Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 496, 2020 г.

Х. Д. Икрамов

О ПРОВЕРКЕ КОНГРУЭНТНОСТИ ИНВОЛЮТИВНЫХ МАТРИЦ

§1. Введение

Известно, что подобие квадратных комплексных матриц A и B (или его отсутствие) можно проверить, выполняя конечное число арифметических операций с их элементами (см., например [1, § 3.4]). Вычислительный процесс с этими свойствами – конечность и использование только арифметических операций – будем называть *рациональным алгоритмом.*

Будем говорить, что $n \times n$-матрицы A и B конгруэнтны, если

$$B = P^* AP \tag{1}$$

для некоторой невырожденной матрицы P. Более точно, это соотношение между A и B называют *эрмитовой конгруэнтностью* или **-конгруэнтностью*, чтобы отличать его от близкого отношения T-конгруэнтности

$$B = P^T AP.$$

Мы будем игнорировать эти терминологические тонкости, так как в данном тексте конгруэнтность всегда понимается в смысле (1).

В настоящее время не существует рационального алгоритма, позволяющего проверить конгруэнтность (или ее отсутствие) для произвольных квадратных матриц A и B. Пусть, однако, известно, что A и B принадлежат какому-то классу специальных матриц. Для некоторых из этих классов рациональная проверка конгруэнтности возможна. Предположим, например, что A и B – эрмитовы матрицы. Из теории полуторалинейных форм следует, что A и B конгруэнтны тогда и только тогда, когда имеют одинаковые количества положительных и отрицательных собственных значений. Проверить это условие можно, построив характеристические многочлены обеих матриц и найдя для каждого число положительных и отрицательных корней с помощью, к примеру, теоремы Штурма (см. [2, § 4.2]).

Ключевые слова: инволютивная матрица (инволюция), конгруэнции, каноническая форма, коквадрат, рациональный алгоритм.

Известны также рациональные алгоритмы проверки конгруэнтности для случаев, когда обе матрицы A и B унитарные или обе аккретивные (см. [3]).

Цель настоящей публикации – указать еще один матричный класс, для которого можно предложить рациональный алгоритм проверки конгруэнтности. Этим классом являются инволютивные матрицы (иначе, инволюции). Напомним, что инволюцией называется комплексная $n \times n$-матрица A такая, что

$$A^2 = I_n. \tag{2}$$

Предлагаемый алгоритм существенно использует каноническую форму комплексных матриц относительно конгруэнций, описанную в [4, § 4.5] (см. также [5]), и необходимое условие конгруэнтности, указанное в [4]. Сведения об этих фактах приведены в §2. Описание алгоритма начинается в §2 и заканчивается в §4 разбором более сложного случая. Этот разбор опирается на важное вспомогательное утверждение, доказываемое в §3.

§2. Каноническая форма относительно конгруэнций

Каноническая форма матрицы A относительно конгруэнций представляет собой блочно-диагональную матрицу; назовем ее F. Среди ее диагональных блоков могут присутствовать жордановы клетки с нулем на главной диагонали. В совокупности такие клетки образуют *сингулярную часть*. Все прочие диагональные блоки невырожденны и составляют *регулярную часть* канонической формы. Поскольку инволютивные матрицы невырожденны, мы в дальнейшем говорим лишь о регулярных канонических формах.

В канонической форме невырожденной матрицы A различают диагональные блоки двух типов, что объясняется следующими соображениями.

Свяжем с A матрицу

$$C_A = A^{-*}A, \tag{3}$$

называемую в [4] коквадратом матрицы A. Если A подвергается конгруэнции

$$A \to \widetilde{A} = X^*AX, \tag{4}$$

то

$$A^{-1} \to \widetilde{A}^{-1} = X^{-1}A^{-1}X^{-*}$$

и

$$C_A = A^{-*}A \to C_{\widetilde{A}} = X^{-1}C_A X,$$

т.е. коквадрат матрицы A претерпевает подобие, задаваемое той же матрицей X. Неудивительно поэтому, что каноническая форма матрицы A относительно конгруэнций тесно связана с жордановой формой ее коквадрата.

