (2.23.a) к неотрицательной матрице $C = |D_A|^{-1}|B|$ с нулевыми диагональными элементами, где $A = D_A - B$, и принимая во внимание соотношения

$$c_{jj} = 0, \quad R_i^j(C) = r_i^j(A)/|a_{ii}|, \quad c_{ij} = |a_{ij}|/|a_{ii}| \quad r_j(C) = r_j(A)/|a_{jj}|,$$

мы заключаем, что $A$ является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей, если только для любого $i \in \langle n \rangle$ найдется $j \neq i$ такое, что

$$r_i^j(A)/|a_{ii}| + \sqrt{r_i^j(A)^2/|a_{ii}|^2 + 4|a_{ij}|/|a_{ii}|\; R_i^j(A)/|a_{jj}|} < 2,$$

или, что равносильно,

$$[|a_{ii}| - r_i^j(A)]|a_{jj}| > |a_{ij}|r_j(A).$$

Итак, из верхней оценки (2.23.a) следует, что любая матрица типа Дашница–Зусмановича является невырожденной $\mathcal{H}$-матрицей.

## §3. Критерии невырожденности

В этом параграфе из верхних оценок для перроновского корня неотрицательной матрицы, полученных в §2, мы выводим критерии невырожденности матриц, обеспечивающие их принадлежность к классу невырожденных $\mathcal{H}$-матриц. С этой целью мы применяем верхние оценки к неотрицательной матрице $C = (c_{ij}) := |D_A|^{-1}|B|$, где $A = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – заданная матрица. Заметим, что $c_{ii} = 0$, $i = 1, \dots, n$, и для любого $i \in \langle n \rangle$ и любого непустого подмножества $S \subset \langle n \rangle$, такого что $i \notin S$, выполнены соотношения

$$\begin{aligned} &R_i^{\bar S}(C) = r_i^{\bar S}(A)/|a_{ii}|, \quad r_i^S(C) = r_i^S(A)/|a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n;\\ &r_j(C) = r_j(A)/|a_{jj}|, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу (2.2), мы имеем

$$\rho(C(i, S, j)) = \frac{1}{2}\left[\frac{r_i^{\bar S}(A)}{|a_{ii}|} + \sqrt{\left[\frac{r_i^{\bar S}(A)}{|a_{ii}|}\right]^2 + 4\frac{r_j(A)}{|a_{jj}|}\,\frac{r_i^S(A)}{|a_{ii}|}}\,\right],$$

и неравенство $\rho(C(i, S, j)) < 1$ сводится к неравенству

$$\left[|a_{ii}| - r_i^{\bar S}(A)\right]|a_{jj}| > r_i^S(A)\, r_j(A). \tag{3.1}$$

Таким образом, мы доказали следующую лемму.

**Лемма 3.1.** *Пусть* $A = (a_{ij}) = D_A - B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *и пусть* $C = |D_A|^{-1}|B|$. *Тогда для любого* $i \in \langle n\rangle$, *любого подмножества* $S \subset \langle n\rangle$, *не содержащего* $i$, *и для всех* $j \neq i$ *неравенство* $\rho(C(i,S,j)) < 1$ *выполнено тогда и только тогда, когда выполнено неравенство* (3.1).

Теперь из теоремы 2.1 и леммы 3.1 следует, что если для некоторого непустого подмножества $S{=}S(i){\subset}\langle n\rangle$ такого, что $i{\notin}S$ и $r_i^S(A){\neq}0$, неравенство (3.1) выполняется при всех $j \in S$ таких, что $a_{ij} \neq 0$, то $\rho(C) < 1$, и, применяя лемму 1.1, мы приходим к следующему критерию невырожденности.

**Теорема 3.1.** *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *и предположим, что для всех* $i = 1, \ldots, n$ *выполнено по крайней мере одно из следующих условий:*

(i) $|a_{ii}| > r_i(A)$;

(ii) *неравенство* (3.1) *справедливо хотя бы для одного непустого подмножества* $S = S(i) \subset \langle n\rangle$ *такого, что* $i \notin S$ *и* $r_i^S(A) \neq 0$, *а также для всех* $j \in S$ *таких, что* $a_{ij} \neq 0$.

