Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 496, 2020 г.

Х. Д. Икрамов

О КОНГРУЭНТНОСТИ УНИТАРНЫХ МАТРИЦ

1. Комплексные $n \times n$-матрицы A и B называют $*$-конгруэнтными, если

$$B = S^* AS$$

для некоторой невырожденной матрицы S. Следующее замечательное утверждение о $*$-конгруэнтных матрицах сформулировано и доказано в [1].

Теорема 1. *Если две унитарные матрицы $*$-конгруэнтны, то они подобны и даже унитарно подобны, т.е. подобие между ними можно осуществить посредством унитарной трансформирующей матрицы.*

Существует и другой тип матричной конгруэнтности. Говорят, что матрицы A и B Т-конгруэнтны, если

$$B = S^T AS.$$

Матрица S снова невырожденна.

В настоящем сообщении мы хотим установить аналог теоремы 1 для этого типа конгруэнтности. Вместо подобия нужно говорить о матричном отношении, называемом в русской литературе псевдоподобием, а в англоязычной – consimilarity. Матрицы A и B называются псевдоподобными, если

$$B = \overline{S}^{-1} AS. \tag{1}$$

Черта над символом матрицы означает поэлементное сопряжение. Если матрица S унитарна, то равенство (1) принимает вид

$$B = S^T AS,$$

т.е. A и B в этом случае Т-конгруэнтны и даже унитарно Т-конгруэнтны. Итак, аналогом теоремы 1 является

Теорема 2. *Если две унитарные матрицы Т-конгруэнтны, то они унитарно Т-конгруэнтны, т.е. конгруэнцию между ними можно осуществить посредством унитарной трансформирующей матрицы.*

Ключевые слова: $*$-конгруэнтность, Т-конгруэнтность, подобие, псевдоподобие, унитарная конгруэнтность.

Мы доказываем теорему 2 в разделе 2. В разделе 3 обсуждается вопрос о том, как проверить Т-конгруэнтность заданных матриц, используя лишь конечное число арифметических операций.

2. Доказательство теоремы 2, которое мы предлагаем, есть небольшое видоизменение рассуждений, использованных в [1] для доказательства теоремы 1.

Пусть унитарные матрицы U_1 и U_2 таковы, что

$$U_2 = S^T U_1 S. \tag{2}$$

Представим матрицу S ее левым полярным разложением

$$S = VP. \tag{3}$$

Здесь матрица V унитарна, а P – эрмитова положительно определенная матрица. Из (2) и (3) выводим

$$U_2 = P^T (V^T U_1 V) P.$$

Полагая $W = V^T U_1 V$, имеем

$$P^{-T} U_2 = WP.$$

Две части этого равенства суть правое и левое полярные разложения одной и той же невырожденной матрицы. Известно (см., например, [2, раздел 7.3]), что унитарные сомножители этих разложений должны совпадать, т.е.

$$U_2 = W = V^T U_1 V.$$

Тем самым U_1 и U_2 унитарно Т-конгруэнтны: конгруэнцию между ними реализует унитарная матрица V.

3. Пусть A – невырожденная матрица. Ее коквадратом назовем матрицу

$$\mathcal{C}_A = A^{-T} A.$$

Роль коквадратов в наших рассмотрениях объясняется следующим результатом [2, теорема 4.5.27].

Теорема 3. *Невырожденные матрицы A и B тогда и только тогда Т-конгруэнтны, когда их коквадраты $\mathcal{C}_A$ и $\mathcal{C}_B$ подобны.*

Для унитарной матрицы U ее коквадрат есть снова унитарная матрица:

$$\mathcal{C}_U = U^{-T} U = (U^*)^T U = \overline{U} U.$$

Итак, проверка T-конгруэнтности унитарных матриц U_1 и U_2 сводится к проверке подобия между их коквадратами $\overline{U_1}U_1$ и $\overline{U_2}U_2$. Две унитарные (и, более общо, любые две нормальные) матрицы подобны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же собственные значения или, иначе, один и тот же характеристический многочлен.

Для вычисления характеристического многочлена матрицы существует ряд алгоритмов, использующих лишь конечное число арифметических операций. Назовем, например, метод Данилевского [3, §46]. Построение коквадратов $\mathcal{C}_{U_1}$ и $\mathcal{C}_{U_2}$ требует $O(n^3)$ операций умножения и сложения, а также $2n^2$ сопряжений, выполняемых для элементов матриц U_1 и U_2. Таким образом, проверка T-конгруэнтности матриц U_1 и U_2 может быть осуществлена за конечное число арифметических операций.

Список литературы

1. C. R. Johnson, S. Furtado, *A generalization of Sylvester's law of inertia.* — Linear Algebra Appl. **338** (2001), 287–290.
2. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis. Second Edition*, Cambridge University Press, 2013.
3. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, *Вычислительные методы линейной алгебры,* М., Физматгиз, 1963.

Ikramov Kh. D. Congruence of unitary matrices.

C. R. Johnson and S. Furtado showed that if two unitary matrices are $*$-congruent, then they are unitarily similar. In this note, an analogous statement concerning another type of matrix congruence, namely, the T-congruence is proved. Additionally, the problem of checking the T-congruence of given matrices using only a finite number of arithmetic operations is discussed.

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 10 февраля 2020 г.