Первый тип диагональных блоков в матрице F – это ганкелевы матрицы вида

$$\Delta_k = \lambda \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdots & i \\ & 1 & \cdots & \\ 1 & i & & \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $|\lambda| = 1$, а индекс k указывает порядок блока. Коквадрат матрицы (5), где $\lambda = e^{i\phi}$, – это верхнетреугольная теплицева матрица с числом $e^{2i\phi}$ на главной диагонали и числом $2ie^{2i\phi}$ на первой наддиагонали (см. [4, задача 4.5.P15]). Такая матрица подобна жордановой клетке $J_k(\lambda^2)$.

Второй тип диагональных блоков в F – это матрицы четной размерности

$$H_{2k}(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ J_k(\mu) & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Здесь $J_k(\mu)$ – жорданова клетка с числом μ на главной диагонали, а относительно μ можно без ограничения общности предполагать, что $|\mu| > 1$.

Коквадратом матрицы (6) является прямая сумма

$$J_k(\mu) \oplus J_k(\mu)^{-*}.$$

Второе слагаемое этой суммы подобно жордановой клетке $J_k(\bar{\mu}^{-1})$.

Таким образом, блоки типа (5) в канонической матрице F соответствуют жордановым клеткам для собственных чисел с модулем 1 в жордановой форме коквадрата C_A, а блоки типа (6) – парам жордановых клеток вида

$$J_k(\mu) \oplus J_k(\bar{\mu}^{-1}),$$

где модуль числа μ отличен от единицы.

Соотношения между канонической формой F и жордановой формой матрицы C_A можно описать следующим образом.

(i) Знание канонической формы матрицы A однозначно определяет жорданову форму ее коквадрата.

(ii) Жорданова форма J коквадрата C_A *не* определяет однозначно каноническую форму матрицы A, если C_A имеет собственные значения, по модулю равные единице. Предположим, например, что A – (невырожденная) эрмитова матрица. В этом случае, независимо от того, каковы индексы инерции A, коквадратом является единичная матрица.

Посмотрим, что сказанное дает в случае инволютивной матрицы A. Ее коквадрат

$$C_A = \{A^{-1}\}^* A = A^* A$$

есть эрмитова положительно определенная матрица. Жорданова форма J матрицы C_A – это диагональная матрица с положительными диагональными элементами. Те из них, что не равны единице, образуют пары вида $(\mu, 1/\mu)$. Если C_A не имеет собственного значения 1, то матрица J определяет однозначно каноническую форму матрицы A. В этом случае алгоритм проверки конгруэнтности инволюций A и B состоит из следующих шагов:

1. Вычислить характеристические многочлены $f_A(\lambda)$ и $f_B(\lambda)$ матриц C_A и C_B.

2. Если эти многочлены не совпадают, то коквадраты C_A и C_B не подобны, а матрицы A и B не конгруэнтны. Работа алгоритма на этом завершена.

3. Пусть $f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$. Проверить условие $f_A(1) \neq 0$. Если оно выполнено, то 1 не является собственным значением коквадратов и их подобие влечет за собой конгруэнтность матриц A и B. В этом случае работа алгоритма завершена. Если же $f_A(1) = 0$, то алгоритм требует продолжения, обсуждаемого в §4.

§3. Вспомогательное утверждение

Предположим, что подобие с трансформирующей матрицей X приводит к прямой сумме коквадрат C_A:

$$X^{-1}(A^{-*}A)X = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}.$$

Перепишем это равенство в виде

$$X^* A X = X^* A^* X \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Обозначим через A_X матрицу X^*AX и представим A_X в блочном виде, согласованном с прямой суммой $H \oplus G$:

$$A_X = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Из соотношения (7) выводим для блоков A_{ij} равенства

$$A_{11} = A_{11}^* H, \qquad A_{22} = A_{22}^* G,$$

$$A_{12} = A_{21}^* G, \qquad A_{21} = A_{12}^* H.$$

Из последних двух равенств имеем

$$A_{12} - H^* A_{12} G = 0,$$

$$A_{21} - G^* A_{21} H = 0.$$

Итак, блоки A_{12} и A_{21} суть решения однородных матричных уравнений Стейна. Известно (см., например, [6]), что эти уравнения имеют только тривиальные решения $A_{12} = 0$ и $A_{21} = 0$, если для собственных значений матриц H и G выполнены условия

$$\overline{\lambda_i(H)}\lambda_j(G) \neq 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \;\; j = 1, 2, \ldots, l. \tag{8}$$

Здесь k и l – порядки блоков H и G.

