Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 496, 2020 г.

А. Э. Гутерман, М. А. Даффнер, И. А. Спиридонов

ЛИНЕЙНЫЕ КОНВЕРТЕРЫ ИММАНАНТОВ НА ПРОСТРАНСТВЕ КОСОСИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ ПОРЯДКА 4

§1. Введение

Обозначим через $\mathbb{C}$ поле комплексных чисел, через S_n – группу перестановок множества $\{1, \ldots, n\}$, через $M_n(\mathbb{C})$ – пространство всех $n \times n$-матриц над полем $\mathbb{C}$, а через $Q_n \subseteq M_n(\mathbb{C})$ – пространство всех кососимметрических матриц над $\mathbb{C}$, т.е.

$$Q_n = \{A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}) | a_{ij} = -a_{ji},\ \text{если } i < j,\ a_{ii} = 0\}.$$

Через $|X|$ будем обозначать мощность множества X.

Через I_n мы будем обозначать единичную $n \times n$-матрицу. Как обычно, A^T обозначает транспонированную матрицу к матрице A. Заметим, что A над $\mathbb{C}$ является кососимметрической тогда и только тогда, когда $A^T = -A$.

Обозначим через (E_{ij}) стандартный базис пространства $M_n(\mathbb{C})$, где (i, j)-ый элемент матрицы E_{ij} равен 1, а остальные элементы равны нулю. Положим $U_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$ при $i < j$. Очевидно, что матрицы $(U_{ij})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ образуют базис пространства Q_n.

Для каждой перестановки $\sigma \in S_n$ через $P(\sigma) = (p_{ij})$ мы обозначим матрицу перестановки σ, т.е.

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = \sigma^{-1}(i); \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ключевые слова: определитель, перманент, имманант, линейные отображения, кососимметрические матрицы.

Исследования второго автора выполнены при поддержке группы по линейным, алгебраическим и комбинаторным структурам центра функционального анализа, линейных структур и приложений (Университет Лиссабона, Португалия), а также были частично поддержаны Португальским научным фондом по стратегическому проекту UID/MAT/04721/2013. Работа третьего автора выполнена при поддержке Лаборатории зеркальной симметрии НИУ ВШЭ, грант Правительства РФ, Договор № 14.641.31.0001.

Пусть $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$. Определение функции перманента

$$\operatorname{per} A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

очень близко к определению функции определителя

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

В обоих случаях суммирование ведется по всем перестановкам $\sigma \in S_n$. Число $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$ обозначает знак перестановки σ, т.е. $\varepsilon(\sigma) = 1$, если σ является четной перестановкой, и $\varepsilon(\sigma) = -1$, если σ является нечетной перестановкой.

Пусть $\chi\colon S_n \to \mathbb{C}$ – характер S_n. Везде в данной работе характеры предполагаются неприводимыми, т.е. мы рассматриваем только характеры неприводимых комплексных представлений. Следующее определение обобщает и объединяет функции определителя и перманента.

Определение 1.1. Пусть $\chi\colon S_n \to \mathbb{C}$ – неприводимый характер S_n. Имманант, ассоциированный с χ, – это функция $d_\chi\colon M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, определенная по формуле

$$d_\chi(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \chi(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

для всех $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$.

Легко видеть, что если $\chi = \epsilon$ – знакопеременный характер S_n, то d_χ является определителем, а если $\chi = 1$ – тривиальный характер S_n, то d_χ совпадает с перманентом.

Заметим, что для имманантов кососимметрических матриц у нас есть более удобные формулы.

Определение 1.2. Пусть n четно. Обозначим через P_n множество тех перестановок из S_n, в разложении которых в произведение независимых циклов присутствуют только циклы четной длины.

Предложение 1.3. *Пусть $A \in Q_n$, и χ – неприводимый характер S_n. Тогда*

$$d_\chi(A) = \sum_{\sigma \in P_n} \chi(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}. \tag{1.1}$$

Доказательство. Для перестановки $\tau \in S_n \setminus P_n$ обозначим через $\tau = c_1 \cdots c_k$ ее разложение в произведение независимых циклов. Не нарушая общности, мы можем считать, что цикл c_1 имеет минимальную длину и содержит минимальный элемент из $\{1, \ldots, n\}$ среди всех циклов нечетной длины. Определим отображение $j : S_n \setminus P_n \to S_n \setminus P_n$ по формуле $j(\tau) = c_1^{-1} c_2 \cdots c_k$. Тогда $j^2 = id$, поэтому j является инволюцией на множестве $S_n \setminus P_n$. Следовательно, j – биекция. Заметим, что слагаемые в d_χ, соответствующие перестановкам τ и $j(\tau)$, имеют одинаковые абсолютные значения и противоположные знаки. Действительно, $\chi(\tau) = \chi(j(\tau))$, так как они по определению имеют одинаковые цикловые типы. Запишем цикл c_1 в виде $c_1 = (i_1, \ldots, i_k)$. Тогда слагаемые в $d_\chi(A)$, соответствующие τ и $j(\tau)$, отличаются первыми k множителями. А именно, $a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_k i_1}$ для τ и $a_{i_1 i_k} \cdots a_{i_2 i_1}$ для $j(\tau)$. Поскольку A является кососимметрической и k нечетно, они отличаются знаками. Поэтому вклад всех перестановок из $S_n \setminus P_n$ равен нулю. ☐

Определение 1.4. Пусть $V \subseteq M_n(\mathbb{C})$ – произвольное подпространство. Мы говорим, что линейное отображение $T \colon M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ конвертирует имманант d_χ в имманант $d_{\chi'}$ на пространстве V, если $d_{\chi'}(T(X)) = d_\chi(X)$ для всех $X \in V$. В случае $\chi = \chi'$ мы говорим, что такое отображение сохранят имманант d_χ.

Теория линейных операторов, отображающих заданные подмножества матриц в себя, активно изучалась более ста лет, см. [20, 25], начиная с работы Фробениуса [18], где были охарактеризованы линейные отображения, сохраняющие определитель, т.е. такие линейные отображение T, что $\det(T(A)) = \det(A)$ для всех $A \in M_n(\mathbb{C})$. В частности, линейные отображения, сохраняющие имманаты на пространстве $M_n(\mathbb{C})$, были полностью охарактеризованы ранее [1, 3, 14, 21].

Со времени работы Полиа [26] параллельно изучался вопрос конвертации перманента в определитель, см. [13, 24] для более подробного описания.

Потом многие подобные результаты были получены для разных подпространств $M_n(\mathbb{C})$. Например, пространство симметрических матриц было рассмотрено в [4, 6, 9–11, 16, 21].

