Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 495, 2020 г.

А. А. Хартов, И. А. Алексеев

КВАЗИ-БЕЗГРАНИЧНАЯ ДЕЛИМОСТЬ И ТРЕХТОЧЕЧНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ЗАКОНЫ

§1. Введение

Данная работа посвящена изучению нового класса квази-безгранично делимых вероятностных законов. Этот класс является естественным расширением класса безгранично делимых законов, который, как известно, вместе со своими подклассами (устойчивых и саморазложимых законов) играет фундаментальную роль в теории вероятностей и в теории случайных процессов (см. [1, 5] и [11]).

Напомним, что функция распределения (ф.р.) F называется *безгранично делимой*, если для любого целого положительного n существует такая ф.р. F_n, что F является n-кратной сверткой F_n. Хорошо известно, что ф.р. F является безгранично делимой тогда и только тогда, когда ее характеристическая функция (х.ф.)

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), \quad t \in \mathbb{R},$$

допускает следующее *представление Леви–Хинчина*:

$$f(t) = \exp\left\{ it\gamma - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) d\Lambda(x) \right\}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$ (множество вещественных чисел), $\sigma \geqslant 0$, *спектральная функция* Λ не убывает на каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ и удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\to-\infty} \Lambda(x) = \lim_{x\to\infty} \Lambda(x) = 0, \tag{2}$$

Ключевые слова: квази-безгранично делимые вероятностные законы, представление Леви–Хинчина, дискретные трехточечные законы, характеристические функции.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075–15–2019–1619 и при финансовой поддержке гранта РФФИ-ННИО 20-51-12004.

а также

$$\int\limits_{0<|x|<\delta} x^2 d\Lambda(x) < \infty \quad \text{для любого} \quad \delta > 0.$$

Триплет $(\gamma, \sigma^2, \Lambda)$ полностью описывает структуру F: свойства непрерывности, наличие моментов, множество точек роста и т.д. (см. [12]).

Перейдем к квази-безгранично делимым ф.р. Это, грубо говоря, такие ф.р., у которых х.ф. допускают представление (1) без требования монотонности спектральной функции Λ. Более точно, ф.р. F называется *квази-безгранично делимой*, если ее х.ф. f допускает представление (1), где $\gamma \in \mathbb{R}$, $\sigma \geqslant 0$, а функция Λ имеет ограниченную вариацию на интервалах $(-\infty, -r]$ и $[r, \infty)$ при каждом $r > 0$, удовлетворяет (2) и условию

$$\int\limits_{0<|x|<\delta} x^2 d|\Lambda|(x) < \infty \quad \text{для любого} \quad \delta > 0.$$

Несложно показать, что ф.р. является квази-безгранично делимой тогда и только тогда, когда ее х.ф. есть отношение х.ф. некоторых двух безгранично делимых ф.р. Понятно, что любая безгранично делимая ф.р. квази-безгранично делима. Примером квази-безгранично делимой ф.р. является ф.р. закона Бернулли с х.ф. $1 - p + pe^{it}$, $t \in \mathbb{R}$, при $p < \frac{1}{2}$. Логарифм х.ф. этой ф.р. несложно разложить в абсолютно сходящийся ряд по e^{itk}, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и далее представить в виде (1) с $\gamma = 0$, $\sigma^2 = 0$ и с соответствующей функцией скачков Λ. При этом, как известно, ф.р. закона Бернулли (при любом $p \in (0,1)$) не обладает безграничной делимостью и даже в понятном смысле “далека” от этого свойства. Другие интересные примеры можно встретить в теории разложений вероятностных законов, описанной в монографиях [3], [4] и [6].

Понятие квази-безграничной делимости было введено в статье [10] в рамках некоторых задач теории случайных процессов. После появляются применения в физике (см. [7]) и актуарной математике (см. [13]). Первый большой анализ класса квази-безгранично делимых ф.р. был сделан совсем недавно в статье Линднера, Пана и Сато [9]. В ней на основе представления (1) изучаются аналитические свойства ф.р. и приводятся теоремы о сходимости квази-безгранично делимых ф.р. Наиболее законченные результаты в данной статье получены для распределений на целых числах (с дальнейшим обобщением на решетчатые законы). В частности, было показано, что если х.ф. такого закона не обращается в нуль, то его ф.р. будет квази-безгранично делимой с целым γ, $\sigma^2 = 0$, и со спектральной функцией Λ, являющейся функцией скачков на целых числах. Также здесь были получены критерии слабой сходимости квази-безгранично делимых ф.р. В статье [8] данный результат был дополнен теоремами об относительной и стохастической компактности.