*Тогда* $A$ *– невырожденная* $\mathcal{H}$*-матрица.*

**Замечание 3.1.** Если воспользоваться леммой 3.1 и следствием 2.1, то в теореме 3.1 можно ограничиться лишь теми $j \in S$, для которых $a_{ij} \neq 0$ и выполнено дополнительное условие

$$\frac{r_j(A)}{|a_{jj}|} < \frac{r_i(A)}{|a_{ii}|}.$$

Тем самым число неравенств (3.1), которые нужно проверять, может быть уменьшено.

Критерий невырожденности, не принимающий в расчет разреженность матрицы, аналогичным образом получается из следствия 3.2.

**Теорема 3.2.** *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. *Если для каждого* $i = 1, \ldots, n$ *выполнено по крайней мере одно из двух условий*

(i) $|a_{ii}| > r_i(A)$;

(ii) *неравенство* (3.1) *справедливо для некоторого непустого подмножества* $S = S(i) \subset \langle n\rangle$ *такого, что* $i \notin S$, *и для всех* $j \in S$,

*то* $A$ *– невырожденная* $\mathcal{H}$*-матрица.*

Теперь мы покажем, что теорема 3.1 обобщает одновременно несколько известных результатов. С этой целью мы рассмотрим три частных случая теоремы 3.1, соответствующих специальному выбору множеств $S(i)$ в условии (ii).

Пусть сперва $S \subset \langle n \rangle$ – некоторое непустое собственное подмножество множества индексов. Для $i = 1, \dots, n$ определим множества $S(i)$ следующим образом:

$$S(i) := \begin{cases} S, & \text{если} \quad i \in \bar{S}, \\ \bar{S}, & \text{если} \quad i \in S. \end{cases} \quad . \tag{3.2}$$

Тогда неравенство (3.1) принимает вид

$$\left[|a_{ii}| - r_i^S(A)\right] |a_{jj}| > r_i^{\bar{S}}(A)\, r_j(A), \quad \text{если} \quad i \in S, \tag{3.3}$$

и

$$\left[|a_{ii}| - r_i^{\bar{S}}(A)\right] |a_{jj}| > r_i^S(A)\, r_j(A), \quad \text{если} \quad i \in \bar{S}, \tag{3.4}$$

и мы приходим к такому следствия теоремы 3.1.

**Следствие 3.1.** *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть $S \subset \langle n \rangle$, $1 \leqslant |S| \leqslant n-1$. Предположим, что для всех $i = 1, \dots, n$*
*либо*

(i) $|a_{ii}| > r_i(A)$,

*либо выполнены следующие два условия:*

(ii.1) *если $i \in S$ и $r_i^{\bar{S}}(A) \neq 0$, то неравенство* (3.3) *справедливо для всех $j \in \bar{S}$ таких, что $a_{ij} \neq 0$;*

(ii.2) *если $i \in \bar{S}$ и $r_i^S(A) \neq 0$, то неравенство* (3.4) *справедливо для всех $j \in S$ таких, что $a_{ij} \neq 0$.*

*Тогда $A$ – невырожденная $\mathcal{H}$-матрица.*

Как несложно убедиться, условия (i), (ii) следствия 3.1 можно также записать и в следующем виде:

(i) $|a_{ii}| > r_i^S(A)$ для всех $i \in S$;

(ii) $|a_{ii}| > r_i^{\bar{S}}(A)$ для всех $i \in \bar{S}$;

(iii) для всех $i \in S$ и всех $j \in \bar{S}$ таких, что $a_{ij} \neq 0$, справедливо неравенство

$$[|a_{ii}| - r_i^S(A)]\, |a_{jj}| > r_i^{\bar{S}}(A)\, r_j(A);$$

(iv) для всех $i \in S$ и всех $j \in \bar{S}$ таких, что $a_{ji} \neq 0$, справедливо неравенство

$$[|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)]\, |a_{ii}| > r_j^S(A)\, r_i(A).$$

Напомним, что в работе [4] матрицы, удовлетворяющие условиям (i)–(iv), были названы $S$-SOB ($S$-Sparse Ostrowski–Brauer) матрицами, и было доказано, что они образуют подкласс класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц.

Таким образом, следствие 3.1 дает новое описание $S$-SOB матриц, а также гарантирует, что они являются невырожденными $\mathcal{H}$-матрицами.

В заключение этого параграфа мы выведем варианты двух известных критериев невырожденности.