Отображения на пространстве кососимметрических матриц, сохраняющие имманаты, также изучались. В [5] Као и Танг классифицировали линейные эндоморфизмы Q_n, сохраняющие определитель.

В [8] Куэльо и Даффнер охарактеризовали линейные отображения, сохраняющие имманант d_χ на пространстве Q_n, кроме случаев $\chi \in \{1, \epsilon, [n-1,1], [2, 1^{n-2}]\}$.

В следующей таблице мы приводим подробное описание результатов в этой области. Через $S_n(\mathbb{C})$ мы обозначаем пространство симметрических $n \times n$-матриц. Заметим, что если n нечетное, то для любой матрицы $A \in Q_n$ автоматически выполнено $d_\chi(A) = 0$, и поэтому любое отображение $T : Q_n \to Q_n$ удовлетворяет соотношению $d_{\chi'}(T(A)) = d_\chi(A)$

G. Frobenius, [18], 1897	$M_n(\mathbb{C})$	$n \geqslant 1$	Классификация линейных отображений $T\colon M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию $\det(T(A)) = \det(A)$.
M. Marcus, F. C. May, [22], 1962	$M_n(\mathbb{C})$	$n \geqslant 1$	Классификация линейных отображений $T\colon M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию $\mathrm{per}\,(T(A)) = \mathrm{per}\,(A)$.
M. Marcus, H. Mink, [23], 1961	$M_n(\mathbb{C})$	$n \geqslant 3$	Отсутствие линейных отображений $T\colon M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию $\det(T(A)) = \mathrm{per}\,(A)$.
M. A. Duffner, [14], 1994	$M_n(\mathbb{C})$	$n \geqslant 3$	Классификация линейных отображений $T\colon M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию $d_\chi(T(A)) = d_\chi(A)$, где $\chi \notin \{1, \epsilon\}$.
M. P. Coelho, M. A. Duffner, [15], 1998	$M_n(\mathbb{C})$	$n \geqslant 3$	Отсутствие линейных отображений $T\colon M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию $d_{\chi'}(T(A)) = d_\chi(A)$, где $\chi \neq \chi'$.
B. Kuzma, [19], 2007	$M_n(\mathbb{F})$	$n \geqslant 3$	Любое отображение $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$, удовлетворяющее условию $d_\chi(A + \lambda B) = d_{\chi'}(T(A) + \lambda T(B))$, автоматически линейно и сюръективно.
C. Cao, X. Tang, [4], 2004	$S_n(\mathbb{C})$	$n \geqslant 1$	Классификация линейных отображений $T\colon S_n(\mathbb{C}) \to S_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию $\det(T(A)) = \det(A)$.
M. H. Lim, H. Ong, [21], 1978	$S_n(\mathbb{C})$	$n \geqslant 1$	Классификация линейных отображений $T\colon S_n(\mathbb{C}) \to S_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию $\mathrm{per}\,(T(A)) = \mathrm{per}\,(A)$.

M. P. Coelho, M. A. Duffner, [10], 1997	$S_n(\mathbb{C})$	$n \geqslant 3$	Классификация линейных отображений $T\colon S_n(\mathbb{C}) \to S_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию $d_\chi(T(A)) = d_\chi(A)$, где $\chi \notin \{1, \epsilon\}$.
M. P. Coelho, M. A. Duffner, [9], 2003	$S_n(\mathbb{C})$	$n \geqslant 3$	Отсутствие линейных отображений $T\colon S_n(\mathbb{C}) \to S_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию $d_{\chi'}(T(A)) = d_\chi(A)$, где $\chi \neq \chi'$.
C. Cao, X. Tang, [5], 2004	$Q_n(\mathbb{C})$	$n \geqslant 4$	Классификация линейных отображений $T\colon Q_n(\mathbb{C}) \to Q_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию $\det(T(A)) = \det(A)$.
M. Budrevich, M. A. Duffner, A. E. Guterman, [3], 2018	$Q_n(\mathbb{C})$	$n \geqslant 6$	Классификация линейных отображений $T\colon Q_n(\mathbb{C}) \to Q_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию $\mathrm{per}\,(T(A)) = \mathrm{per}\,(A)$.
M. Budrevich, M. A. Duffner, A. E. Guterman, [2], 2018	$Q_n(\mathbb{C})$	$n \geqslant 6$	Отсутствие линейных отображений $T\colon Q_n(\mathbb{C}) \to Q_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию $\det(T(A)) = \mathrm{per}\,(A)$.
M. P. Coelho, M. A. Duffner, [8], 2012	$Q_n(\mathbb{C})$	$n \geqslant 6$ или $n = 4$ и $\chi = [2, 2]$	Классификация линейных отображений $T\colon M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию $d_\chi(T(A)) = d_\chi(A)$, где $\chi \notin \{1, \epsilon\}$.
M. A. Duffner, A. E. Guterman, I. A. Spiridonov [17], 2020	$Q_n(\mathbb{C})$	$n \geqslant 6$	Отсутствие линейных отображений $T\colon Q_n(\mathbb{C}) \to Q_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию $d_\chi(A + \lambda B) = d_{\chi'}(T(A) + \lambda T(B))$, где χ и χ' не пропорциональны на P_n.

Из таблицы видно, что для пространств $M_n(\mathbb{C})$ и $S_n(\mathbb{C})$ существует полное описание отображений, конвертирующих или сохраняющих иммананты. Для пространства $Q_n(\mathbb{C})$ такое описание есть только в случае $n \geqslant 6$. Для $n = 4$ классифицированы только отображения, сохраняющие определитель или имманант $d_{[2,2]}$.

Основная цель настоящей работы заключается в том, чтобы получить полную классификацию отображений, сохраняющих или конвертирующих иммананты на пространстве $Q_4(\mathbb{C})$. Отметим, что идеи и методы доказательств настоящей работы существенно отличаются от случая $n \geqslant 6$.

Мы дадим полное описание линейных отображений $T\colon Q_4 \to Q_4$, сохраняющих перманент. Также мы докажем, что для $n = 4$ не существует линейных отображений, конвертирующих определитель в перманент. Более того, мы дадим полную классификацию линейных отображений, конвертирующих один имманант в другой при $n = 4$. Заметим, что существует всего 5 неприводимых характеров группы S_4, а именно, $\{1, \epsilon, [3,1], [2,1,1], [2,2]\}$.

