

А. Э. Гутерман, С. А. Жилина

ГРАФЫ ОТНОШЕНИЙ АЛГЕБРЫ СЕДЕНИОНОВ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Алгебра седенионов – важный частный случай вещественных алгебр Кэли–Диксона. Это первая неальтернативная алгебра главной последовательности, поэтому в ней впервые возникают делители нуля. Как мы увидим далее, их структура интересна и гармонична.

В число наиболее важных статей о делителях нуля алгебр главной последовательности входят работы Морено [15, 17], а также Бисса, Даггера и Исаксена [2, 3]. Морено был первым, кто начал изучать дважды альтернативные делители нуля, то есть такие элементы, обе компоненты которых альтернативны в предыдущей алгебре этой последовательности. Он установил ряд интересных свойств таких делителей нуля, см. [15, с. 25–27].

Один из удобных методов визуализации бинарного алгебраического отношения R – построение соответствующего ему графа. Вершинам графа соответствуют элементы или их классы эквивалентности в рассматриваемой алгебраической структуре, причём существует ребро из x в y , если и только если xRy . Наиболее распространёнными графами отношений являются графы коммутативности, ортогональности и делителей нуля.

Среди недавних работ о графах отношений вещественных алгебр Кэли–Диксона можно отметить [8, 19], где были описаны графы отношений контркомплексных чисел, контркватернионов, контроктонионов и контрседенионов. Мы называем эти алгебры вещественными контр-алгебрами Кэли–Диксона малых размерностей. Кроме того, [8, теорема 4.30] устанавливает простую взаимосвязь между графами коммутативности и ортогональности этих алгебр. Однако в случае седенионов эта взаимосвязь оказывается значительно более сложной: для малоразмерных контр-алгебр мы используем лемму 6.2(1), а для седенионов – лемму 6.2(2) настоящей работы.

Ключевые слова: алгебры Кэли–Диксона, седенионы, графы отношений, компоненты связности.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 17-11-01124.

В работе второго автора [20] изучены делители нуля, имеющие некоторые ограничения на альтернативность и норму, в произвольных вещественных алгебрах Кэли–Диксона. Установлено, что они образуют шестиугольные структуры в графах ортогональности и делителей нуля, см. [20, следствие 3.7]. В алгебрах главной последовательности каждая пара делителей нуля порождает так называемый двойной шестиугольник, см. [20, описание 4.8]. Таблица умножения вершин двойного шестиугольника имеет блочную структуру, см. [20, теорема 4.11].

В настоящей статье изучается граф ортогональности седенионов, обозначаемый $\Gamma_O(\mathbb{S})$. Хорошо известно, что алгебра октонионов альтернативна и любой седенион может быть представлен в виде пары октонионов. Следовательно, в случае седенионов любой делитель нуля дважды альтернативен, поэтому мы можем применить результаты работы [20] и получить, что любая пара делителей нуля порождает двойной шестиугольник в $\Gamma_O(\mathbb{S})$.

Можно проверить, что любой автоморфизм ϕ октонионов можно продлить до автоморфизма $\widehat{\phi}$ седенионов по формуле

$$\widehat{\phi}((a, b)) = (\phi(a), \phi(b)).$$

Халил и Яо [10] показали, что группа $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$ действует свободно и транзитивно на

$$\{(x, y) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S} \mid n(x) = n(y) = 1, xy = 0\}.$$

В частности, любую пару делителей нуля (a, b) и (c, d) всегда можно заменить на (e_1, e_2) и (e_7, e_4) с некоторыми коэффициентами. В [6, предложение 3.4(ii)] было доказано, что, поскольку $e_1e_2 = e_3 = -e_7e_4$, из $(a, b)(c, d) = 0$ следует $n(c)ab = -n(a)cd$. Мы скоро увидим, что это свойство седенионов особенно важно. В частности, благодаря ему множество вершин двойного шестиугольника можно дополнить до базиса, имеющего удобную таблицу умножения, см. теорему 5.2.

Отметим также работу Чана и Джоковича [6], посвящённую классификации подалгебр в \mathbb{S} . Выбирая представителей классов сопряжённости относительно действия $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{S})$, Чан и Джокович определённо использовали некоторые из соотношений, установленных в нашей таблице умножения. И обратно, с помощью полученной в настоящей работе таблицы умножения можно выписать некоторые из подалгебр, содержащих произвольный делитель нуля из \mathbb{S} , см. предложение 5.4.

В подразделе 4.2 изучены компоненты связности $\Gamma_O(\mathbb{S})$. Ясно, что для любых двух делителей нуля (a, b) и (c, d) , принадлежащих одной

компоненте связности, элементы ab и cd линейно зависимы. Из [15, с. 25–27] также следует, что ab и cd чисто мнимые. Значит, каждой компоненте связности $\Gamma_O(\mathbb{S})$ можно поставить в соответствие некоторую прямую из мнимой части алгебры октонионов. По теореме 4.15, это соответствие биективно. Диаметр каждой компоненты связности равен 3, см. теорему 4.11.

В подразделе 4.3 описывается подграф $\Gamma_O(\mathbb{S})$ на множестве тех вершин, обе компоненты которых с точностью до знака являются стандартными базисными элементами, то есть имеют вид $(e_i, \pm e_j)$. Отметим, что шестиугольники на рисунке 2 уже встречались в работе Брауна [4, теорема 8.1]. Кроме того, де Маре [11] изучал ранее делители нуля вида $(e_i, \pm e_j)$ и получил аналог двойных шестиугольников [12, с. 3], а также таблицу умножения для их вершин [13, с. 8]. Однако наше доказательство является более общим.

В работе Кавагаса [5], посвящённой классификации подлуп в лупе стандартных базисных седенионов, найдены 7 изоморфных копий лупы квазиоктонионов и показано, что к ним сводятся все делители нуля, которые ранее перечислил де Маре.

Наконец, в §6 мы рассматриваем граф коммутативности \mathbb{S} . Все элементы, чья мнимая часть является делителем нуля, содержатся в одной компоненте связности, и её диаметр лежит между 3 и 4. Основываясь на ряде вычислений в Wolfram Mathematica, мы выдвигаем гипотезу, что этот диаметр равен 3.

§2. ОБЗОР ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБР КЭЛИ–ДИКСОНА

2.1. Алгебраические отношения и их графы. Пусть \mathbb{F} – произвольное поле, и $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ – алгебра с единицей $1_{\mathcal{A}}$ над полем \mathbb{F} , возможно, некоммутативная или неассоциативная. Говорят, что элементы $a, b \in \mathcal{A}$ *антикоммутируют*, если $ab + ba = 0$, и элементы a, b *ортогональны*, если $ab = ba = 0$. Множество делителей нуля в \mathcal{A} (левых, правых и двусторонних) мы будем обозначать как $Z(\mathcal{A})$, множество двусторонних делителей нуля в \mathcal{A} – как $Z_{LR}(\mathcal{A})$, а центр \mathcal{A} – как $C_{\mathcal{A}}$.

Обозначим множество всех автоморфизмов алгебры \mathcal{A} над полем \mathbb{F} как $\text{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathcal{A})$. Легко видеть, что каждый автоморфизм сохраняет пары коммутирующих элементов, пары ортогональных элементов и пары делителей нуля.

Определение 2.1. Пусть a – произвольный элемент алгебры \mathcal{A} .

- *Централизатором* a называется $C_{\mathcal{A}}(a) = \{b \in \mathcal{A} \mid ab = ba\}$ – множество элементов \mathcal{A} , коммутирующих с a .
- *Антицентрализатором* a называется $\text{Апс}_{\mathcal{A}}(a) = \{b \in \mathcal{A} \mid ab + ba = 0\}$ – множество элементов \mathcal{A} , антикоммутирующих с a .
- *Ортогонализатором* a называется $O_{\mathcal{A}}(a) = \{b \in \mathcal{A} \mid ab = ba = 0\}$ – множество элементов \mathcal{A} , ортогональных к a .

Ясно, что $C_{\mathcal{A}}(a)$, $\text{Апс}_{\mathcal{A}}(a)$ и $O_{\mathcal{A}}(a)$ – линейные пространства над \mathbb{F} .

Обозначение 2.2. Для любого множества $X \subseteq \mathcal{A}$ обозначим множество прямых, проходящих через элементы X , как

$$P(X) = \{[x] = \mathbb{F}x \mid x \in X\}.$$

Введём теперь некоторые графы отношений, изучению которых посвящена данная работа.

Определение 2.3. Пусть \mathcal{A} – произвольная алгебра.

- *Граф коммутативности* $\Gamma_C(\mathcal{A})$ определяется следующим образом: его вершины – прямые в $\mathcal{A} \setminus C_{\mathcal{A}}$, то есть

$$V(\Gamma_C(\mathcal{A})) = P(\mathcal{A} \setminus C_{\mathcal{A}}),$$

причём различные вершины $[a]$ и $[b]$ соединены ребром, если и только если $ab = ba$.

- *Граф ортогональности* $\Gamma_O(\mathcal{A})$ определяется следующим образом: его вершины – прямые в $Z_{LR}(\mathcal{A})$, то есть

$$V(\Gamma_O(\mathcal{A})) = P(Z_{LR}(\mathcal{A})),$$

причём различные вершины $[a]$ и $[b]$ соединены ребром, если и только если $ab = ba = 0$.

Заметим, что рёбра графов $\Gamma_C(\mathcal{A})$ и $\Gamma_O(\mathcal{A})$ корректно определены. Говоря о вершинах этих графов, мы не будем проводить различия между ненулевым элементом a и проходящей через него прямой $[a] = \mathbb{F}a$.