К настоящему моменту, однако, малоизученным является вопрос об условиях принадлежности к классу квази-безгранично делимых ф.р. В настоящей работе этот вопрос полностью решается в рамках дискретных трехточечных вероятностных законов. Оказывается, что даже в таком «узком» классе законов находится место многим интересным случаям, причем некоторые из них весьма непросты для разрешения.

В статье помимо уже введенных используются следующие обозначения. Запись $\operatorname{sgn}(\,\cdot\,)$ применяется для функции знака, т.е. $\operatorname{sgn}(x) = 1$ при $x > 0$, $\operatorname{sgn}(x) = -1$ при $x < 0$, и $\operatorname{sgn}(x) = 0$ при $x = 0$. Через I_c будем обозначать ф.р. вырожденного закона, сосредоточенного в точке $c \in \mathbb{R}$, т.е. $I_c(x) = 1$ при $x \geqslant c$ и $I_c(x) = 0$ при $x < c$. Символ $\mathbb{Z}$ обозначает множество целых чисел.

§2. Результаты

Рассматривается вероятностный закон на трех точках 0, 1 и α с весами $p_0 > 0$, $p_1 > 0$ и $p_\alpha > 0$ соответственно, $p_0 + p_\alpha + p_1 = 1$. Пусть F – ф.р. этого закона, т.е. $F(x) := p_0 I_0(x) + p_\alpha I_\alpha(x) + p_1 I_1(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Мы будем предполагать, что $|\alpha| \leqslant 1$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, а также

$$p_0 = \max\{p_0, p_1, p_\alpha\}. \tag{3}$$

Несложно проверить, что любой вероятностный закон на трех различных точках (с положительными весами) может быть приведен к данному виду с помощью сдвига и масштабирования. Пусть f – х.ф. для ф.р. F, т.е. $f(t) = p_0 + p_\alpha e^{i\alpha t} + p_1 e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$.

Мы будем искать критерий принадлежности ф.р. F к классу квази-безгранично делимых в терминах чисел p_0, p_α, p_1 и α, а также через условия на х.ф. f.

Рассмотрим случай $p_0 > \frac{1}{2}$. Здесь ф.р. F будет являться квази-безгранично делимой. Это вытекает из известного общего факта (теорема 4.3.7 в [6] или теорема 3.1 в [9]) о том, что всякая ф.р. будет квази-безгранично делимой, если она имеет в некоторой точке скачок, размер которого больше $\frac{1}{2}$. Заметим, что здесь наша х.ф. f отделена от нуля:

$$\inf_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|\geqslant p_0-\sup_{t\in\mathbb{R}}|p_\alpha e^{i\alpha t}+p_1e^{it}|\geqslant p_0-(p_\alpha+p_1)=p_0-(1-p_0)=2p_0-1>0.$$

Перейдем к случаю $p_0\leqslant\frac{1}{2}$. Заметим, что в силу условия (3) на p_0 есть ограничение снизу: $p_0\geqslant\frac{1}{3}$. Представим критерий существования нулей у х.ф. f.

Теорема 1. *Если* $\frac{1}{3}\leqslant p_0\leqslant\frac{1}{2}$, *то определены величины*

$$\theta_\alpha:=\arccos\Bigl(\tfrac{p_1^2-p_0^2-p_\alpha^2}{2p_0p_\alpha}\Bigr),\qquad \theta_1:=\arccos\Bigl(\tfrac{p_\alpha^2-p_0^2-p_1^2}{2p_0p_1}\Bigr),\tag{4}$$

причем $\theta_\alpha,\theta_1\in(\frac{\pi}{2},\pi]$. *При этом х.ф.* f *имеет нули тогда и только тогда, когда*

$$\alpha=\tfrac{-\theta_\alpha+2\pi n}{\theta_1+2\pi m}\quad\text{при некоторых}\quad n,m\in\mathbb{Z}.\tag{5}$$

Доказательство. Равенство $f(t)=0$ эквивалентно системе двух равенств

$$p_0+p_\alpha\cos(\alpha t)+p_1\cos(t)=0,\qquad p_\alpha\sin(\alpha t)+p_1\sin(t)=0.\tag{6}$$

Из них, соответственно, вытекают следующие два равенства

$$p_0^2+p_\alpha^2\cos^2(\alpha t)+2p_0p_\alpha\cos(\alpha t)=p_1^2\cos^2(t),\qquad p_\alpha^2\sin^2(\alpha t)=p_1^2\sin^2(t),$$