Лемма 1.5. *Справедливы соотношения*

$$1|_{P_4} = -[3,1]|_{P_4} \ \text{ и } \ \epsilon|_{P_4} = -[2,1,1]|_{P_4}.$$

Доказательство. Формула

$$[3,1](\sigma) = (\text{число неподвижных точек перестановки } \sigma) - 1$$

справедлива для всех $\sigma \in S_4$. Перестановки из множества P_4 не имеют неподвижных точек, поэтому $[3,1]|_{P_4} = -1$. Следовательно, $1|_{P_4} = -[3,1]|_{P_4}$.

Так как разбиения $(2,1,1)$ и $(3,1)$ отличаются транспонированием, то $[2,1,1] = [3,1] \cdot \epsilon$. Следовательно, имеем

$$[2,1,1]|_{P_4} = [3,1]|_{P_4} \cdot \epsilon|_{P_4} = -\epsilon|_{P_4}. \qquad \square$$

Следствие 1.6. *Для всех $A \in Q_4$ справедливы соотношения*

$$d_{[3,1]}(A) = -\mathrm{per}\,(A) \ \text{ и } \ d_{[2,1,1]} = -\det(A).$$

Доказательство. Данное утверждение напрямую следует из предложения 1.3 и леммы 1.5. ☐

Следовательно, для изучения отображений, конвертирующих иммананты на пространстве Q_4, достаточно рассматривать только 3 характера, а именно, $\{1, \epsilon, [2,2]\}$. Мы докажем, что не существует линейных отображений $T\colon Q_4 \to Q_4$, удовлетворяющих соотношению $d_{\chi'}(T(A)) = d_\chi(A)$ для всех матриц $A \in Q_4$, где $\chi, \chi' \in \{1, \epsilon, [2,2]\}$ и $\chi \neq \chi'$.

Отметим, что для $n \geqslant 6$ общая задача существования линейных отображений $T\colon Q_n \to Q_n$, удовлетворяющих условию $d_{\chi'}(T(A)) = d_\chi(A)$ для всех матриц $A \in Q_n$, где χ и χ' – два различных характера S_n, рассмотрена в отдельной статье, см. [17]. Более того, вместе с результатами [17] данная работа завершает решение задачи классификации линейных конвертеров иммanантов на пространстве кососимметрических матриц.

Настоящая статья имеет следующую структуру. В §2 доказана обратимость линейных отображений, конвертирующих один имманант в другой на пространстве Q_4. Также, мы доказываем несколько лемм, которые будут использованы в дальнейшем. §3 содержит классификацию линейных отображений, сохраняющих перманент, и доказательство отсутствия линейных конвертеров между различными иммaнантами, соответствующими характерам из множества $\{1, \epsilon, [2,2]\}$.

§2. Вспомогательные результаты

Нашей первой целью будет доказательство обратимости линейных отображений, конвертирующих один имманант в другой. Напомним, что мы пишем характеры в квадратных скобках $[a,b,c]$, а перестановки записываются в виде произведения независимых циклов в круглых скобках (fgh). Значение характера на перестановке записывается следующим образом: $[a,b,c]((fgh))$; например, $[2,2]((12)(34)) = 2$ и $[2,2]((1234)) = 0$.

Теорема 2.1. *Пусть χ, χ' – неприводимые характеры S_4. Предположим, что линейное отображение $T\colon Q_4 \to Q_4$ удовлетворяет соотношению*

$$d_{\chi'}(T(A)) = d_\chi(A) \text{ для всех } A \in Q_4.$$

Тогда T обратимо.

Доказательство. Пусть $T(A) = 0$, где $A = (a_{ij}) \in Q_4$. Достаточно показать, что $a_{ij} = 0$ для всех пар индексов $i, j \in \{1,2,3,4\}$. Пусть индексы $k, l \in \{1,2,3,4\}$ таковы, что $\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$. Для всех $x \in \mathbb{C}$ имеем

$$d_\chi(A + xU_{kl}) = d_{\chi'}(T(A) + xT(U_{kl})) = d_{\chi'}(xT(U_{kl})) = x^4 d_\chi(U_{kl}) = 0.$$

Следовательно, многочлен $d_\chi(A + xU_{kl}) \in \mathbb{C}[x]$ тождественно равен нулю, поэтому его коэффициент при x^2 нулевой. Этот коэффициент равен $\chi((ij)(kl))a_{ij}^2$. Поскольку $\chi((ij)(kl)) \neq 0$ для всех χ, то $a_{ij} = 0$. Это завершает доказательство. □

Для каждого неприводимого характера χ группы S_n рассмотрим множество $A^2_\chi \subseteq Q_n$, определенное в [6]:

$$A^2_\chi = \{A \in Q_n |\ \deg d_\chi(xA + B) \leqslant 2 \text{ для всех } B \in Q_n\}.$$

Следующая лемма аналогична лемме 5.2 из работы [8], в которой были классифицированы линейные отображения, сохраняющие иммананты на пространстве Q_n.

Лемма 2.2. *Пусть χ, χ' – неприводимые характеры S_n.*

1. *Если линейное отображение T конвертирует d_χ в $d_{\chi'}$, то $T(A^2_\chi) \subset A^2_{\chi'}$.*
2. *Если $A \in A^2_\chi$, то для всех $\sigma \in S_n$, $P(\sigma)AP(\sigma^{-1}) \in A^i_\chi$.*

Доказательство. 1. Пусть $A \in A^2_\chi$. Так как $d_\chi(X) = d_{\chi'}(T(X))$, то для всех $B \in Q_n$ и всех $\alpha \in \mathbb{C}$ имеем $d_\chi(\alpha A + B) = d_{\chi'}(\alpha T(A) + T(B))$. Следовательно, для всех $B \in Q_n$ мы также имеем равенство многочленов $d_{\chi'}(xT(A) + T(B)) = d_\chi(xA + B)$, так что $\deg d_{\chi'}(xT(A) + T(B)) = \deg d_\chi(xA + B) \leqslant 2$, поэтому $T(A) \in A^2_{\chi'}$.

