Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 496, 2020 г.

Х. Д. Икрамов

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ КОКВАДРАТОВ СПЕЦИАЛЬНЫХ МАТРИЦ В ПРОСТРАНСТВАХ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

1. Коквадратом невырожденной комплексной $n \times n$-матрицы A называется матрица

$$\mathcal{C}_A = A^{-*}A. \tag{1}$$

Эта матрица в значительной мере или даже полностью определяет каноническую форму матрицы A относительно $*$-конгруэнций, т.е. преобразований вида

$$A \to P^*AP,$$

где P – произвольная невырожденная матрица.

Матрицы вида (1) имеют замечательное эквивалентное описание (см. [1, теорема 2.1.9]): невырожденная матрица B тогда и только тогда может быть представлена в виде $B = A^{-*}A$, когда B^{-1} подобна B^*. Отсюда следует, в частности, что вместе с каждым числом λ спектр матрицы B содержит число $\overline{\lambda}^{-1}$.

Коквадраты некоторых классов специальных матриц в унитарном пространстве допускают простое описание. Так, коквадрат любой (невырожденной) эрмитовой матрицы порядка n есть единичная матрица I_n. Если же Q – унитарная матрица, то

$$\mathcal{C}_Q = Q^{-*}Q = Q^2,$$

т.е. коквадрат $\mathcal{C}_Q$ сам является унитарной матрицей, и любая унитарная матрица может рассматриваться как коквадрат.

2. Предположим, что в комплексном линейном пространстве $\mathbf{C}^n$ четной размерности $n = 2m$ введена унитарно-симплектическая метрика

$$< x, y >= (Jx, y), \tag{2}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

Ключевые слова: конгруэнции, коквадрат, эрмитовы матрицы, унитарные матрицы, косогамильтоновы матрицы, симплектические матрицы.

а

$$(x,y) = x_1\overline{y}_1 + \cdots + x_n\overline{y}_n$$

– стандартное скалярное произведение векторов $x = (x_1 \ldots x_n)^\top$ и $y = (y_1 \ldots y_n)^\top$ в унитарном пространстве.

В полученном симплектическом пространстве аналогами унитарных и эрмитовых матриц обычного унитарного пространства являются соответственно симплектические и косогамильтоновы матрицы. Они описываются соотношениями

$$A^*JA = J \tag{4}$$

и

$$A^* = -JAJ. \tag{5}$$

Есть ли какие-либо особенности у коквадратов матриц из этих классов?

3. Учитывая, что $J^{-1} = -J$ и $J^2 = -I_n$, из (4) выводим

$$A^{-*} = -JAJ \tag{6}$$

и

$$A^{-*}A = -JAJA = -(JA)^2.$$

Матрицы $JA, (JA)^2$ и $-(JA)^2$ симплектические. Итак, доказан следующий результат.

Теорема 1. *Коквадрат симплектической матрицы есть снова симплектическая матрица.*

Обращая обе части в (6), имеем

$$A^* = -JA^{-1}J = J^{-1}A^{-1}J.$$

Принимая во внимание характеристику коквадратов, данную в разделе 1, приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Всякая симплектическая матрица является коквадратом.*

4. Обращая (5), находим

$$A^{-*} = -JA^{-1}J$$

и

$$A^{-*}A = -JA^{-1}JA.$$

Так как, согласно (5),

$$JA = A^* J,$$

то

$$A^{-*}A = -J(A^{-1}A^*)J = J^{-1}(A^{-1}A^*)J. \tag{7}$$

Полагая $\mathcal{C}_A = A^{-*}A$, замечаем, что

$$A^{-1}A^* = (A^{-*}A)^{-1} = \mathcal{C}_A^{-1}.$$

Теперь из (7) вытекает

Теорема 3. *Коквадрат $\mathcal{C}_A$ (невырожденной) косогамильтоновой матрицы A подобен своей обратной матрице $\mathcal{C}_A^{-1}$.*

Учитывая, что $\mathcal{C}_A^{-1}$ и $\mathcal{C}_A^*$ подобны, получаем

Следствие 1. *Для невырожденной косогамильтоновой матрицы A матрицы $\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_A^{-1}, \mathcal{C}_A^*$ и $\mathcal{C}_A^{-*}$ подобны. Если λ – собственное значение матрицы $\mathcal{C}_A$, то в ее спектр входят также числа $\overline{\lambda}, \lambda^{-1}$ и $\overline{\lambda}^{-1}$.*

Список литературы

1. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis. Second edition.* Cambridge, Cambridge University Press, 2013.

Ikramov Kh. D. Specific features of cosquares of special matrices in indefinite metric spaces.

As is known, the cosquare of an arbitrary nonsingular Hermitian matrix is the identity matrix, and the cosquare of an arbitrary unitary matrix is again unitary. In a complex linear space with the symplectic metric, symplectic and skew-Hamiltonian matrices are the counterparts of unitary and Hermitian matrices, respectively. Specific features of cosquares for these two matrix classes are indicated.

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 25 февраля 2020 г.