Напомним также, что в неориентированном графе Γ величина $d(x, y) = d_{\Gamma}(x, y)$ – это расстояние между двумя вершинами x и y , а $d(\Gamma) = \sup_{x, y \in \Gamma} d(x, y)$ – диаметр Γ . Кликой называется множество попарно соединённых вершин, а максимальной кликой называется максимальная по включению клика. Обхват $g(\Gamma)$ – это длина кратчайшего цикла в Γ .

2.2. Построение алгебр Кэли–Диксона. Вспомогательные определения и основные свойства алгебр Кэли–Диксона могут быть найдены в работах [14, 18].

Определение 2.4. Пусть \mathcal{A} – алгебра над полем \mathbb{F} с операцией сопряжения $a \mapsto \bar{a}$. Алгебра $\mathcal{A}\{\gamma\}$, полученная из \mathcal{A} с помощью процедуры Кэли–Диксона с параметром $\gamma \in \mathbb{F}$, $\gamma \neq 0$, определяется как множество упорядоченных пар элементов из \mathcal{A} с операциями

$$\begin{aligned}\alpha(a, b) &= (\alpha a, \alpha b); \\ (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d); \\ (a, b)(c, d) &= (ac + \gamma \bar{d}b, da + b\bar{c})\end{aligned}$$

и сопряжением

$$\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b), \quad a, b, c, d \in \mathcal{A}, \quad \alpha \in \mathbb{F}.$$

Если сопряжение на \mathcal{A} регулярно, то есть $a + \bar{a} \in \mathbb{F}1_{\mathcal{A}}$ и $a\bar{a} = \bar{a}a \in \mathbb{F}1_{\mathcal{A}}$ для любого $a \in \mathcal{A}$, то сопряжение на $\mathcal{A}\{\gamma\}$ также регулярно, см. [18, с. 435].

Далее будем считать, что $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, и дадим определение произвольной вещественной алгебры Кэли–Диксона в зависимости от набора её параметров. Наиболее распространённое определение вещественных алгебр Кэли–Диксона подразумевает, что все параметры равны -1 . Мы будем называть такие алгебры алгебрами главной последовательности.

Определение 2.5. Для каждого целого $n \geq 0$ и ненулевых вещественных чисел $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$ вещественная алгебра Кэли–Диксона

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n\{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\}$$

определяется индуктивно:

- 1) $\mathcal{A}_0 = \mathbb{R}$, $e_0^{(0)} = 1$ – её базисный элемент.
- 2) Если построена

$$\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\},$$

то $\mathcal{A}_{n+1}\{\gamma_0, \dots, \gamma_n\} = (\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\})\{\gamma_n\}$, причём $e_0^{(n+1)}, \dots, e_{2^{n+1}-1}^{(n+1)}$ – её базисные элементы, где

$$e_m^{(n+1)} = \begin{cases} (e_m^{(n)}, 0), & 0 \leq m \leq 2^n - 1, \\ (0, e_{m-2^n}^{(n)}), & 2^n \leq m \leq 2^{n+1} - 1. \end{cases}$$

Для каждого целого $n \geq 0$ структура \mathcal{A}_n из определения 2.5 – это 2^n -мерная алгебра над \mathbb{R} с единицей $e_0^{(n)}$ и регулярной операцией сопряжения, см. [8, лемма 3.14]. Мы будем использовать обозначения $1 = e_0^{(n)}$ и $r = re_0^{(n)}$ при $r \in \mathbb{R}$. Введём следующие понятия, аналогичные соответствующим понятиям для комплексных чисел.

Определение 2.6.

- Пусть $a \in \mathcal{A}_n$. *Действительной частью* $a \in \mathcal{A}$ называется $\operatorname{Re}(a) = \frac{a+\bar{a}}{2}$, *мнимой частью* – $\operatorname{Im}(a) = \frac{a-\bar{a}}{2}$, *нормой* – $n(a) = a\bar{a} = \bar{a}a$. Поскольку операция сопряжения на \mathcal{A}_n регулярна, $\operatorname{Re}(a), n(a) \in \mathbb{R}$.
- Элемент $a \in \mathcal{A}_n$ называется *чисто мнимым*, если $\operatorname{Re}(a) = 0$.
- Элемент $(a, b) \in \mathcal{A}_{n+1}$ называется *дважды чисто мнимым*, если $\operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(b) = 0$.

Предложение 2.7 ([18, с. 435]). *Вещественная часть и норма элемента $(a, b) \in \mathcal{A}_{n+1}$ могут быть вычислены индуктивно с использованием следующих соотношений:*

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}((a, b)) &= \operatorname{Re}(a), \\ n((a, b)) &= n(a) - \gamma_n n(b).\end{aligned}$$

Замечание 2.8. Норма a часто определяется как $\sqrt{a\bar{a}}$, в отличие от нормы $n(a) = a\bar{a}$, используемой в данной работе. Однако большая часть результатов может быть легко перенесена на случай изменённой таким образом нормы.

2.3. Свойства вещественных алгебр Кэли–Диксона. Далее подразумеваем, что \mathcal{A} – произвольная алгебра над полем \mathbb{F} , а $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n\{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\}$ – произвольная вещественная алгебра Кэли–Диксона. По [14, упражнение 2.5.1], $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\}$ изоморфна $\mathcal{A}_n\{\operatorname{sgn}(\gamma_0), \dots, \operatorname{sgn}(\gamma_{n-1})\}$, поэтому достаточно рассматривать только значения $\gamma_k \in \{\pm 1\}$, $k = 0, \dots, n-1$.

Обозначение 2.9. Пусть $\langle a, b \rangle$ – вещественнозначная симметрическая билинейная форма, соответствующая квадратичной форме $n(a)$. Тогда $\langle a, a \rangle = n(a)$ и $2\langle a, b \rangle = a\bar{b} + b\bar{a} = \bar{a}b + \bar{b}a$ для любых $a, b \in \mathcal{A}_n$, см. [8, предложение 3.18, предложение 3.19].

Заметим также, что для любых $a, b \in \mathcal{A}_n$ выполнено $\langle a, b \rangle = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ и $\operatorname{Re}(a) = \langle a, 1 \rangle$.

Следующая лемма описывает антицентрализатор произвольного ненулевого чисто мнимого элемента \mathcal{A}_n .

Лемма 2.10 ([9, лемма 5.8]). *Пусть $a \in \mathcal{A}_n$, $\operatorname{Re}(a) = 0$, $a \neq 0$. Тогда*

$$\operatorname{Anc}_{\mathcal{A}_n}(a) = \{b \in \mathcal{A}_n \mid \operatorname{Re}(b) = 0 \text{ и } \langle a, b \rangle = 0\}.$$

Перейдём к некоторым понятиям, связанным с ассоциативностью. Ассоциатором элементов $a, b, c \in \mathcal{A}$ называется $[a, b, c] = (ab)c - a(bc)$, а их антиассоциатором — $\{a, b, c\} = (ab)c + a(bc)$. Элемент $a \in \mathcal{A}$ называется *альтернативным*, если для любого $b \in \mathcal{A}$ выполнено $[a, a, b] = 0$ и $[b, a, a] = 0$. Если все элементы \mathcal{A} альтернативны, то \mathcal{A} называется *альтернативной*. Хорошо известно, что алгебра \mathcal{A}_n альтернативна, если и только если $n \leq 3$. Однако все алгебры Кэли–Диксона являются *гибкими*, то есть удовлетворяют равенству $[a, b, a] = 0$ для любых $a, b \in \mathcal{A}$, см. [18, с. 437, теорема 1].

Предложение 2.11 ([14, упражнение 2.1.1]).

- Если \mathcal{A} — гибкая алгебра, то для всех $a, b, c \in \mathcal{A}$ выполнено $[a, b, c] = -[c, b, a]$.
- Если \mathcal{A} альтернативна, то ассоциатор на \mathcal{A} кососимметричен, то есть меняет знак при транспозиции аргументов.

Обозначение 2.12. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{A}_n$. Будем обозначать

$$\begin{aligned} \operatorname{Lin}(a_1, \dots, a_m) &= \mathbb{R}a_1 + \dots + \mathbb{R}a_m, \\ \operatorname{Lin}^*(a_1, \dots, a_m) &= \operatorname{Lin}(a_1, \dots, a_m) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

§3. АЛГЕБРЫ ГЛАВНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

3.1. Определение и примеры.

Определение 3.1. Говорят, что алгебра $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}\}$ является алгеброй *главной последовательности*, если $\gamma_k = -1$ для любого $k = 0, \dots, n-1$. Мы будем обозначать такую алгебру символом \mathcal{M}_n .

Предложение 3.2 ([8, предложение 3.31]). *Пусть*

$$a = \sum_{m=0}^{2^n-1} a_m e_m^{(n)}, \quad b = \sum_{m=0}^{2^n-1} b_m e_m^{(n)} \in \mathcal{M}_n.$$

Тогда $\langle a, b \rangle = \sum_{m=0}^{2^n-1} a_m b_m$ – стандартное евклидово скалярное произведение. В частности, $n(a) = \sum_{m=0}^{2^n-1} a_m^2$, поэтому $n(a) = 0$, если и только если $a = 0$.

Пример 3.3. Примерами вещественных алгебр Кэли–Диксона главной последовательности могут служить комплексные числа (\mathbb{C}), кватернионы (\mathbb{H}), октонионы (\mathbb{O}) и седенионы (\mathbb{S}) при $n = 1, 2, 3$ и 4 соответственно. Для знакомства с их определениями читатель может обратиться к работе [1].

Ниже приведены точные определения и основные свойства алгебр \mathbb{O} и \mathbb{S} .