2. Это утверждение следует из того факта, что для всех $\sigma \in S_n$ и для всех $A \in Q_n$ выполняется равенство $d_\chi(P(\sigma)AP(\sigma^{-1}) = d_\chi(A)$. $\square$

Напомним, что $U_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$ при $i < j$. Ниже мы рассмотрим подпространства $V_i \subset Q_n$, $i = 1, \ldots, n$, и подпространства $W_{(i,j,k)} \subset Q_n$, где $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ попарно различны, определенные следующим образом:

$$V_i = \langle U_{ij} | j = 1, \ldots, n, j \neq i \rangle$$

и

$$W_{(i,j,k)} = \langle U_{ij}, U_{ik}, U_{kj} \rangle.$$

Каждое подпространство V_i состоит из кососимметрических $n \times n$-матриц с ненулевыми элементами, лежащими в i-ой строке и в i-ом столбце. Если $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ попарно различны, то

$$W_{(i,j,k)} = (V_i + V_j) \cap (V_j + V_k) \cap (V_i + V_k).$$

Положим $W_a = W_{(i,j,k)}$ для попарно различных $a, i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 2.3. *Предположим, что для матрицы $A = (a_{ij}) \in Q_4$ условия $A \notin V_a$ и $A \notin W_b$ выполняются для всех $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда $a_{ij} \neq 0$ и $a_{kl} \neq 0$ для некоторой перестановки (i, j, k, l) множества $\{1, 2, 3, 4\}$.*

Доказательство. Докажем лемму от противного. Предположим, что если $a_{ij} \neq 0$ и $a_{kl} \neq 0$, то индексы i, j, k, l не являются попарно различными. Рассмотрим граф G с множеством вершин $\{1, 2, 3, 4\}$; здесь вершины i и j инцидентны тогда и только тогда, когда $a_{ij} \neq 0$. Из предположения следует, что любые два ребра графа G имеют общую вершину. Очевидно, что в таком случае граф G либо является треугольником на некоторых вершинах $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$, либо все ребра графа G имеют общую вершину $a \in \{1, 2, 3, 4\}$. В первом случае, мы имеем $A \in W_{(i,j,k)}$; во втором случае, $A \in V_a$. Противоречие. □

Следующие леммы дают полное описание множеств A^2_χ в случаях $\chi = [2, 2]$ и $\chi = 1 = [4]$.

Лемма 2.4. *Пусть* $A \in Q_4$ *и* $\chi = [2, 2]$. *В таком случае,* $A \in A^2_{[2,2]}$ *тогда и только тогда, когда* $A \in V_i$ *для некоторого* i *или* $A \in W_{(i,j,k)}$ *для некоторых* i, j, k.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость от противного. Пусть $A = (a_{ij}) \in A^2_{[2,2]}$, $A \notin V_a$ и $A \notin W_b$ для всех $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$. Из леммы 2.3 следует, что $a_{ij} \neq 0$ и $a_{kl} \neq 0$ для некоторой перестановки (i, j, k, l) множества $\{1, 2, 3, 4\}$. Не нарушая общности, можно считать, что $(i, j, k, l) = (1, 2, 3, 4)$, т.е. $a_{12} \neq 0$ и $a_{34} \neq 0$. Тогда имеем $\deg d_\chi(xA + U_{34}) \leqslant 2$, поэтому коэффициент при x^3 в этом многочлене равен нулю. Прямые вычисления показывают, что этот коэффициент равен

$$2\chi((12)(34))a_{12}^2 a_{34} + 2\chi((1234))(a_{12}a_{13}a_{24} - a_{12}a_{23}a_{14}) = 4a_{12}^2 a_{34}.$$

Следовательно, имеем $a_{12}a_{34} = 0$. Противоречие. □

Лемма 2.5. *Пусть* $A \in Q_4$ *и* $\chi \in \{1, [3, 1]\}$. *Тогда* $A \in A^2_\chi$ *тогда и только тогда, когда или* $A \in V_i$, *или* $A \in W_{(i,j,k)}$, *или существует перестановка* $\sigma \in S_4$, *такая что*

$$P(\sigma)AP(\sigma^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 \\ -a_{12} & 0 & 0 & a_{24} \\ -a_{13} & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{bmatrix},$$

где $a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} = 0$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $\chi = 1$. Пусть

$A = (a_{ij}) \in A^2_{[4]}$, $A \notin V_a$ и $A \notin W_b$ для всех $a, b \in \{1,2,3,4\}$. Из леммы 2.3 следует, что $a_{ij} \neq 0$ и $a_{kl} \neq 0$ для некоторой перестановки $\{i,j,k,l\}$ множества $\{1,2,3,4\}$. Не нарушая общности, можно считать, что $(i,j,k,l) = (1,2,3,4)$, т.е. $a_{12} \neq 0$ и $a_{34} \neq 0$. Имеем $\deg d_\chi(xA + U_{34}) \leqslant 2$, поэтому коэффициент при x^3 в этом многочлене равен нулю. Этот коэффициент равняется

$$\begin{aligned}&2\chi((12)(34))a_{12}^2a_{34} + 2\chi((1234))(a_{12}a_{13}a_{24} - a_{12}a_{23}a_{14})\\ &=2a_{12}(a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14}).\end{aligned}$$

Так как $a_{12} \neq 0$, имеем

$$a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14} = 0. \tag{2.1}$$

Так как $a_{12} \neq 0$ и $a_{34} \neq 0$, то $a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14} \neq 0$. Не нарушая общности, можем считать, что $a_{13} \neq 0$ и $a_{24} \neq 0$.

Мы утверждаем, что в этом случае и $a_{23} = 0$, и $a_{14} = 0$. Докажем это от противного. Без ограничения общности предположим, что $a_{23} \neq 0$. По предположению, имеем $\deg d_\chi(xA + U_{14}) \leqslant 2$. Соответствующий коэффициент при x^3 равен

$$2a_{23}^2a_{14} + 2a_{23}a_{13}a_{24} - 2a_{12}a_{23}a_{34} = 2a_{23}(a_{23}a_{14} + a_{13}a_{24} - a_{12}a_{34}).$$

Так как $a_{23} \neq 0$, то

$$-a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} + a_{23}a_{14} = 0. \tag{2.2}$$

Из формул (2.1) и (2.2) следует, что $a_{13}a_{24} = 0$. Противоречие. Следовательно, $a_{23} = 0$ и $a_{14} = 0$.

Так как $a_{23} = 0$, то формула (2.1) влечет, что $a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} = 0$. Это завершает доказательство. ☐

§3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Линейные отображения, сохраняющие имманант, отвечающий характеру $\chi = [2,2]$, классифицированы, см. [8].

Далее будем рассматривать линейные отображения пространства $Q_4(\mathbb{C})$ в себя. Заметим, что $\dim Q_4(\mathbb{C}) = 6$. Следовательно, естественно возникает действие группы S_6 на пространстве $Q_4(\mathbb{C})$.

