Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 496, 2020 г.

Х. Д. Икрамов

О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ $J_n(0)Y + Y^\top J_n(0) = 0$ ПРИ ЧЕТНОМ n

1. С некоторых пор уравнения вида

$$AY + Y^\top A = C,$$

которые мы называем *уравнениями типа Сильвестра*, привлекают к себе большое внимание как в теоретической, так и в вычислительной журнальной литературе по линейной алгебре. В однородном случае

$$AY + Y^\top A = 0, \tag{1}$$

обсуждаемом в этой заметке, такое внимание связано, например, с теорией конгруэнтных орбит в матричном пространстве $M_n(\mathbf{C})$ (см. [1]). Множество матриц вида

$$\{AZ + Z^\top A \,|\, Z \in M_n(\mathbf{C})\}$$

можно рассматривать как касательное пространство к конгруэнтной орбите матрицы A в самой точке A (а можно рассматривать и как образ линейного матричного оператора $Z \to AZ + Z^\top A$). Размерность подпространства решений уравнения (1), иначе говоря, дефект указанного матричного оператора интерпретируется в этом случае как коразмерность орбиты. Еще одно приложение уравнения вида (1) находят в теории палиндромных матричных пучков.

В отличие от уравнений $AY + YA = 0$ и даже более общих однородных уравнений Сильвестра $AY + YB = 0$, описание решений уравнений типа (1) далеко не столь просто и в настоящее время выполнено лишь для небольшого числа матриц. Одной из таких матриц является жорданова клетка $J_n(0)$ с нулем на главной диагонали.

2. Точный вид решений уравнения

$$J_n(0)Y + Y^\top J_n(0) = 0 \tag{2}$$

зависит от четности порядка n. Все дальнейшие наши рассмотрения относятся к случаю четного $n = 2m$. Покажем, как выглядят матрицы

Ключевые слова: конгруэнции, уравнения Сильвестра, уравнения типа Сильвестра, композиционный тип, перестановка уровней.

Y для таких n:

$$\begin{pmatrix} y_1 & 0 & -y_2 & 0 & -y_3 & 0 & \cdots & -y_m & 0 \\ 0 & -y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 & 0 & -y_2 & 0 & \cdots & -y_{m-1} & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & -y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_1 & 0 & \cdots & -y_{m-2} & 0 \\ 0 & y_3 & 0 & y_2 & 0 & -y_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & y_m & 0 & y_{m-1} & 0 & y_{m-2} & \cdots & 0 & -y_1 \end{pmatrix}.$$

Будем рассматривать Y как матрицу, составленную из 2×2-блоков. Блочный порядок такой матрицы равен m. В расположении блоков распознаем теплицеву структуру, при этом у всех блоков есть общее свойство: их можно считать диагональными матрицами. Используя терминологию из первого параграфа книги [2], скажем, что Y имеет композиционный тип $M = TD$. Это означает, что на блочном уровне Y есть теплицева матрица (T означает Toeplitz), а каждый блок есть диагональная 2×2-матрица (D).

Замечательная лемма о перестановке уровней, принадлежащая Е. Е. Тыртышникову (см. [2, §1]), утверждает, что симметричной перестановкой строк и столбцов матрицу Y можно перевести в блочную матрицу $\widetilde{Y}$ композиционного типа $N = DT$. Это значит, что $\widetilde{Y}$ – матрица блочного порядка 2, составленная из четырех $m\times m$-блоков. При этом внедиагональные блоки нулевые, т.е. на блочном уровне $\widetilde{Y}$ имеет диагональную структуру. Диагональные блоки матрицы $\widetilde{Y}$ суть теплицевы матрицы.

Проиллюстрируем переход от Y к $\widetilde{Y}$ на матрицах порядка 6. В матрице

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & -y_2 & 0 & -y_3 & 0 \\ 0 & -y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 & 0 & -y_2 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & -y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & y_3 & 0 & y_2 & 0 & -y_1 \end{pmatrix}$$

поставим третий и пятый столбцы на место второго и третьего и то же самое проделаем с третьей и пятой строкой. Второй и четвертый столбцы, а также вторая и четвертая строки становятся соответственно четвертыми и пятыми. В результате приходим к матрице

$$\widetilde{Y} = \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 & -y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & -y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_2 & -y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_3 & y_2 & -y_1 \end{pmatrix}.$$

Возвращаясь к общему случаю $n = 2m$, обозначим через P матрицу-перестановку, осуществляющую преобразование матрицы Y в $\widetilde{Y}$:

$$\widetilde{Y} = P^\top Y P.$$

Матрица $\widetilde{Y}$ есть решение однородного уравнения типа Сильвестра

$$K_n \widetilde{Y} + \widetilde{Y}^\top K_n = 0,$$

где

$$K_n = P^\top J_n(0) P.$$

Снова для $n = 6$ покажем вид матрицы K_n:

$$K_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Список литературы

1. F. De Terán, F. M. Dopico, *The solution of the equation $XA + AX^T = 0$ and its application to the theory of orbits.* — Linear Algebra Appl. **434** (2011), 44–67.
2. В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников, *Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами*, М., Наука, 1987.

Ikramov Kh. D. The structure of solutions of the matrix equation $J_n(0)Y + Y^T J_n(0) = 0$ for even n.

It is shown that every solution of the matrix equation in the title of the paper, where $n = 2m$, can be transformed by a symmetric permutation of

rows and columns to the direct sum of two triangular Toeplitz matrices of order m.

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 17 февраля 2020 г.