Определение 3.4 ([1, с. 6]). \mathbb{O} – восьмимерная алгебра над \mathbb{R} с базисом $1, e_1, \dots, e_7$. Сопряжение на \mathbb{O} задаётся формулой

$$\overline{a_0 + a_1 e_1 + \dots + a_7 e_7} = a_0 - a_1 e_1 - \dots - a_7 e_7,$$

а умножение задаётся таблицей 1.

Таблица 1. Таблица умножения базисных октонионов.

\times	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

Хорошо известно, что $\mathbb{O} \cong \mathcal{M}_3$, поэтому \mathbb{O} – некоммутативная, неассоциативная, но альтернативная алгебра без делителей нуля, см. [1, с. 10].

Алгебра *седенионов* определяется как $\mathbb{S} = \mathcal{M}_4$. Легко видеть, что $\mathbb{S} = \mathcal{M}_4 = \mathcal{M}_3\{-1\} \cong \mathbb{O}\{-1\}$, и этот изоморфизм приводит нас к наиболее удобной форме записи седенионов. \mathbb{S} – некоммутативная, неассоциативная и неальтернативная алгебра с делителями нуля, см. [15, с. 2].

3.2. Делители нуля и двойные шестиугольники. Согласно [8, следствие 4.6], в случае вещественных алгебр Кэли–Диксона все делители нуля оказываются двусторонними делителями нуля, то есть $Z(\mathcal{A}_n) = Z_{LR}(\mathcal{A}_n)$. Однако в случае алгебр главной последовательности имеет место более сильный результат.

Замечание 3.5 ([15, следствие 1.6]). В \mathcal{M}_n условия $xy=0$ и $yx=0$ равносильны. Следовательно, $\Gamma_Z(\mathcal{M}_n)$ может быть получен из $\Gamma_O(\mathcal{M}_n)$ заменой каждого неориентированного ребра на пару разнонаправленных ориентированных ребер.

Лемма 3.6 ([15, следствие 1.12]). Пусть $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $\tilde{y} = (-y_2, y_1) \in \mathcal{M}_n$. Тогда $xy = 0$, если и только если $x\tilde{y} = 0$.

Определение 3.7 ([16, с. 15]). Пусть $a, b \in \mathcal{A}_n$.

- Элемент a альтернирует с элементом b , если $[a, a, b] = 0$.
- Элемент a строго альтернирует с элементом b , если $[a, a, b] = 0$
и
 $[b, b, a] = 0$.

Хорошо известно, что любой делитель нуля в \mathcal{M}_n является дважды чисто мнимым, см. [15, следствие 1.9]. Если же потребовать альтернативность, делители нуля будут обладать дополнительными свойствами. Следующая лемма впервые была доказана в работе Морено [15, с. 25–27], а затем получила обобщение в [20].

Лемма 3.8 ([20, следствие 4.4]). Пусть $a, b \in \mathcal{M}_{n-1}$ строго альтернируют с элементами $c, d \in \mathcal{M}_{n-1}$, $(a, b), (c, d) \in Z(\mathcal{M}_n)$, $(a, b)(c, d) = 0$. Тогда

- (1) $\operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(b) = \operatorname{Re}(c) = \operatorname{Re}(d) = 0$.
- (2) $n(a) = n(b)$, $n(c) = n(d)$.
- (3) $[a, c, b] = 2n(a)d$, $[a, d, b] = -2n(a)c$, $[c, a, d] = 2n(c)b$, $[c, b, d] = -2n(c)a$.
- (4) $\{a, c, b\} = \{a, d, b\} = \{b, c, a\} = \{b, d, a\} = 0$.
 $\{c, a, d\} = \{c, b, d\} = \{d, a, c\} = \{d, b, c\} = 0$.

Если a, b, c, d попарно строго альтернируют, то

- (5) a, b, c, d попарно ортогональны относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$;
 (6) $ac = bd, ad = -bc$.

Теорема 3.9 ([20, лемма 3.2, лемма 4.6, следствие 4.7, описание 4.8, замечание 4.13]). Пусть $a, b \in \mathcal{M}_{n-1}$ строго альтернируют с элементами $c, d \in \mathcal{M}_{n-1}$, $(a, b), (c, d) \in Z(\mathcal{M}_n)$, $(a, b)(c, d) = 0$. По лемме 3.8, без ограничения общности можно считать, что $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$. Тогда

- (1) Элементы ac, ad строго альтернируют с элементами a, b, c, d .
 (2) $1, a, b, c, d, ac, ad$ образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
 (3) Существует подграф $\Gamma_O(\mathcal{M}_n)$, изображённый на рисунке 1 и называемый двойным шестиугольником.
 (4) Все элементы в вершинах двойного шестиугольника линейно независимы.

Замечание 3.10. В частности, из теоремы 3.9(3) следует, что $(a, b)(c, d) = 0$ влечёт $(c, d)(ac, ad) = 0$.

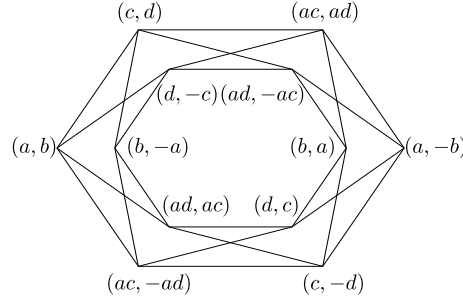


Рис. 1. Двойной шестиугольник.

§4. ГРАФ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ АЛГЕБРЫ СЕДЕНИОНОВ

4.1. Делители нуля и их свойства. Мы рассмотрим случай, когда $\mathcal{M}_n = \mathbb{S}$. Поскольку \mathbb{O} альтернативна, любая пара делителей нуля $(a, b), (c, d) \in \mathbb{S}$, $(a, b)(c, d) = 0$, удовлетворяет условиям леммы 3.8. В

частности, можно считать, что $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$. Тогда, по следствию 2.12 и теореме 2.13 в [15], существует автоморфизм ϕ алгебры \mathbb{O} , отображающий a, b, c, d в e_1, e_2, e_7, e_4 соответственно. Мы можем продлить ϕ до автоморфизма \mathbb{S} по формуле $(x, y) \mapsto (\phi(x), \phi(y))$. Тогда (a, b) и (c, d) будут переходить в (e_1, e_2) и (e_7, e_4) . Таким образом, всегда можно заменить (a, b) и (c, d) на (e_1, e_2) и (e_7, e_4) . Отсюда мы сразу получаем следующее предложение.

Предложение 4.1. *Пусть $(a, b), (c, d) \in Z(\mathbb{S})$, $(a, b)(c, d) = 0$, $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$. Тогда $1, a, b, c, d, ab, ac, ad$ образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

В случае седенионов имеется ещё одно соотношение между компонентами пар делителей нуля в дополнение к лемме 3.8. В остальных алгебрах оно принимает более слабый вид и выполняется только для пар базисных элементов.

Лемма 4.2 ([6, предложение 3.4(ii)], [20, лемма 6.2]).

- (1) Пусть $(a, b)(c, d) = 0$ в \mathbb{S} , $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$. Тогда $ab = -cd$.
- (2) Пусть $n \geq 1$, $a, b, c, d \in \{\pm e_m^{(n-1)} \mid m = 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$, $(a, b), (c, d) \in Z(\mathcal{A}_n)$, $(a, b)(c, d) = 0$. Тогда $ab = \pm cd$.

Пример 4.3. Пусть $(a, b) = (e_1, e_2)$, $(c, d) = (e_5 + e_{13}, e_6 + e_{14}) \in \mathcal{M}_5$. Тогда $(a, b)(c, d) = 0$. Кроме того, из [16, теорема 3.3] следует, что a, b, c, d альтернативны в $\mathcal{M}_4 = \mathbb{S}$. Однако $ab = e_3$, $cd = 2e_{11}$, поэтому ab и cd линейно независимы.

Следствие 4.4. *Пусть $(a, b), (c, d) \in Z(\mathbb{S})$, $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$. Пусть также P – путь длины k в $\Gamma_{\mathcal{O}}(\mathbb{S})$ между (a, b) и (c, d) . Тогда $ab = (-1)^k cd$.*

Доказательство. Можно считать, что для каждой внутренней вершины $(x, y) \in P$ выполнено $n(x) = n(y) = 1$. Требуемое утверждение нетрудно получить из леммы 4.2 индукцией по k . \square

Предложение 4.5.

- (1) $\Gamma_{\mathcal{O}}(\mathbb{S})$ не содержит циклов нечётной длины.
- (2) Обхват $\Gamma_{\mathcal{O}}(\mathbb{S})$ равен 4.
- (3) Каждая максимальная клика в $\Gamma_{\mathcal{O}}(\mathbb{S})$ содержит ровно две вершины.

Доказательство.

- (1) Предположим от противного, что существует путь P , начинающийся и заканчивающийся в вершине $(a, b) \in Z(\mathbb{S})$, $n(a) = n(b) = 1$, и P имеет нечётную длину k . Согласно следствию 4.4, мы имеем $ab = (-1)^k ab = -ab$. Следовательно, $ab = 0$, но \mathbb{O} не содержит делителей нуля, противоречие.
- (2) Сперва покажем, что $g(\Gamma_{\mathbb{O}}(\mathbb{S})) \leq 4$. Пусть $(a, b)(c, d) = 0$, где $(a, b), (c, d) \in Z(\mathbb{S})$. Тогда, по лемме 3.6, существует следующий 4-цикл в $\Gamma_{\mathbb{O}}(\mathbb{S})$:

$$(a, b) \leftrightarrow (c, d) \leftrightarrow (b, -a) \leftrightarrow (d, -c) \leftrightarrow (a, b).$$

Поскольку в $\Gamma_{\mathbb{O}}(\mathbb{S})$ нет циклов нечётной длины, $g(\Gamma_{\mathbb{O}}(\mathbb{S})) \geq 4$. Значит, $g(\Gamma_{\mathbb{O}}(\mathbb{S})) = 4$.