Теорема 3.1 ([8, теорема 2.3]). *Пусть $n = 4$ и $\chi = [2,2]$. Линейное отображение $T\colon Q_4(\mathbb{C}) \to Q_4(\mathbb{C})$ сохраняет d_χ тогда и только тогда, когда существует перестановка $\pi \in S_6$, удовлетворяющая условию*

$$\pi(16)(25)(34) = (16)(25)(34)\pi,$$

и симметрическая матрица $C \in M_4(\mathbb{C})$, удовлетворяющая условию

$$c_{12}^2 c_{34}^2 = c_{13}^2 c_{24}^2 = c_{14}^2 c_{23}^2 = 1,$$

такие, что для всех

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_2 & -x_4 & 0 & x_6 \\ -x_3 & -x_5 & -x_6 & 0 \end{pmatrix}$$

выполнено

$$T(X) = C \circ \begin{pmatrix} 0 & x_{\pi(1)} & x_{\pi(2)} & x_{\pi(3)} \\ -x_{\pi(1)} & 0 & x_{\pi(4)} & x_{\pi(5)} \\ -x_{\pi(2)} & -x_{\pi(4)} & 0 & x_{\pi(6)} \\ -x_{\pi(3)} & -x_{\pi(5)} & -x_{\pi(6)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $W_j = W_{(a,b,c)}$ для попарно различных $j, a, b, c \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Лемма 3.2. *Пусть $\chi \in \{1, \epsilon, [3,1], [2,1,1]\}$ и $\chi' \in \{1, [3,1], [2,2]\}$ – неприводимые характеры группы S_4. Предположим, что линейное отображение $T\colon Q_4(\mathbb{C}) \to Q_4(\mathbb{C})$ удовлетворяет условию*

$$d_{\chi'}(T(A)) = d_\chi(A) \ \text{ для всех } \ A \in Q_4(\mathbb{C})$$

и $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда верно одно из следующих утверждений.

1. *Найдется перестановка $\sigma \in S_4$, такая что $T(V_i) = V_{\sigma(i)}$ для всех $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.*

2. *Найдется перестановка $\sigma \in S_4$, такая что $T(V_i) = W_{\sigma(i)}$ для всех $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.*

Доказательство. Так как $V_i \in A_\chi^2$, из леммы 2.2 следует, что $T(V_i) \in A_{\chi'}^2$. По теореме 2.1 отображение T обратимо, поэтому $\dim(T(V_i)) = \dim(V_i) = 3$. В случае $\chi' \in \{1, [3,1]\}$, используя первый и второй пункты леммы 2.5, мы получаем, что $T(V_i) = V_{i'}$ или $T(V_i) = W_{i'}$ для некоторого $i' \in \{1, 2, 3, 4\}$. Третий случай невозможен, так как квадрика $\mathbb{C}^4$, заданная уравнением $a_{13}a_{24} + a_{12}a_{34} = 0$, не содержит подпространства размерности 3. Если $\chi' = [2,2]$, то, по лемме 2.4, имеем $T(V_i) = V_{i'}$ или $T(V_i) = W_{i'}$ для некоторого $i' \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Предположим, что найдутся $i \neq k \in \{1, 2, 3, 4\}$ и $j, l \in \{1, 2, 3, 4\}$, такие что $T(V_i) = V_j$ и $T(V_k) = W_l$. Тогда $T(V_i \cap V_k) = T(V_i) \cap T(V_k) = V_j \cap W_l$ и $1 = \dim(V_i \cap V_k) = \dim(V_j \cap W_l)$. Но $\dim(V_j \cap W_l) = 0$, если $j = l$, и $\dim(V_j \cap W_l) = 2$, если $j \neq l$, и мы приходим к противоречию. Следовательно, имеем $T(V_i) = V_{\sigma(i)}$ или $T(V_i) = W_{\sigma(i)}$ для всех $i \in$

$\{1,2,3,4\}$, где σ – это отображение $\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$. Так как T обратимо, мы делаем вывод, что σ является перестановкой, поэтому одно из утверждений 1 или 2 верно. □

Лемма 3.3. *Пусть* $\chi \in \{1, \epsilon, [3,1], [2,1,1]\}$ *и* $\chi' \in \{1, [3,1], [2,2]\}$ *– неприводимые характеры* S_4. *Предположим, что линейное отображение* $T\colon Q_4(\mathbb{C}) \to Q_4(\mathbb{C})$ *удовлетворяет условию*

$$d_{\chi'}(T(X)) = d_{\chi}(X) \ \textit{ для всех } \ X \in Q_4(\mathbb{C}).$$

Тогда найдется симметрическая матрица C *и перестановка* $\sigma \in S_4$, *такие что*

$$T(X) = C \circ P(\sigma) X P(\sigma^{-1})$$

для всех $X \in Q_4$, *или перестановка* $\pi \in S_6$, *удовлетворяющая условию* $\pi\rho = \rho\pi$, *где* $\rho = (16)(25)(34)$, *и* T *определяется по формуле:*

$$T(\begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_2 & -x_4 & 0 & x_6 \\ -x_3 & -x_5 & -x_6 & 0 \end{pmatrix}) = C \circ \begin{pmatrix} 0 & x_{\pi(1)} & x_{\pi(2)} & x_{\pi(3)} \\ -x_{\pi(1)} & 0 & x_{\pi(4)} & x_{\pi(5)} \\ -x_{\pi(2)} & -x_{\pi(4)} & 0 & x_{\pi(6)} \\ -x_{\pi(3)} & -x_{\pi(5)} & -x_{\pi(6)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Мы рассмотрим два случая в соответствии с пунктами 1 и 2 леммы 3.2.

Случай 1: Существует перестановка $\sigma \in S_4$, такая что $T(V_i) = V_{\sigma(i)}$ для всех $i \in \{1,2,3,4\}$.