складывая которые, получим

$$p_0^2+p_\alpha^2+2p_0p_\alpha\cos(\alpha t)=p_1^2.$$

Отсюда имеем $\cos(\alpha t)=\frac{p_1^2-p_0^2-p_\alpha^2}{2p_0p_\alpha}$ и далее из первого равенства (6) получаем $\cos(t)=\frac{p_\alpha^2-p_0^2-p_1^2}{2p_0p_1}$. В силу (3), верно $\frac{p_1^2-p_0^2-p_\alpha^2}{2p_0p_\alpha}<0$ и $\frac{p_\alpha^2-p_0^2-p_1^2}{2p_0p_1}<0$. Далее, из предположения $p_0\leqslant\frac{1}{2}$ имеем $p_0\leqslant 1-p_0=p_\alpha+p_1$, что дает два неравенства $(p_0-p_\alpha)^2\leqslant p_1^2$ и $(p_0-p_1)^2\leqslant p_\alpha^2$, из которых, соответственно, следует $\frac{p_1^2-p_0^2-p_\alpha^2}{2p_0p_\alpha}\geqslant-1$ и $\frac{p_\alpha^2-p_0^2-p_1^2}{2p_0p_1}\geqslant-1$. В итоге справедливо

$$-1\leqslant\tfrac{p_1^2-p_0^2-p_\alpha^2}{2p_0p_\alpha}<0,\qquad -1\leqslant\tfrac{p_\alpha^2-p_0^2-p_1^2}{2p_0p_1}<0.\tag{7}$$

Это означает, что каждое из уравнений $\cos(\alpha t)=\frac{p_1^2-p_0^2-p_\alpha^2}{2p_0p_\alpha}$ и $\cos(t)=\frac{p_\alpha^2-p_0^2-p_1^2}{2p_0p_1}$ по отдельности имеет корни, для которых определены соответственно $\sin(\alpha t)$ и $\sin(t)$. При этом второе равенство (6) дает равенство $\operatorname{sgn}(\sin(\alpha t))=-\operatorname{sgn}(\sin(t))$. В итоге система (6) влечет следующую систему:

$$\cos(\alpha t) = \tfrac{p_1^2 - p_0^2 - p_\alpha^2}{2p_0 p_\alpha}, \ \cos(t) = \tfrac{p_\alpha^2 - p_0^2 - p_1^2}{2p_0 p_1}, \ \operatorname{sgn}(\sin(\alpha t)) = -\operatorname{sgn}(\sin(t)). \quad (8)$$

Покажем, что (8) влечет (6). Простой подстановкой убеждаемся, что первые два равенства (8) влекут первое равенство (6). Далее заметим, что

$$\begin{aligned} p_\alpha^2 \cos^2(\alpha t) - p_1^2 \cos^2(t) &= \tfrac{(p_1^2 - p_0^2 - p_\alpha^2)^2}{4p_0^2} - \tfrac{(p_\alpha^2 - p_0^2 - p_1^2)^2}{4p_0^2} \\ &= \tfrac{-2p_0^2(2p_1^2 - 2p_\alpha^2)}{4p_0^2} = p_\alpha^2 - p_1^2. \end{aligned}$$

Отсюда имеем $p_\alpha^2 \sin^2(\alpha t) = p_1^2 \sin^2(t)$, т.е $p_\alpha|\sin(\alpha t)| = p_1|\sin(t)|$. Это вместе с последним равенством (8) дают второе равенство (6).

Итак, системы (6) и (8) эквивалентны. Перейдем к рассмотрению первых двух равенств системы (8). Они по отдельности эквивалентны, соответственно, равенствам

$$\alpha t = \pm\theta_\alpha + 2\pi n, \qquad t = \pm\theta_1 + 2\pi m \quad (9)$$

при некоторых $n, m \in \mathbb{Z}$, где θ_α и θ_1 определены по формулам (4). Здесь, за счет (7), верно $\pi/2 < \theta_\alpha \leqslant \pi$ и $\pi/2 < \theta_1 \leqslant \pi$. Несложно видеть, что для существования t, удовлетворяющего (9) при некоторых $n, m \in \mathbb{Z}$ и равенству из (8), необходимо и достаточно, чтобы $\alpha(\theta_1 + 2\pi m) = -\theta_\alpha + 2\pi n$ при некоторых $n, m \in \mathbb{Z}$. $\square$

Из теоремы 1 несложно вывести следующий факт.