- (3) В $\Gamma_{\mathbb{O}}(\mathbb{S})$ нет циклов длины 3. Кроме того, $\Gamma_{\mathbb{O}}(\mathbb{S})$ не содержит изолированных вершин, откуда мы сразу получаем требуемое утверждение. \square

4.2. Компоненты связности графа ортогональности. В утверждениях 4.6–4.10 мы предполагаем, что $(a, b), (c, d) \in Z(\mathbb{S})$, $(a, b)(c, d) = 0$, $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$. Тогда $(a, b), (c, d)$ удовлетворяют условиям теоремы 3.9, поэтому они содержатся в двойном шестиугольнике на рисунке 1.

Предложение 4.6. *Каждая вершина двойного шестиугольника соединена ровно с четырьмя другими вершинами, и эти четыре вершины образуют базис ортогонализатора выбранной вершины. В частности,*

$$\begin{aligned} O_{\mathbb{S}}((a, b)) &= \text{Lin}((c, d), (d, -c), (ac, -ad), (ad, ac)), \\ O_{\mathbb{S}}((c, d)) &= \text{Lin}((a, b), (b, -a), (ac, ad), (ad, -ac)), \\ O_{\mathbb{S}}((ac, ad)) &= \text{Lin}((c, d), (d, -c), (a, -b), (b, a)). \end{aligned}$$

Доказательство. Включение справа налево сразу следует из теоремы 3.9(3). Согласно [15, с. 25], ортогонализатор произвольного делителя нуля в \mathbb{S} имеет размерность 4, что даёт нам обратное включение. \square

Обозначение 4.7. Обозначим

$$\Lambda_{(a,b)}^+ = \text{Lin}^*((a, b), (b, -a), (d, c), (c, -d), (ac, ad), (ad, -ac)),$$

$$\Lambda_{(a,b)}^- = \text{Lin}^*((b, a), (a, -b), (c, d), (d, -c), (ad, ac), (ac, -ad)),$$

$$\Lambda_{(a,b)} = \Lambda_{(a,b)}^+ \cup \Lambda_{(a,b)}^-.$$

$\Lambda_{(a,b)}$ – это множество всех нетривиальных линейных комбинаций элементов, стоящих в углах двойного шестиугольника на рисунке 1 через один.

Лемма 4.8. $\Lambda_{(a,b)}$ находится на расстоянии не больше 3 от (a, b) в $\Gamma_O(\mathbb{S})$.

Доказательство. Рассмотрим $(x, y) \in O_{\mathbb{S}}((a, b))$, $(x, y) = k_1(c, d) + k_2(d, -c) + k_3(ad, ac) + k_4(ac, -ad)$. Тогда

$$(ax, ay) = k_1(ac, ad) + k_2(ad, -ac) - k_3(d, c) - k_4(c, -d).$$

Согласно замечанию 3.10, $(x, y)(ax, ay) = 0$. Кроме того, из рисунка 1 следует, что $(a, b), (b, -a) \in O_{\mathbb{S}}((x, y))$ и $(b, a), (a, -b) \in O_{\mathbb{S}}((ax, ay))$. Тогда для любых $k_5, k_6 \in \mathbb{R}$ таких, что последний элемент пути отличен от нуля, существуют следующие пути длины не превосходящей 3:

- $(a, b) \longleftrightarrow (x, y) \longleftrightarrow k_5(a, b) + k_6(b, -a)$;
- $(a, b) \longleftrightarrow (x, y) \longleftrightarrow (ax, ay) + k_5(a, b) + k_6(b, -a)$;
- $(a, b) \longleftrightarrow (x, y) \longleftrightarrow (ax, ay) \longleftrightarrow k_5(b, a) + k_6(a, -b)$;
- $(a, b) \longleftrightarrow (x, y) \longleftrightarrow (ax, ay) \longleftrightarrow (x, y) + k_5(b, a) + k_6(a, -b)$.

Отсюда мы сразу получаем утверждение леммы. \square

Лемма 4.9. Пусть $(x, y) \in Z(\mathbb{S})$ таков, что $xy \in \text{Lin}(ab)$. Тогда $(x, y) \in \Lambda_{(a,b)}$.

Доказательство. Согласно предложению 4.1, $1, a, b, c, d, ab, ac, ad$ образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Без ограничения общности можно считать, что $n(x) = n(y) = 1$. Аналогично, $1, x, y, xy$ образуют ортонормированную систему, поэтому $xy = \pm ab$ и $x, y \in \text{Lin}(a, b, c, d, ac, ad)$. Тогда, если мы зафиксируем $x \in \text{Lin}(a, b, c, d, ac, ad)$, $n(x) = 1$, вторая компонента $y = (\bar{x}x)y = -x(xy) = \mp x(ab)$ определена с точностью до знака. Следовательно, $(x, y) \in \Lambda_{(a,b)}$. \square

Следствие 4.10. Пусть C обозначает компоненту связности $\Gamma_O(\mathbb{S})$, содержащую (a, b) . Тогда множество вершин C совпадает с $P(\Lambda_{(a,b)})$.

Доказательство. Включение справа налево доказано в лемме 4.8. Пусть теперь $(x, y) \in C$. По следствию 4.4, $xy \in \text{Lin}(ab)$. Тогда из леммы 4.9 следует, что $(x, y) \in \Lambda_{(a,b)}$. \square

Теорема 4.11. *Диаметр каждой компоненты связности $\Gamma_O(\mathbb{S})$ равен 3.*

Доказательство. Пусть $(a, b) \in Z(\mathbb{S})$. Тогда существует такое $(c, d) \in Z(\mathbb{S})$, что $(a, b)(c, d) = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$. Обозначим компоненту связности $\Gamma_O(\mathbb{S})$, содержащую (a, b) и (c, d) , за C . По следствию 4.10, множество вершин C совпадает с $P(\Lambda_{(a,b)})$. Более того, согласно лемме 4.8, $\Lambda_{(a,b)}$ лежит на расстоянии не больше 3 от (a, b) в $\Gamma_O(\mathbb{S})$.

Заметим, что из теоремы 3.9(4) следует, что $O_{\mathbb{S}}((a, b)) \cap O_{\mathbb{S}}((b, a)) = 0$, поэтому $d((a, b), (b, a)) = 3$.

Поскольку элемент (a, b) был выбран произвольным образом, диаметр каждой компоненты связности равен 3. \square

Лемма 4.12 ([2, предложение 12.1]). *Пусть $a, b \in \mathbb{O}$, $(a, b) \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$. Тогда $(a, b) \in Z(\mathbb{S})$, если и только если выполнены следующие условия:*

- (1) $n(a) = n(b)$;
- (2) $1, a, b$ ортогональны относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Лемма 4.13 ([15, лемма 1.3], [8, лемма 4.2, лемма 4.8]).

- (1) Пусть $a, b, c \in \mathcal{A}_n$. Тогда $\langle a, bc \rangle = \langle a\bar{c}, b \rangle = \langle \bar{b}a, c \rangle$.
- (2) Пусть $a, b \in \mathcal{A}_n$, a альтернирует с элементом b . Тогда $n(ab) = n(ba) = n(a)n(b)$.

Обозначение 4.14. Пусть Γ – неориентированный граф. Тогда $\mathcal{C}(\Gamma)$ – множество компонент связности Γ .

Теорема 4.15. *Пусть $P(\text{Im}(\mathbb{O}))$ обозначает множество всех одномерных подпространств в $\text{Im}(\mathbb{O})$. Тогда существует корректно определённая биекция $\psi : \mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S})) \rightarrow P(\text{Im}(\mathbb{O}))$, действующая следующим образом. Если $C \in \mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S}))$ и $(a, b) \in C$, то $\psi(C) = \text{Lin}(ab)$.*

Доказательство.

- ψ корректно определено по следствию 4.4.
- ψ инъективно по лемме 4.9.
- ψ сюръективно. Рассмотрим прямую $X \in P(\text{Im}(\mathbb{O}))$. Тогда $X = \text{Lin}(x)$ для некоторого $x \in \text{Im}(\mathbb{O})$, $n(x) = 1$. Пусть теперь $a \perp$

$\text{Lin}(1, x)$, $n(a) = 1$, $b = \bar{a}x$. Тогда $ab = a(\bar{a}x) = (a\bar{a})x = x$.

Согласно лемме 4.12, $(a, b) \in Z(\mathbb{S})$:

(1) по лемме 4.13(2), $n(b) = n(\bar{a})n(x) = n(a)$;

(2) из леммы 4.13(1) следует, что $\langle 1, b \rangle = \langle a, x \rangle = 0$, $\langle a, b \rangle = \langle a^2, x \rangle = -\langle 1, x \rangle = 0$, поэтому $1, a, b$ ортогональны.

Пусть теперь $C \in \mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S}))$ такова, что $(a, b) \in C$. Тогда $\psi(C) = X$.

□

Следствие 4.16. Пусть $\phi \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$ порождает автоморфизм $\widehat{\phi} \in \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{S})$ по формуле $\widehat{\phi}((x, y)) = (\phi(x), \phi(y))$ для всех $(x, y) \in \mathbb{S}$. Тогда $\widehat{\phi}$ действует естественным образом на $\mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S}))$, причём $\psi \circ \widehat{\phi} = \phi \circ \psi$.