Рассмотрим отображение $T'\colon Q_4 \mapsto Q_4$, определенное по формуле $T'(X) = P(\sigma^{-1})T(X)P(\sigma)$ для всех $A \in Q_4$. Тогда $d_{\chi'}(T'(X)) = d_{\chi}(X)$ для всех $X \in Q_4(\mathbb{C})$ и $T'(V_i) = V_i$ для всех $i \in \{1,2,3,4\}$. Для всех $i \neq j$, рассматривая подпространства $\langle U_{ij} \rangle = V_i \cap V_j$, мы получаем, что $\langle T'(U_{ij}) \rangle = T'(V_i) \cap T'(V_j) = V_i \cap V_j = \langle U_{ij} \rangle$, откуда следует, что существует такая матрица $C' \in M_4(\mathbb{C})$, что для любой матрицы $X \in Q_4(\mathbb{C})$ выполняется $T'(X) = C' \circ X$, и матрица C' симметрическая, так как матрицы X и $T'(X)$ кососимметрические. Положим $C = P(\sigma)C'P(\sigma^{-1})$, тогда

$$T(X) = P(\sigma)T'(X)P(\sigma^{-1}) = P(\sigma)(C' \circ X)P(\sigma^{-1})$$
$$= (P(\sigma)C'P(\sigma^{-1})) \circ P(\sigma)XP(\sigma^{-1}) = C \circ P(\sigma)XP(\sigma^{-1}).$$

Случай 2: Существует перестановка $\sigma \in S_4$, такая что $T(V_i) = W_{\sigma(i)}$ для всех $i \in \{1,2,3,4\}$. При $i \neq j$, так как $\langle U_{ij} \rangle = V_i \cap V_j$, мы имеем $\langle T(U_{ij}) \rangle = W_{\sigma(i)} \cap W_{\sigma(j)}$, т.е. найдутся различные $p, q \in \{1,2,3,4\}$, такие что $W_{\sigma(i)} \cap W_{\sigma(j)} = \langle U_{pq} \rangle$ и $\langle T(U_{ij}) \rangle = \langle U_{pq} \rangle$.

Пусть $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Заметим, что $d_{\chi'}(T(U_{ij}) + T(U_{kl})) = d_{\chi'}(T(U_{ij} + U_{kl})) = d_\chi(U_{ij} + U_{kl}) \neq 0$. Тогда существуют различные r, s, такие что $r, s \notin \{p, q\}$ и $\langle T(U_{kl})\rangle = \langle U_{rs}\rangle$.

Положим $H_1 = U_{12}$, $H_2 = U_{13}$, $H_3 = U_{14}$, $H_4 = U_{23}$, $H_5 = U_{24}$ и $H_6 = U_{34}$.

Если $i \in \{1, \ldots, 6\}$, то существует $j \in \{1, \ldots, 6\}$, такое что $T(H_i) \in \langle H_j\rangle$, и поэтому существует перестановка $\pi \in S_6$, удовлетворяющая условию $\langle T(H_i)\rangle = \langle H_{\pi(i)}\rangle$, где $\pi(i) = j$.

Рассмотрим перестановку $\rho = (16)(25)(34) \in S_6$.

Тогда $T(H_{\rho(i)}) \in \langle H_{\rho(j)}\rangle$, поэтому $\pi\rho(i) = \rho(j) = \rho\pi(i)$ для всех $i \in \{1, \ldots, 6\}$. Следовательно, найдется матрица C, такая что

$$T(\begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_2 & -x_4 & 0 & x_6 \\ -x_3 & -x_5 & -x_6 & 0 \end{pmatrix}) = C \circ \begin{pmatrix} 0 & x_{\pi(1)} & x_{\pi(2)} & x_{\pi(3)} \\ -x_{\pi(1)} & 0 & x_{\pi(4)} & x_{\pi(5)} \\ -x_{\pi(2)} & -x_{\pi(4)} & 0 & x_{\pi(6)} \\ -x_{\pi(3)} & -x_{\pi(5)} & -x_{\pi(6)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица C симметрическая, так как матрицы X и $T(X)$ кососимметрические. □

Следствие 3.4. *Пусть $\chi \in \{1, \epsilon, [3,1], [2,1,1]\}$ и $\chi' \in \{1, [3,1], [2,2]\}$ – неприводимые характеры S_4. Предположим, что существует линейное отображение $T\colon Q_4(\mathbb{C}) \to Q_4(\mathbb{C})$, удовлетворяющее соотношению*

$$d_{\chi'}(T(X)) = d_\chi(X) \ \text{ для всех } \ X \in Q_4(\mathbb{C}).$$

Тогда существует симметрическая матрица C, такая что

$$d_{\chi'}(C \circ X) = d_\chi(X) \ \text{ для всех } \ X \in Q_4(\mathbb{C}).$$

Доказательство. Пусть $\pi, \sigma \in S_4$, причем $\pi\rho = \rho\pi$, где $\rho = (16)(25)(34)$. Тогда линейные отображения $X \mapsto P(\sigma)XP(\sigma^{-1})$ и

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_2 & -x_4 & 0 & x_6 \\ -x_3 & -x_5 & -x_6 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & x_{\pi(1)} & x_{\pi(2)} & x_{\pi(3)} \\ -x_{\pi(1)} & 0 & x_{\pi(4)} & x_{\pi(5)} \\ -x_{\pi(2)} & -x_{\pi(4)} & 0 & x_{\pi(6)} \\ -x_{\pi(3)} & -x_{\pi(5)} & -x_{\pi(6)} & 0 \end{pmatrix}$$

сохраняют $d_{\chi'}$. Таким образом, результат следует из леммы 3.3. □

Теорема 3.5. *Линейное отображение $T\colon Q_4(\mathbb{C}) \to Q_4(\mathbb{C})$ сохраняет перманент тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) *Найдутся симметрическая матрица* C *и перестановка* $\sigma \in S_4$, *такие что*

$$T(X) = C \circ P(\sigma) X P(\sigma^{-1})$$

для всех $X \in Q_4$.

(2) *Найдутся симметрическая матрица* C *и перестановка* $\pi \in S_6$, *удовлетворяющая условию* $\pi\rho = \rho\pi$, *где* $\rho = (16)(25)(34)$, *для которых выполнено*

$$T(\begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_4 & x_5 \\ -x_2 & -x_4 & 0 & x_6 \\ -x_3 & -x_5 & -x_6 & 0 \end{pmatrix}) = C \circ \begin{pmatrix} 0 & x_{\pi(1)} & x_{\pi(2)} & x_{\pi(3)} \\ -x_{\pi(1)} & 0 & x_{\pi(4)} & x_{\pi(5)} \\ -x_{\pi(2)} & -x_{\pi(4)} & 0 & x_{\pi(6)} \\ -x_{\pi(3)} & -x_{\pi(5)} & -x_{\pi(6)} & 0 \end{pmatrix}.$$

В обоих случаях, коэффициенты матрицы C *удовлетворяют соотношению* $c_{12}c_{34} = c_{13}c_{24} = c_{14}c_{23} = \pm 1$.