Предполагая, что условия (8) выполнены, находим

$$A_{12} = 0, \quad A_{21} = 0, \quad H = A_{11}^{-*} A_{11}, \quad G = A_{22}^{-*} A_{22}.$$

Следующая лемма подводит итог проделанных выкладок.

Лемма 1. *Пусть подобие*

$$C_A \longrightarrow X^{-1} C_A X$$

приводит коквадрат C_A к прямой сумме $H \oplus G$, причем для блоков H и G выполнены условия (8). *Тогда конгруэнция с той же трансформирующей матрицей X приводит A к прямой сумме*

$$A_{11} \oplus A_{22},$$

а матрицы H и G - это коквадраты соответственно блоков A_{11} и A_{22}.

§4. Присутствие единицы в спектре коквадрата

Применим лемму из предыдущего параграфа к ситуации, когда коквадрат C_A имеет собственное значение 1. Пусть k – кратность этого собственного значения. Трансформирующую матрицу X составим следующим образом: первые k столбцов этой матрицы образуют базис собственного подпространства для $\lambda = 1$, а остальные $n - k$ столбцов – базис его ортогонального дополнения. И то, и другое можно найти с помощью рациональных процедур. Например, собственные векторы для 1 можно определить методом Гаусса как фундаментальные решения однородной системы линейных уравнений $(A - I)x = 0$.

Блок H из леммы является в данном случае единичной матрицей и должен быть коквадратом подматрицы A_{11}. Из соотношения

$$A_{11}^{-*}A_{11} = I$$

следует, что A_{11} – эрмитова матрица.

Теперь мы можем продолжить алгоритм из §2. Напомним, что продолжение требуется в ситуации, когда коквадраты C_A и C_B имеют собственное значение 1. Оно состоит из следующих шагов:

4. Найти матрицы X_A и X_B, трансформирующие коквадраты C_A и C_B к блочно-диагональному виду, как это описано выше.

5. Определить соответствующие эрмитовы матрицы A_{11} и B_{11}.

6. Проверить конгруэнтность найденных эрмитовых матриц, как это описано во введении. Если A_{11} и B_{11} конгруэнтны, то конгруэнтны и исходные инволюции A и B. В противном случае конгруэнтности нет.

Список литературы

1. Х. Д. Икрамов, *О конечных спектральных процедурах в линейной алгебре.* — Программирование, No. 1 (1994), 56–69.
2. В. В. Прасолов, *Многочлены*, МЦНМО, М., 2001.
3. Х. Д. Икрамов, *О проверке конгруэнтности аккретивных матриц.* — Мат. заметки **101** (2017), 854–859.
4. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis. Second edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
5. R. A. Horn, V. V. Sergeichuk, *Canonical forms for complex matrices congruence and *congruence.* — Linear Algebra Appl. **416** (2006), 1010–1032.
6. Х. Д. Икрамов, *Численное решение матричных уравнений*, Наука, М., 1984.

Ikramov Kh. D. Congruence verification for involutive matrices. A finite

computational process using only arithmetic operations is called a rational algorithm. Presently, no rational algorithm for checking the congruence of arbitrary complex matrices A and B is known. The situation may be different if both A and B belong to a special matrix class. For instance, there exist rational algorithms for the cases where both matrices are Hermitian, unitary, or accretive. In this publication, we propose a rational algorithm for checking the congruence of involutive matrices A and B.

Московский государственный университет
Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило 3 февраля 2020 г.