Доказательство. Заметим, что $\widehat{\phi}$ сохраняет пары ортогональных элементов и, следовательно, отображает компоненты связности $\Gamma_O(\mathbb{S})$ в компоненты связности. Пусть $C \in \mathcal{C}(\Gamma_O(\mathbb{S}))$, $(a, b) \in C$. Тогда

$$(\phi(a), \phi(b)) = \widehat{\phi}((a, b)) \in \widehat{\phi}(C),$$

поэтому $\psi(\widehat{\phi}(C)) = \text{Lin}(\phi(a)\phi(b)) = \text{Lin}(\phi(ab)) = \phi(\text{Lin}(ab)) = \phi(\psi(C))$.

□

4.3. Подграф $\Gamma_O(\mathbb{S})$ на элементах вида $[(e_i, \pm e_j)]$.

Обозначение 4.17. Нам понадобятся следующие подмножества $Z(\mathbb{S})$:

$$Z_e = \{(e_i, \pm e_j) \in Z(\mathbb{S})\},$$

$$Z_e^+ = \{(e_i, e_j) \in Z(\mathbb{S})\},$$

$$Z_e^- = \{(e_i, -e_j) \in Z(\mathbb{S})\}.$$

Обозначим через $\Gamma_e(\mathbb{S})$ подграф $\Gamma_O(\mathbb{S})$ на множестве вершин $P(Z_e)$.

Описание 4.18. $\Gamma_e(\mathbb{S})$ изображён на рисунке 2 на основе результатов, полученных в [5] и [11].

$\Gamma_e(\mathbb{S})$ несвязен и состоит из 7 двойных шестиугольников. Для удобства мы будем считать, что внешние элементы принадлежат Z_e^+ , а внутренние – Z_e^- . Пронумеруем двойные шестиугольники на рисунке 2 от 1 до 7 слева направо и сверху вниз. Будем обозначать k -ый двойной шестиугольник как H_k .

Предложение 4.19. Перечислим основные свойства $\Gamma_e(\mathbb{S})$:

(1) $(e_i, \pm e_j) \in Z(\mathbb{S})$, если и только если $i \neq j$.

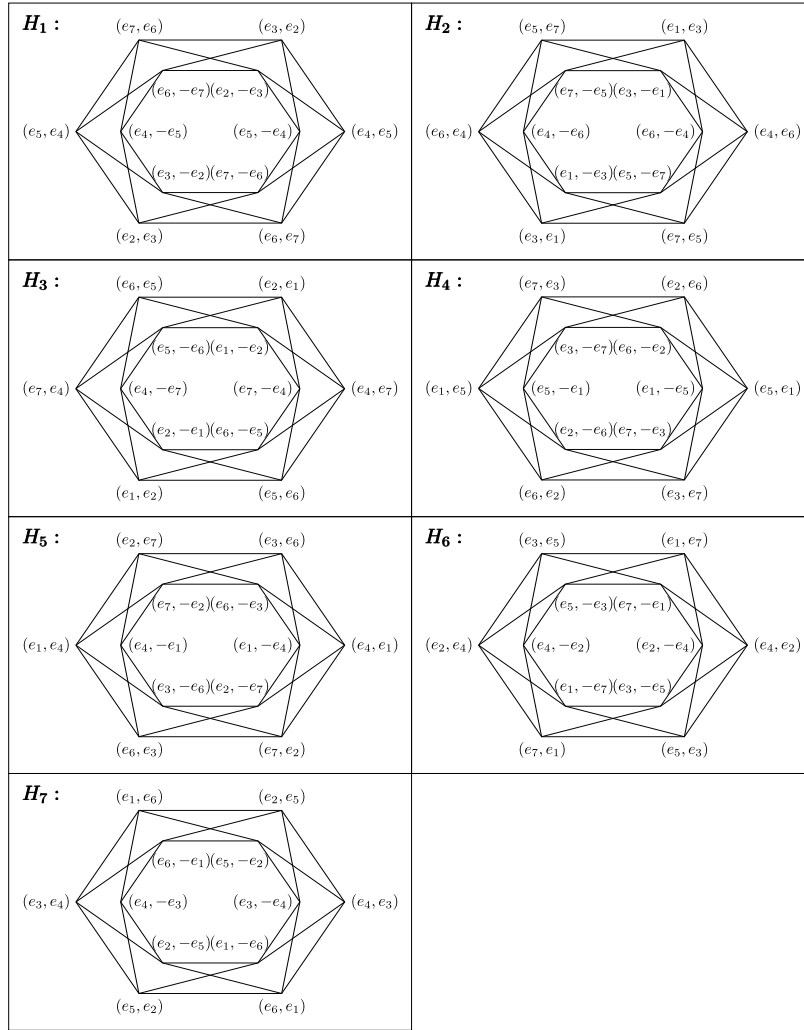


Рис. 2. Подграф $\Gamma_O(\mathbb{S})$ на элементах вида $[(e_i, \pm e_j)]$.

- (2) $(e_i, e_j)(e_k, e_l) = 0$, если и только если $(e_i, -e_j)(e_k, -e_l) = 0$, $(e_i, e_j)(e_k, -e_l) = 0$, если и только если $(e_i, -e_j)(e_k, e_l) = 0$.

- (3) Для всех $k \in \{1, \dots, 7\}$ подграф H_k – это в действительности двойной шестиугольник с рисунка 1, упорядоченный так, чтобы внешние элементы принадлежали Z_e^+ , а внутренние – Z_e^- .
- (4) Каждый двойной угол двойного шестиугольника содержит пару элементов (e_i, e_j) и $(e_j, -e_i)$. Противоположный двойной угол содержит элементы (e_j, e_i) и $(e_i, -e_j)$.
- (5) Пусть $(e_i, \pm e_j) \in H_k$. Тогда $e_i e_j = \pm e_k$.

Доказательство.

- (1) следует из леммы 4.12.
- (2) сразу следует из теоремы 3.9.
- (3) нетрудно проверить непосредственными вычислениями.
- (4) следует из структуры двойного шестиугольника на рисунке 1.
- (5) Пусть (e_i, e_j) – произвольный элемент в H_k . Тогда, по теореме 4.15, для любого $(e_l, e_m) \in H_k$ выполнено $e_l e_m \in \text{Lin}^*(e_i e_j)$. Значит, $e_l e_m = \pm e_i e_j$. Перенумерацией двойных шестиугольников нетрудно добиться равенства $e_i e_j = \pm e_k$ для всех $(e_i, \pm e_j) \in H_k$. \square

Предложение 4.20. Разные компоненты связности $\Gamma_e(\mathbb{S})$ содержатся в разных компонентах связности $\Gamma_O(\mathbb{S})$.

Доказательство. Непосредственно следует из теоремы 4.15 и предложения 4.19(5). \square

§5. ТАБЛИЦА УМНОЖЕНИЯ ВЕРШИН ДВОЙНОГО ШЕСТИУГОЛЬНИКА

Лемма 5.1. Пусть элементы $1, x, y$ образуют ортонормированную систему в \mathbb{O} . Тогда в \mathbb{S} выполнены соотношения

$$\begin{aligned} (x, y)(0, xy) &= -(x, -y), \\ (x, y)(xy, 0) &= -(y, x). \end{aligned}$$

Доказательство. По лемме 2.10, элементы x и y антикоммутируют. Поскольку x и y чисто мнимые, имеем

$$x^2 = -n(x) = -1 \quad \text{и} \quad y^2 = -n(y) = -1.$$

Тогда из альтернативности \mathbb{O} мы получаем

$$\begin{aligned} (x, y)(0, xy) &= (-\overline{(xy)}y, (xy)x) = ((xy)y, -(yx)x) = (x(yu), -y(xx)) = -(x, -y), \\ (x, y)(xy, 0) &= (x(xy), y\overline{(xy)}) = (x(xy), y(yx)) = ((xx)y, (yu)x) = -(x, y). \quad \square \end{aligned}$$

Пусть $(a, b), (c, d) \in Z(\mathbb{S})$, $(a, b)(c, d) = 0$, $n(a)=n(b)=n(c)=n(d)=1$. Тогда $(a, b), (c, d)$ удовлетворяют условиям теоремы 3.9, поэтому рисунок 1 изображает двойной шестиугольник в $\Gamma_O(\mathbb{S})$, содержащий (a, b) и (c, d) . Вершины этого шестиугольника можно дополнить до базиса в \mathbb{S} , имеющего удобную таблицу умножения.

Теорема 5.2. Пусть

$$\begin{aligned} f_0 &= (1, 0), & f_4 &= (ac, -ad), & \widetilde{f}_0 &= (0, 1), & \widetilde{f}_4 &= (ad, ac), \\ f_1 &= (a, b), & f_5 &= (c, d), & \widetilde{f}_1 &= (-b, a), & \widetilde{f}_5 &= (-d, c), \\ f_2 &= (c, -d), & f_6 &= (a, -b), & \widetilde{f}_2 &= (d, c), & \widetilde{f}_6 &= (b, a), \\ f_3 &= (ac, ad), & f_7 &= (0, ab), & \widetilde{f}_3 &= (-ad, ac), & \widetilde{f}_7 &= (-ab, 0). \end{aligned}$$

Тогда $F = \{f_m, \widetilde{f}_m \mid m = 0, \dots, 7\}$ – базис в \mathbb{S} , ортогональный относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Его таблица умножения описывается таблицей 2.

Доказательство. Легко видеть, что $f_0 = e_0$ и $\widetilde{f}_0 = e_8$ в терминах стандартного базиса \mathbb{S} . Согласно предложению 4.1, элементы $1, a, b, c, d, ab, ac, ad$ образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Следовательно, F – ортогональная система в \mathbb{S} . По лемме 2.10, элементы $F \setminus \{f_0\}$ попарно антикоммутируют.