Доказательство. Достаточность этих условий очевидна. Для доказательства необходимости применим лемму 3.3. В обоих случаях, по следствию 3.4, найдется симметрическая матрица $C \in M_4(\mathbb{C})$, такая что $\operatorname{per}(A) = \operatorname{per}(C \circ A)$. Пусть $A = U_{ij} + U_{kl}$, где i, j, k, l попарно различны. Тогда имеем $1 = \operatorname{per}(A) = \operatorname{per}(T(A)) = c_{ij}^2 c_{kl}^2$. Таким образом, $c_{ij}c_{kl} = \pm 1$. Если $A = U_{12} + U_{13} + U_{24} + U_{34}$, то

$$4 = \operatorname{per}(A) = \operatorname{per}(T(A)) = c_{12}^2 c_{34}^2 + c_{13}^2 c_{24}^2 + 2c_{12}c_{34}c_{13}c_{24}.$$

Следовательно, $c_{12}c_{34}c_{13}c_{24} = 1$, значит $c_{12}c_{34} = c_{13}c_{24}$. Поэтому для перестановки $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ мы имеем $c_{ij}c_{kl} = c_{ik}c_{jl}$. □

Теорема 3.6. *Не существует линейных отображений* $T\colon Q_4(\mathbb{C}) \to Q_4(\mathbb{C})$, *конвертирующих определитель в перманент.*

Доказательство. Предположим, что такое линейное отображение T существует. По условиям леммы 3.3 и следствия 3.4, мы можем считать, что найдется такая матрица $C \in M_4(\mathbb{C})$, что $\det(A) = \operatorname{per}(C \circ A)$.

Пусть $A = U_{ij} + U_{kl}$, где i, j, k, l попарно различны. Тогда имеем $1 = \det(A) = \operatorname{per}(T(A)) = c_{ij}^2 c_{kl}^2$. Таким образом, $c_{ij}c_{kl} = \pm 1$. Если $A = U_{12} + U_{13} + U_{24} + U_{34}$, то

$$0 = \det(A) = \operatorname{per}(T(A)) = c_{12}^2 c_{34}^2 + c_{13}^2 c_{24}^2 + 2c_{12}c_{34}c_{13}c_{24}.$$

Следовательно, $c_{12}c_{34}c_{13}c_{24} = -1$. Аналогично, $c_{12}c_{34}c_{23}c_{14} = -1$ и $c_{23}c_{14}c_{13}c_{24} = -1$. При перемножении этих трех выражений мы получаем

$$c_{12}^2 c_{34}^2 c_{13}^2 c_{24}^2 c_{14}^2 c_{23}^2 = -1.$$

Таким образом, мы приходим к противоречию с утверждением $c_{ij}^2 c_{kl}^2 = 1$. Следовательно, не существует линейных отображений $T\colon Q_4(\mathbb{C}) \to Q_4(\mathbb{C})$, таких что $\det(A) = \mathrm{per}\,(T(A))$. □

Теорема 3.7. *Не существует линейных отображений* $T\colon Q_4(\mathbb{C}) \to Q_4(\mathbb{C})$*, удовлетворяющих соотношению*

$$d_{[2,2]}(T(A)) = \det(A) \text{ для всех } A \in Q_4.$$

Доказательство. Предположим, что существует такое линейно отображение T. По условию леммы 3.3 и следствия 3.4, мы можем считать, что найдется симметрическая матрица $C \in M_4(\mathbb{C})$, такая что $\det(A) = d_{[2,2]}(C \circ A)$.

Пусть $A = U_{ij} + U_{kl}$, где i, j, k, l попарно различны. Тогда $1 = \det(A) = d_{[2,2]}(T(A)) = 2c_{ij}^2 c_{kl}^2$. Если $A = U_{12} + U_{13} + U_{24} + U_{34}$, то

$$0 = \det(A) = d_{[2,2]} = 2c_{12}^2 c_{34}^2 + 2c_{24}^2 c_{13}^2.$$

Таким образом, мы приходим к противоречию с равенством

$$2c_{12}^2 c_{34}^2 = 2c_{24}^2 c_{13}^2 = 1.$$

Следовательно, не существует линейных отображений $T\colon Q_4(\mathbb{C}) \to Q_4(\mathbb{C})$, таких что $\det(A) = d_{[2,2]}(T(A))$. □

Теорема 3.8. *Не существует линейных отображений* $T\colon Q_4(\mathbb{C}) \to Q_4(\mathbb{C})$*, удовлетворяющих соотношению*

$$d_{[2,2]}(T(A)) = \mathrm{per}\,(A) \text{ для всех } A \in Q_4.$$

Доказательство. Предположим, что такое линейное отображение T существует. По условию леммы 3.3 и следствия 3.4, мы можем считать, что найдется симметрическая матрица $C \in M_4(\mathbb{C})$, такая что $\mathrm{per}\,(A) = d_{[2,2]}(C \circ A)$.

Пусть $A = U_{ij} + U_{kl}$, где i, j, k, l попарно различны. Тогда $1 = \mathrm{per}\,(A) = d_{[2,2]}(T(A)) = 2c_{ij}^2 c_{kl}^2$. Если $A = U_{12} + U_{13} + U_{24} + U_{34}$, то

$$4 = \mathrm{per}\,(A) = d_{[2,2]} = 2c_{12}^2 c_{34}^2 + 2c_{24}^2 c_{13}^2.$$

Таким образом, мы приходим к противоречию с равенством

$$2c_{12}^2 c_{34}^2 = 2c_{24}^2 c_{13}^2 = 1.$$

Следовательно, не существует линейных отображений $T\colon Q_4(\mathbb{C}) \to Q_4(\mathbb{C})$, таких что $\mathrm{per}\,(A) = d_{[2,2]}(T(A))$. □

Следующий результат объединяет теоремы 3.6, 3.7, 3.8 и теорему 2.1.

Следствие 3.9. *Пусть* $\chi, \chi' \in \{1, \epsilon, [2,2]\}$ *– различные неприводимые комплексные характеры* S_4. *Тогда не существует линейных отображений* $T\colon Q_4 \to Q_4$, *удовлетворяющих условию*

$$d_{\chi'}(T(A)) = d_\chi(A) \text{ для всех } A \in Q_4.$$

Далее мы обобщим наш результат на более широкие классы отображений, рассматривавшиеся ранее для отдельных иммanантов и полной матричной алгебры в работах [12,19]. Нам понадобится следующий результат, доказанный авторами в [17].

Теорема 3.10 ([17, теорема 2.21])**.** *Пусть* $n \geqslant 4$ *четное,* χ, χ' *– неприводимые характеры* S_n, *не равные тождественно нулю на* P_n. *Пусть* $T\colon Q_n \to Q_n$ *удовлетворяет условию*

$$d_\chi(A + zB) = d_{\chi'}(T(A) + zT(B))$$

для всех $A, B \in Q_n$ *и для всех* $z \in \mathbb{C}$. *Тогда отображение* T *линейно и биективно.*

Заметим, что все неприводимые характеры S_4 не равны тождественно нулю на P_4, поэтому теорема 3.10 применима в нашем случае. Мы имеем следующие следствия.