Если в теореме 3.1 потребовать, чтобы для каждого $i \in \langle n \rangle$ условие (ii) выполнялось для соответствующего подмножества $S^i = \langle n \rangle \setminus \{i\}$, то мы придем к следующей разреженной версии критерия невырожденности Островского–Брауэра: (ср. следствие 2.2 в работе [9]).

**Следствие 3.2.** *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$. *Если для* $i = 1, \ldots, n$
*либо* $|a_{ii}| > r_i(A)$,
*либо неравенство*

$$|a_{ii}|\,|a_{jj}| > r_i(A)\,r_j(A) \tag{3.5}$$

*выполняется для всех* $j \neq i$ *таких, что* $a_{ij} \neq 0$, *то* $A$ *является невырожденной* $\mathcal{H}$*-матрицей.*

Пусть, наконец, в теореме 3.1 для каждого $i \in \langle n \rangle$ условие (ii) выполняется для некоторого множества $S(i) = S_j = \{j\}$, где $j \neq i$ и $a_{ij} \neq 0$. Тогда

$$r_i^{\bar{S}}(A) = r_i^j(A), \quad r_i^S(A) = |a_{ij}|,$$

так что неравенство (3.1) принимает вид

$$\Big[|a_{ii}| - r_i^j(A)\Big]\,|a_{jj}| > |a_{ij}| r_j(A) \tag{3.6}$$

и должно выполняться хотя бы для одного $j \neq i$ такого, что $a_{ij} \neq 0$.

Таким образом, из теоремы 3.1 также вытекает следующий результат.

**Следствие 3.3.** *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$. *Если для* $i = 1, \ldots, n$
*либо* $|a_{ii}| > r_i(A)$,
*либо неравенство* (3.6) *выполняется хотя бы для одного* $j \neq i$ *такого, что* $a_{ij} \neq 0$, *то* $A$ *является невырожденной* $\mathcal{H}$*-матрицей.*

Заметим, что условия следствия 3.3 можно рассматривать как разреженную версию характеризации DZT матриц, предложенной в работе [3].

## Список литературы

1. Л. Ю. Колотилина, *Оценки и неравенства для перроновского корня неотрицательной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 77–122.
2. Л. Ю. Колотилина, *Об улучшении оценок Чистякова для перроновского корня неотрицательной матрицы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 103–118.
3. Л. Ю. Колотилина, *О матрицах Дашница–Зусмановича (DZ) и матрицах типа Дашница–Зусмановича (DZT) и их обратных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 145–165.
4. Л. Ю. Колотилина, *Об одном подклассе класса невырожденных $\mathcal{H}$-матриц и соответствующих множествах локализации собственных и сингулярных значений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 166–178.
5. A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Academic Press, New York etc., 1979.
6. A. Brauer, *Limits for the characteristic roots of a matrix: II.* — Duke Math. J. **14** (1947), 21–26.
7. A. Brauer, I. C. Gentry, *Bounds for the greatest characteristic root of an irreducible nonnegative matrix.* — Linear Algebra Appl. **8** (1974), 105–107.
8. G. Frobenius, *Über Matrizen aus nichtnegativen Elementen.* — Sitzungsber. Kön. Preuss. Akad. Wiss. Berlin **18** (1912), 465–477.
9. L. Yu. Kolotilina, *Generalizations of the Ostrowski–Brauer theorem.* — Linear Algebra Appl. **364** (2003), 65–80.
10. L. Yu. Kolotilina, *Bounds for the Perron root, singularity/nonsingularity conditions, and eigenvalue inclusion sets.* — Numer. Algor. **42** (2006), 247–280.
11. A. M. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv. **10** (1937), 69–96.
12. R. S. Varga, *Geršgorin and His Circles*, Springer, 2004.
13. Jianxing Zhao, Qilong Liu, Chaoqian Li, Yaotang Li, *Dashnic–Zusmanovich type matrices: a new subclass of nonsingular H-matrices.* — Linear Algebra Appl. **552** (2018), 277–287.

Kolotilina L. Yu. New two-sided bounds for the Perron root and related nonsingularity criteria.

New general upper and lower bounds for the Perron root of a nonnegative matrix, which involve nonempty proper subsets of the index set and the matrix sparsity pattern, are suggested, and some special cases are considered. Also the nonsingularity criteria related to the upper bounds presented, which generalize some known results on subclasses of nonsingular $\mathcal{H}$-matrices, are derived.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
*E-mail*: lilikona@mail.ru

Поступило 21 сентября 2020 г.