Как следует из [15, с. 13], для любого $(x, y) \in \widetilde{\mathbb{S}}$ выполнено $(x, y)\widetilde{f}_0 = (x, y)(0, 1) = (-y, x)$. Следовательно, $f_m\widetilde{f}_0 = \widetilde{f}_m$ и $\widetilde{f}_m\widetilde{f}_0 = -f_m$ для всех $m = 0, \dots, 7$.

Поскольку $(a, b)(c, d) = 0$ и $(c, d)(ac, ad) = 0$, из леммы 4.2 следует, что $ab = -cd = (ac)(ad)$. Элементы a, b, c, d, ac, ad попарно антикоммутируют, поэтому

$$ab = -ba = dc = -cd = (ac)(ad) = -(ad)(ac).$$

Тогда таблица умножения для $\{f_m, \widetilde{f}_m \mid m = 0, \dots, 6\}$ следует из [20, теорема 4.11]. Затем мы добавляем столбцы и строки, соответствующие f_7 и \widetilde{f}_7 , используя лемму 5.1. \square

Замечание 5.3. По лемме 3.6, элементы f_m и $-\widetilde{f}_m$ принадлежат одному двойному углу двойного шестиугольника, $m = 1, \dots, 6$. Элемент f_m принадлежит внешнему шестиугольнику, а $-\widetilde{f}_m$ – внутреннему.

Элементы f_1, f_2 и f_3 лежат в углах внешнего шестиугольника через один, в то время как f_4, f_5 и f_6 лежат в остальных углах этого

шестиугольника. Каждая из пар элементов f_1 и f_6 , f_2 и f_5 , f_3 и f_4 соответствует паре противоположных вершин внешнего шестиугольника.

Таблица 2 имеет блочную структуру, а её (3×3) -блоки бывают двух видов. Часть из них антидиагональна, а остальные сходны с таблицей умножения базисных кватернионов. В целом, таблица 2 напоминает таблицу умножения для стандартного базиса \mathbb{S} , см. [5, с. 254]. Базис F был найден ранее в работе [13, с. 8], однако де Маре иначе упорядочивал элементы, поэтому его таблица умножения имеет другую структуру и состоит из блоков 4×4 .

Отметим также работу Чана и Джоковича [6], посвящённую классификации подалгебр в \mathbb{S} . Классом сопряжённости называется орбита относительно действия $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{S})$ на множестве всех подалгебр в \mathbb{S} . Изоморфизм двух подалгебр $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{S}$ будем обозначать как $S_1 \cong S_2$, а их сопряжённость – как $S_1 \sim S_2$. В [6] показано, что размерность произвольной подалгебры в \mathbb{S} может принимать значения 1, 2, 3, 4, 6 или 8. Кроме того, описаны классы сопряжённости для каждой из возможных размерностей. Выбирая представителей этих классов, Чан и Джокович определённо использовали некоторые соотношения между делителями нуля, установленные в таблице 2, однако они не выписывали саму таблицу в явном виде. Пусть

$$\begin{aligned} S_3 &= \text{Lin}((1, 0), (e_1, e_4), (e_2, e_7)), & \mathbb{O}_{i,j,e} &= \mathbb{H} + \mathbb{H}(0, 1), \\ S_4 &= \text{Lin}((1, 0), (e_1, e_2), (e_4, e_7), (e_5, -e_6)), & R_8 &= S_4 + S_4(0, 1), \\ S_6 &= S_3 + S_3(0, 1), & S_8 &= \mathbb{H} + \mathbb{H}(0, e_4). \end{aligned}$$

Чан и Джокович [6] показали, что:

- Любая 3-мерная подалгебра сопряжена с S_3 .
- Любая 4-мерная подалгебра либо изоморфна \mathbb{H} , либо сопряжена с S_4 .
- Любая 6-мерная подалгебра сопряжена с S_6 .
- Любая 8-мерная подалгебра сопряжена с одной из подалгебр \mathbb{O} , $\mathbb{O}_{i,j,e}$, R_8 или S_8 . Подалгебра S_8 единственная среди них не обладает делением. Алгебры \mathbb{O} и $\mathbb{O}_{i,j,e}$ изоморфны, а R_8 не изоморфна им.

Следующее предложение описывает некоторые подалгебры в \mathbb{S} , существование которых явно следует из таблицы 2. Мы также классифицируем их согласно результатам, полученным в [6].

Предложение 5.4. *Перечислим некоторые нетривиальные подалгебры в \mathbb{S} , содержащие f_1 :*

$$\begin{aligned} \dim = 3 : & \quad \text{Lin}(f_0, f_1, f_4) \sim S_3, \quad \text{Lin}(f_0, f_1, f_5) \sim S_3, \\ & \quad \text{Lin}(f_0, f_1, \widetilde{f_4}) \sim S_3, \quad \text{Lin}(f_0, f_1, \widetilde{f_5}) \sim S_3. \\ \dim = 4 : & \quad \text{Lin}(f_0, f_1, f_6, f_7) \cong \mathbb{H}, \quad \text{Lin}(f_0, f_1, \widetilde{f_0}, \widetilde{f_1}) \cong \mathbb{H}, \\ & \quad \text{Lin}(f_0, f_1, \widetilde{f_6}, \widetilde{f_7}) \cong \mathbb{H}, \quad \text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3) \sim S_4. \\ \dim = 6 : & \quad \text{Lin}(f_0, f_1, f_4, \widetilde{f_0}, \widetilde{f_1}, \widetilde{f_4}) \sim S_6, \\ & \quad \text{Lin}(f_0, f_1, f_5, \widetilde{f_0}, \widetilde{f_1}, \widetilde{f_5}) \sim S_6. \\ \dim = 8 : & \quad \text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) \sim S_8, \\ & \quad \text{Lin}(f_0, f_1, f_6, f_7, \widetilde{f_2}, \widetilde{f_3}, \widetilde{f_4}, \widetilde{f_5}) \sim S_8, \\ & \quad \text{Lin}(f_0, f_1, f_6, f_7, \widetilde{f_0}, \widetilde{f_1}, \widetilde{f_6}, \widetilde{f_7}) \sim \mathbb{O}_{i,j,e}, \\ & \quad \text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3, \widetilde{f_0}, \widetilde{f_1}, \widetilde{f_2}, \widetilde{f_3}) \sim R_8. \end{aligned}$$

Доказательство. Используя таблицу 2, нетрудно проверить, что эти линейные пространства замкнуты относительно умножения, поэтому они являются подалгебрами в \mathbb{S} .

Сопряжённость с подалгебрами S_3 и S_6 при $\dim = 3$ и $\dim = 6$ сразу следует из [6, теорема 8.1].

Изоморфизм между $\text{Lin}(f_0, f_1, f_6, f_7)$, $\text{Lin}(f_0, f_1, \widetilde{f_0}, \widetilde{f_1})$, $\text{Lin}(f_0, f_1, \widetilde{f_6}, \widetilde{f_7})$ и \mathbb{H} становится очевидным, если нормализовать элементы $f_1, f_6, \widetilde{f_1}, \widetilde{f_6}$, то есть поделить каждый из них на $\sqrt{2}$. Однако подалгебра $\text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3)$ не является ассоциативной, поэтому она не изоморфна \mathbb{H} , см. [6, с. 496]. Значит, $\text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3) \sim S_4$.

Поскольку $f_1 f_4 = f_1 \widetilde{f_4} = 0$, подпространства

$$\text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) \quad \text{и} \quad \text{Lin}(f_0, f_1, f_6, f_7, \widetilde{f_2}, \widetilde{f_3}, \widetilde{f_4}, \widetilde{f_5})$$

являются 8-мерными подалгебрами без деления. Таким образом, они сопряжены с S_8 .

Так как $\text{Lin}(f_0, f_1, f_6, f_7) \cong \mathbb{H}$, элементы f_1 и f_6 строго альтернируют в \mathbb{S} . Кроме того, $f_6 \perp \text{Lin}(f_0, f_1, \widetilde{f_0}, \widetilde{f_1})$. Следовательно, по [20, лемма 5.8], $\text{Lin}(f_0, f_1, f_6, f_7, \widetilde{f_0}, \widetilde{f_1}, \widetilde{f_6}, \widetilde{f_7})$ изоморфна \mathbb{O} . Множество $\{\pm \widetilde{f_0}\}$ инвариантно относительно $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{S})$, см. [7, лемма 2.1], причём $\widetilde{f_0} \notin \mathbb{O}$.

Таблица 2. Таблица умножения базисных элементов \mathfrak{S} , являющихся делителями нуля.