Следствие 3.11. *Пусть отображение* $T\colon Q_4 \to Q_4$ *удовлетворяет условию*

$$\operatorname{per}(A + zB) = \operatorname{per}(T(A) + zT(B))$$

для всех $A, B \in Q_4$ *и для всех* $z \in \mathbb{C}$. *Тогда отображение* T *имеет вид, указанный в утверждении теоремы* 3.5.

Следствие 3.12. *Пусть* $\chi, \chi' \in \{1, \epsilon, [2,2]\}$ *– различные неприводимые комплексные характеры* S_4. *Тогда не существует отображений* $T\colon Q_4 \to Q_4$, *удовлетворяющих соотношению*

$$d_\chi(A + zB) = d_{\chi'}(T(A) + zT(B))$$

для всех $A, B \in Q_4$ *и для всех* $z \in \mathbb{C}$.

Список литературы

1. P. Botta, *Linear transformations that preserve the permanent.* — Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 566–569.
2. M. Budrevich, M. A. Duffner, A. E. Guterman, *Absence of linear permanent-determinant converters on skew-symmetric matrices.* — Sarajevo J. Math. **14**, No. 27 (2018), 143–155.
3. М. В. Будревич, А. Э. Гутерман, М. А. Даффнер, *Линейные отображения кососимметрических матриц, сохраняющие перманент.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 31–43.
4. C. Cao, X. Tang, *Determinant preserving transformations on symmetric matrix spaces.* — Electronic J. Linear Algebra **11** (2004), 205–211.
5. C. Cao, X. Tang, *Linear maps preserving rank* 2 *on the space of alternate matrices and their applications.* — Int. J. Math. Sci. **61–64** (2004), 3409–3417.
6. M. P. Coelho, *Linear preservers of the permanent on symmetric matrices.* — Linear Multilinear Algebra **41** (1996), 1–8.
7. M. P. Coelho, M. A. Duffner, *Immanant preserving and immanant converting maps.* — Linear Algebra Appl. **418**, No. 1 (2006), 177–187.
8. M. P. Coelho, M. A. Duffner, *Linear preservers of immanants on skew-symmetric matrices.* — Linear Algebra Appl. **436** (2012), 2536–2553.
9. M. P. Coelho, M. A. Duffner, *On the conversion of an immanant into another on symmetric matrices.* — Linear Multilinear Algebra **51**, No. 2 (2003), 137–145.
10. M. P. Coelho, M. A. Duffner, *Linear preservers of immanants on symmetric matrices.* — Linear Algebra Appl. **255** (1997), 314–334.
11. M. P. Coelho, M. A. Duffner, A. E. Guterman, *Immanant conversion on symmetric matrices.* — Special Matrices **2**, No. 1 (2014), 1–10.
12. G. Dolinar, P. Šemrl, *Determinant preserving maps on matrix algebras.* — Linear Algebra Appl. **348** (2002), 189–192.
13. G. Dolinar, A. Guterman, B. Kuzma, M. Orel, *On the Polya permanent problem over finite fields.* — Eur. J. Comb. **32** (2011), 116–132.
14. M. A. Duffner, *Linear transformations that preserve immanants.* — Linear Algebra Appl. **197, 198** (1994), 567–588.
15. M. P. Coelho, M. A. Duffner, *On the conversion of an immanant into another.* — Linear Multilinear Algebra **44** (1998), 111–130.
16. M. A. Duffner, A. E. Guterman, *Converting immanants on singular symmetric matrices.* — Lobachevskii J. Math. **38**, No. 4 (2017), 630–636.
17. M. A. Duffner, A. E. Guterman, I. A. Spiridonov, *Converting immanants on skew-symmetric matrices*, Preprint, 2020.
18. G. Frobenius, Ü*ber die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Berlin (1897), 994–1015.
19. Б. Кузьма, *Об отображениях, сохраняющих иммананты.* — Фундам. прикл. матем. **13**, No. 4 (2007), 113–120.
20. C.-K. Li, N.-K. Tsing, *Linear preserver problems*: *A brief introduction and some special techniques. Directions in matrix theory.* — Linear Algebra Appl. **162–164** (1992), 217–235.

21. M. H. Lim, H. Ong, *Linear transformations on symmetric matrices that preserve the permanent.* — Linear Algebra Appl. **21** (1978), 143–151.
22. M. Marcus, F. C. May, *The permanent function.* — Canad. J. Math. **14** (1962), 177–189.
23. M. Marcus, H. Minc, *On the relation between the determinant and the permanent.* — Illinois J. Math. **5**, No. 3 (1961), 376–381.
24. H. Minc, *Permanents.* Addison Wesley Publ. Co., 1978.
25. S. Pierce and others, *A survey of linear preserver problems.* — Linear Multilinear Algebra **33** (1992), 1–119.
26. G. Pólya, *Aufgabe*, 424. — Arch. Math. Phys. **20**, No. 3 (1913), 271.
27. H. J. Ryser, *Combinatorial Mathematics.* Math. Assoc. Amer., 1963.

Guterman A. E., Duffner M. A., Spiridonov I. A. Linear immanant converters on skew-symmetric matrices of order 4.

Let Q_n denote the space of all $n \times n$ skew-symmetric matrices over the complex field $\mathbb{C}$. It is proved that for $n = 4$, there are no linear maps $T : Q_4 \to Q_4$ satisfying the condition $d_{\chi'}(T(A)) = d_{\chi}(A)$ for all matrices $A \in Q_4$, where $\chi, \chi' \in \{1, \epsilon, [2,2]\}$ are two distinct irreducible characters of S_4. In the case $\chi = \chi' = 1$, a complete characterization of the linear maps $T : Q_4 \to Q_4$ preserving the permanent is obtained. This case is the only one corresponding to equal characters and remaining uninvestigated so far.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия;
Московский центр фундаментальной и прикладной
математики, Москва, 119991, Россия
E-mail: `guterman@list.ru`

Университет Лиссабона, Лиссабон,
Португалия, 1700-016
E-mail: `mamonteiro@fc.ul.pt`

Московский центр фундаментальной и прикладной
математики, Москва, 119991, Россия;
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
Москва, 119048, Россия;
Московский центр непрерывного математического
образования, 119002, Россия
E-mail: `spiridonovia@yandex.ru`

Поступило 12 октября 2020 г.