\times	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	\widetilde{f}_0	\widetilde{f}_1	\widetilde{f}_2	\widetilde{f}_3	\widetilde{f}_4	\widetilde{f}_5	\widetilde{f}_6	\widetilde{f}_7
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	\widetilde{f}_0	\widetilde{f}_1	\widetilde{f}_2	\widetilde{f}_3	\widetilde{f}_4	\widetilde{f}_5	\widetilde{f}_6	\widetilde{f}_7
f_1	f_1	$-2f_0$	$2f_3$	$-2f_2$	0	0	$2f_7$	$-f_6$	\widetilde{f}_1	$-2\widetilde{f}_0$	$-2\widetilde{f}_3$	$2\widetilde{f}_2$	0	0	$-2\widetilde{f}_7$	\widetilde{f}_6
f_2	f_2	$-2f_3$	$-2f_0$	$2f_1$	0	$2f_7$	0	$-f_5$	\widetilde{f}_2	$2\widetilde{f}_3$	$-2\widetilde{f}_0$	$-2\widetilde{f}_1$	0	$-2\widetilde{f}_7$	0	\widetilde{f}_5
f_3	f_3	$2f_2$	$-2f_1$	$-2f_0$	$2f_7$	0	0	$-f_4$	\widetilde{f}_3	$-2\widetilde{f}_2$	$2\widetilde{f}_1$	$-2\widetilde{f}_0$	$-2\widetilde{f}_7$	0	0	\widetilde{f}_4
f_4	f_4	0	0	$-2f_7$	$-2f_0$	$-2f_6$	$2f_5$	f_3	\widetilde{f}_4	0	0	$2\widetilde{f}_7$	$-2\widetilde{f}_0$	$2\widetilde{f}_6$	$-2\widetilde{f}_5$	$-f_3$
f_5	f_5	0	$-2f_7$	0	$2f_6$	$-2f_0$	$-2f_4$	f_2	\widetilde{f}_5	0	$2\widetilde{f}_7$	0	$-2\widetilde{f}_6$	$-2\widetilde{f}_0$	$2\widetilde{f}_4$	$-f_2$
f_6	f_6	$-2f_7$	0	0	$-2f_5$	$2f_4$	$-2f_0$	f_1	\widetilde{f}_6	$2\widetilde{f}_7$	0	0	$2\widetilde{f}_5$	$-2\widetilde{f}_4$	$-2\widetilde{f}_0$	$-f_1$
f_7	f_7	f_6	f_5	f_4	$-f_3$	$-f_2$	$-f_1$	$-f_0$	\widetilde{f}_7	$-f_6$	$-f_5$	$-f_4$	\widetilde{f}_3	\widetilde{f}_2	\widetilde{f}_1	$-f_0$
\widetilde{f}_0	\widetilde{f}_0	$-f_1$	$-f_2$	$-f_3$	$-f_4$	$-f_5$	$-f_6$	$-f_7$	$-f_0$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
\widetilde{f}_1	\widetilde{f}_1	$2\widetilde{f}_0$	$-2\widetilde{f}_3$	$2\widetilde{f}_2$	0	0	$-2\widetilde{f}_7$	\widetilde{f}_6	$-f_1$	$-2f_0$	$-2f_3$	$2f_2$	0	0	$-2f_7$	f_6
\widetilde{f}_2	\widetilde{f}_2	$2\widetilde{f}_3$	$2\widetilde{f}_0$	$-2\widetilde{f}_1$	0	$-2\widetilde{f}_7$	0	\widetilde{f}_5	$-f_2$	$2f_3$	$-2f_0$	$-2f_1$	0	$-2f_7$	0	f_5
\widetilde{f}_3	\widetilde{f}_3	$-2\widetilde{f}_2$	$2\widetilde{f}_1$	$2\widetilde{f}_0$	$-2\widetilde{f}_7$	0	0	\widetilde{f}_4	$-f_3$	$-2f_2$	$2f_1$	$-2f_0$	$-2f_7$	0	0	f_4
\widetilde{f}_4	\widetilde{f}_4	0	0	$2\widetilde{f}_7$	$2\widetilde{f}_0$	$2\widetilde{f}_6$	$-2\widetilde{f}_5$	$-f_3$	$-f_4$	0	0	$2f_7$	$-2f_0$	$2f_6$	$-2f_5$	$-f_3$
\widetilde{f}_5	\widetilde{f}_5	0	$2\widetilde{f}_7$	0	$-2\widetilde{f}_6$	$2\widetilde{f}_0$	$2\widetilde{f}_4$	$-f_2$	$-f_5$	0	$2f_7$	0	$-2f_6$	$-2f_0$	$2f_4$	$-f_2$
\widetilde{f}_6	\widetilde{f}_6	$2\widetilde{f}_7$	0	0	$2\widetilde{f}_5$	$-2\widetilde{f}_4$	$2\widetilde{f}_0$	$-f_1$	$-f_6$	$2f_7$	0	0	$2f_5$	$-2f_4$	$-2f_0$	$-f_1$
\widetilde{f}_7	\widetilde{f}_7	$-f_6$	$-f_5$	$-f_4$	f_3	f_2	f_1	f_0	$-f_7$	$-f_6$	$-f_5$	$-f_4$	f_3	f_2	f_1	$-f_0$

Значит, подалгебра $\text{Lin}(f_0, f_1, f_6, f_7, \widetilde{f_0}, \widetilde{f_1}, \widetilde{f_6}, \widetilde{f_7})$ не сопряжена с \mathbb{O} , поэтому она сопряжена с $\mathbb{O}_{i,j,e}$.

И наконец,

$$\text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3, \widetilde{f_0}, \widetilde{f_1}, \widetilde{f_2}, \widetilde{f_3}) = \text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3) + \text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3)(0, 1).$$

Мы знаем, что $\text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3) \sim S_4$, поэтому

$$\text{Lin}(f_0, f_1, f_2, f_3, \widetilde{f_0}, \widetilde{f_1}, \widetilde{f_2}, \widetilde{f_3}) \sim S_4 + S_4(0, 1) = R_8. \quad \square$$

Замечание 5.5. Поскольку $f_1 = (a, b)$ – произвольный делитель нуля в \mathbb{S} , предложение 5.4 описывает подалгебры, содержащие произвольный делитель нуля из \mathbb{S} .

§6. ГРАФ КОММУТАТИВНОСТИ АЛГЕБРЫ СЕДЕНИОНОВ

Лемма 6.1 ([18, с. 438]).

- (1) Если $n \leq 1$, то $C_{\mathcal{A}_n} = \mathcal{A}_n$, поэтому множество вершин $\Gamma_C(\mathcal{A}_n)$ пустое.
- (2) Если $n \geq 2$, то $C_{\mathcal{A}_n} = \mathbb{R}$, поэтому множество вершин $\Gamma_C(\mathcal{A}_n)$ совпадает с $P(\mathcal{A}_n \setminus \mathbb{R})$.

Лемма 6.2 ([9, лемма 8.11]). Пусть $x \in \mathcal{A}_n \setminus \{0\}$, $\text{Re}(x) = 0$.

- (1) Если $n(x) = 0$ и $n \leq 3$, то $C_{\mathcal{A}_n}(x) = \mathbb{R} \oplus O_{\mathcal{A}_n}(x)$.
- (2) Если $n(x) \neq 0$, то $C_{\mathcal{A}_n}(x) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x \oplus O_{\mathcal{A}_n}(x)$.

Следствие 6.3. Пусть $x \in \mathcal{M}_n \setminus \mathbb{R}$, $\text{Im}(x) \notin Z(\mathcal{M}_n)$. Тогда компонента связности $\Gamma_C(\mathcal{M}_n)$, содержащая x , – это полный граф на множестве вершин $P(x + \mathbb{R})$.

Доказательство. Из леммы 6.2 следует, что

$$C_{\mathcal{M}_n}(x) = C_{\mathcal{M}_n}(\text{Im}(x)) = \text{Lin}(1, \text{Im}(x)) = \text{Lin}(1, x).$$

Ясно, что $P(\text{Lin}(1, x) \setminus \mathbb{R}) = P(x + \mathbb{R})$. Отсюда мы сразу получаем требуемое утверждение. \square

Согласно следствию 6.3, естественно дать следующее определение.

Определение 6.4. Обозначим через $\mathbb{R} + Z(\mathbb{S})$ множество элементов из \mathbb{S} , мнимая часть которых является делителем нуля. $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$ – подграф $\Gamma_C(\mathbb{S})$ на множестве вершин $P(\mathbb{R} + Z(\mathbb{S}))$.

Лемма 6.5. Пусть $(a, b) \in Z(\mathbb{S})$, $z \in \mathbb{O}$. Тогда $(x, y) \in \text{Im}(C_{\mathbb{S}}((a, b)))$, такой что $xy = z$, существует, если и только если $z \perp \text{Lin}(1, a, b)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $(c, d) \in O_{\mathbb{S}}((a, b))$, $(c, d) \neq 0$, и предположим без ограничения общности, что $n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1$. По предложению 4.1, элементы $1, a, b, c, d, ab, ac, ad$ образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Из леммы 2.10 следует, что a, b, c, d, ab, ac, ad попарно антикоммутируют. Согласно лемме 4.2, $ac = bd = -db$, $ad = -bc = cb$, $ab = -cd = (ac)(ad)$, откуда мы получаем

$$\begin{aligned} a(ad) &= -d = -(ad)a, & c(ad) &= c(cb) = -b = -(ad)c, \\ a(ac) &= -c = -(ac)a, & c(ac) &= -c(ca) = a = -(ac)c, \\ b(ad) &= -b(bc) = c = -(ad)b, & d(ad) &= -d(da) = a = -(ad)d, \\ b(ac) &= b(bd) = -d = -(ac)b, & d(ac) &= -d(db) = b = -(ac)d. \end{aligned}$$

Из леммы 6.2 следует, что

$$\begin{aligned} \text{Im}(C_{\mathbb{S}}((a, b))) &= \mathbb{R}(a, b) \oplus O_{\mathbb{S}}((a, b)) \\ &= \text{Lin}((a, b), (c, d), (d, -c), (ad, ac), (ac, -ad)). \end{aligned}$$

Рассмотрим $(x, y) \in \text{Im}(C_{\mathbb{S}}((a, b)))$, $(x, y) = k_0(a, b) + k_1(c, d) + k_2(d, -c) + k_3(ad, ac) + k_4(ac, -ad)$. Тогда

$$\begin{aligned} x &= k_0a + k_1c + k_2d + k_3ad + k_4ac, \\ y &= k_0b - k_2c + k_1d - k_4ad + k_3ac, \\ xy &= 2k_0(k_1ad - k_2ac - k_3c + k_4d) - (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 - k_0^2)ab. \end{aligned}$$

Ясно, что $xy \perp \text{Lin}(1, a, b)$. Кроме того, для любого $z \perp \text{Lin}(1, a, b)$ мы можем выбрать такие k_j , $j = 0, \dots, 5$, что $xy = z$. Пусть $z = l_1ad - l_2ac - l_3c + l_4d - l_0ab$, $n(z) = l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2$. Поскольку $n(xy) = n(x)n(y) = (k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)^2$, нам нужно $k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = \sqrt{n(z)}$ и $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 - k_0^2 = l_0$. Следовательно, $k_0^2 = \frac{\sqrt{n(z)} - l_0}{2}$. Заметим, что $l_0 \leq \sqrt{n(z)}$, поэтому мы можем взять $k_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{n(z)} - l_0}{2}}$. Рассмотрим два случая:

- Если $l_0 = \sqrt{n(z)}$, то $k_0 = 0$. Кроме того, $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 0$. Тогда мы можем взять любые k_1, k_2, k_3, k_4 , удовлетворяющие условию $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = \sqrt{n(z)} = l_0$.

- Если $l_0 < \sqrt{n(z)}$, то $k_0 > 0$. Положим $k_j = \frac{l_j}{2k_0}$, $j = 1, \dots, 4$. Тогда

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = \frac{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2}{4k_0^2} = \frac{n(z) - l_0^2}{4k_0^2}.$$

Мы получаем

$$\begin{aligned} k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 - k_0^2 &= \frac{n(z) - l_0^2 - 4k_0^4}{4k_0^2} \\ &= \frac{n(z) - l_0^2 - (\sqrt{n(z)} - l_0)^2}{2(\sqrt{n(z)} - l_0)} = \frac{2l_0(\sqrt{n(z)} - l_0)}{2(\sqrt{n(z)} - l_0)} = l_0. \quad \square \end{aligned}$$

Предложение 6.6. *Граф $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$ связан, и его диаметр не превосходит 4.*

Доказательство. Пусть $(a, b), (a', b') \in Z(\mathbb{S})$. Рассмотрим произвольный элемент $z \perp \text{Lin}(1, a, b, a', b')$, $z \neq 0$. По лемме 6.5, существуют такие $(c, d) \in \text{Im}(C_{\mathbb{S}}((a, b)))$ и $(c', d') \in \text{Im}(C_{\mathbb{S}}((a', b')))$, что $cd = c'd' = z$. Согласно следствию 6.3, $(c, d), (c', d') \in Z(\mathbb{S})$. По теореме 4.15, (c, d) и (c', d') принадлежат одной компоненте связности $\Gamma_O(\mathbb{S})$. Из теоремы 4.11 следует, что $d_{\Gamma_O(\mathbb{S})}((c, d), (c', d')) \leq 3$. Однако, по следствию 4.4, любой путь между (c, d) и (c', d') должен иметь чётную длину. Следовательно, $d_{\Gamma_O(\mathbb{S})}((c, d), (c', d')) \leq 2$. Любой путь в $\Gamma_O(\mathbb{S})$ является также путём в $\Gamma_C(\mathbb{S})$, поэтому $d_{\Gamma_C(\mathbb{S})}((c, d), (c', d')) \leq 2$. Значит, $d_{\Gamma_C(\mathbb{S})}((a, b), (a', b')) \leq 4$. \square

Предложение 6.7. *Диаметр $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$ не меньше 3.*

Доказательство. Рассмотрим

$$(a, b), (c, d) \in Z(\mathbb{S}), \quad (a, b)(c, d) = 0, \quad n(a) = n(b) = n(c) = n(d) = 1.$$

Из рисунка 1 следует, что

$$\begin{aligned} O_{\mathbb{S}}((a, b)) &= \text{Lin}((c, d), (d, -c), (ad, ac), (ac, -ad)), \\ O_{\mathbb{S}}((b, a)) &= \text{Lin}((d, c), (c, -d), (ac, ad), (ad, -ac)). \end{aligned}$$

По лемме 6.2,

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{S}}((a, b)) &= \text{Lin}(1, (a, b)) \oplus O_{\mathbb{S}}((a, b)) \\ &= \text{Lin}(1, (a, b), (c, d), (d, -c), (ad, ac), (ac, -ad)), \\ C_{\mathbb{S}}((b, a)) &= \text{Lin}(1, (b, a)) \oplus O_{\mathbb{S}}((b, a)) \\ &= \text{Lin}(1, (b, a), (d, c), (c, -d), (ac, ad), (ad, -ac)). \end{aligned}$$

Тогда, по теореме 3.9(4), $C_{\mathbb{S}}((a, b)) \cap C_{\mathbb{S}}((b, a)) = \mathbb{R}$, поэтому $d_{\Gamma_C(\mathbb{S})}((a, b), (b, a)) \geq 3$. \square

Мы рассмотрели множество примеров с использованием Wolfram Mathematica, и во всех случаях оказалось возможным найти путь длины 3 между двумя делителями нуля. Это приводит нас к следующей гипотезе.

Гипотеза 6.8. Диаметр $\Gamma_C^Z(\mathbb{S})$ равен 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. C. Baez, *The Octonions*. — Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **39** (2002), 145–205.
2. D. K. Biss, D. Dugger, D. C. Isaksen, *Large annihilators in Cayley–Dickson algebras*. — Comm. Algebra **36**, No. 2 (2008), 632–664.
3. D. K. Biss, D. Dugger, D. C. Isaksen, *Large annihilators in Cayley–Dickson algebras II*. — Bol. Soc. Mat. Mex. **13**, No. 2 (2007), 269–292.
4. H. C. Brown, *Structure of zero divisors, and other algebraic structures, in higher dimensional real Cayley–Dickson algebras*. — Doct. Diss. (1972), 2088.
5. R. E. Cawagas, *On the structure and zero divisors of the Cayley–Dickson sedenion algebra*. — Disc. Math. General Algebra Appl. **24** (2004), 251–265.
6. K.-C. Chan, D. Ž. Đoković, *Conjugacy classes of subalgebras of the real sedenions*. — Canad. Math. Bull. **49** (2006), 492–507.
7. P. Eakin, A. Sathaye, *On automorphisms and derivations of Cayley–Dickson algebras*. — J. Algebra **129**, No. 2 (1990), 263–278.
8. А. Э. Гутерман, С. А. Жилина, *Контр-алгебры Кэли–Диксона: дважды альтернативные делители нуля и графы отношений*. — Фунд. прикл. матем., принята к публикации (2020).
9. А. Э. Гутерман, С. А. Жилина, *Графы отношений вещественных алгебр Кэли–Диксона*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 44–75.
10. S. H. Khalil, P. Yiu, *The Cayley–Dickson algebras, a theorem of A. Hurwitz, and quaternions*. — Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform. **24** (1997), 117–169.
11. R. P. C. de Marrais, *The 42 assessors and the box-kites they fly: diagonal axis-pair systems of zero-divisors in the sedenions’16 dimensions*. arXiv:math/0011260 (2000).
12. R. P. C. de Marrais, *Flying higher than a box-kite: kite-chain middens, sand mandalas, and zero-divisor patterns in the 2ⁿ-ions beyond the sedenions*. arXiv:math/0207003 (2002).
13. R. P. C. de Marrais, *Box-kites III: Quizzical quaternions, mock octonions, and other zero-divisor-suppressing “sleeping cell” structures in the sedenions and 2ⁿ-ions*. arXiv:math/0403113 (2004).
14. K. McCrimmon, *A Taste of Jordan Algebras*. Springer-Verlag, New York, 2004.
15. G. Moreno, *The zero divisors of the Cayley–Dickson algebras over the real numbers*. — Bol. Soc. Mat. Mex. (tercera serie) **4**, No. 1 (1998), 13–28.

16. G. Moreno, *Alternative elements in the Cayley–Dickson algebras*. — Topics in Mathematical Physics, General Relativity and Cosmology in Honor of Jerzy Plski, World Sci. Publ., Hackensack, New Jersey (2006), 333–346.
17. G. Moreno, *Constructing zero divisors in the higher dimensional Cayley–Dickson algebras*. [arXiv:math/0512517](https://arxiv.org/abs/math/0512517) (2005).
18. R. D. Schafer, *On the algebras formed by the Cayley–Dickson process*. — Amer. J. Math. **76**, No. 2 (1954), 435–446.
19. С. А. Жилина, *Графы отношений алгебры контрседенионов*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **482** (2019), 87–113.
20. S. A. Zhilina, *Orthogonality graphs of real Cayley–Dickson algebras. Part I: Doubly alternative zero divisors and their hexagons*. — Int. J. Algebra Comput., in press.

Guterman A. E. Zhilina S. A. Relation graphs of the sedenion algebra.

Let \mathbb{S} denote the algebra of sedenions and let $\Gamma_O(\mathbb{S})$ denote its orthogonality graph. We observe that any pair of zero divisors in \mathbb{S} produces a double hexagon in $\Gamma_O(\mathbb{S})$. The set of vertices of a double hexagon can be extended to a basis of \mathbb{S} that has a convenient multiplication table. We explicitly describe the set of vertices of an arbitrary connected component of $\Gamma_O(\mathbb{S})$ and find its diameter. Then we establish a bijection between the connected components of $\Gamma_O(\mathbb{S})$ and the lines in the imaginary part of the octonions. Finally, we consider the commutativity graph of the sedenions and discover that all elements whose imaginary parts are zero divisors belong to the same connected component, and its diameter lies in between 3 and 4.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия
Московский Центр фундаментальной
и прикладной математики, Москва,
119991, Россия
Московский физико-технический институт,
Долгопрудный, 141701, Россия
E-mail: guterman@list.ru

Поступило 1 октября 2020 г.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия
Московский Центр фундаментальной
и прикладной математики, Москва, 119991 Россия
E-mail: s.a.zhilina@gmail.com