Следствие 1. *Если α – иррациональное число, а числа $\frac{\theta_\alpha}{2\pi}$ и $\frac{\theta_1}{2\pi}$ рациональны, то х.ф. f не имеет нулей.*

Приведем несколько следствий для некоторых частных случаев.

Следствие 2. *Если $p_0 = p_\alpha = p_1 = \frac{1}{3}$, то х.ф. f имеет нули тогда и только тогда, когда $\alpha = \frac{3n-1}{3m+1}$ при некоторых $m, n \in \mathbb{Z}$.*

Действительно, при $p_0 = p_\alpha = p_1 = \frac{1}{3}$ имеем $\theta_\alpha = \theta_1 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Тогда легко видеть, что (5) сводится к нужному условию.

Следствие 3. *Если $p_0 = \frac{1}{2}$, то х.ф. f имеет нули тогда и только тогда, когда $\alpha = \frac{2n-1}{2m+1}$ при некоторых $m, n \in \mathbb{Z}$.*

При $p_0 = \frac{1}{2}$ имеем $p_\alpha + p_1 = \frac{1}{2}$ и

$$\frac{p_1^2 - p_0^2 - p_\alpha^2}{2p_0 p_\alpha} = \frac{\left(\frac{1}{2} - p_\alpha\right)^2 - \frac{1}{4} - p_\alpha^2}{p_\alpha} = -1,$$
$$\frac{p_\alpha^2 - p_0^2 - p_1^2}{2p_0 p_1} = \frac{\left(\frac{1}{2} - p_1\right)^2 - \frac{1}{4} - p_1^2}{p_1} = -1.$$

Следовательно, $\theta_\alpha = \theta_1 = \pi$. Тогда (5) сводится к равенству $\alpha = \frac{2n-1}{2m+1}$ при некоторых $m, n \in \mathbb{Z}$.

Из следствия 3 вытекают следующие замечания.

Следствие 4. *Если $p_0 = \frac{1}{2}$ и $\alpha = -1$, то х.ф. f имеет нули.*

Следствие 5. *Если $p_0 = \frac{1}{2}$ и α — иррациональное число, то х.ф. f не имеет нулей.*

Теперь перейдем к критериям принадлежности F к классу квази-безгранично делимых ф.р.

Теорема 2. *Если $\frac{1}{3} \leqslant p_0 \leqslant \frac{1}{2}$ и α – рациональное число, то F является квази-безгранично делимой тогда и только тогда, когда f не имеет нулей, а именно, когда не выполнено условие* (5).

При рациональном α ф.р. F соответствует решетчатому вероятностному закону. Поэтому эта теорема является прямым следствием теоремы 1 и общего известного факта (уже упомянутого во введении) о том, что если х.ф. решетчатого вероятностного закона не имеет нулей, то ее ф.р. квази-безгранично делима (см. [9, следствие 8.2]).

Здесь следует также отметить, что если х.ф. f с рациональным α не имеет нулей, то она отделена от нуля, т.е. $\inf_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| > 0$. Действительно, ведь при таких условиях $|f(t)|$ будет являться периодической функцией и, как непрерывная функция на отрезке своего периода, она достигает своего наименьшего значения.

Теорема 3. *Если $\frac{1}{3} \leqslant p_0 \leqslant \frac{1}{2}$ и α – иррациональное число, то F не является квази-безгранично делимой.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуется одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть F – квази-безгранично делимая ф.р. с х.ф. f. Тогда существует такое $M>0$, что для любого $\delta\in(0,1)$ выполнено*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{\bigl|f(t-\delta)f(t+\delta)\bigr|}{|f(t)|^2}\leqslant M.$$

Доказательство леммы 1. Из определения квази-безграничной ф.р. вытекает, что х.ф. f не имеет нулей на вещественной прямой. Пусть $\operatorname{Ln} f(t)$, $t\in\mathbb{R}$, обозначает логарифм х.ф. $f(t)$, определенный по непрерывности с условием $\operatorname{Ln} f(0)=0$. Для $\operatorname{Ln} f(t)$, $t\in\mathbb{R}$, верно представление, фигурирующее в экспоненте из (1). Несложно проверить, что

$$\operatorname{Ln} f(t)-\frac{\operatorname{Ln} f(t-\delta)+\operatorname{Ln} f(t+\delta)}{2}$$
$$=-\frac{\sigma^2\delta^2}{2}+\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} e^{itx}\bigl(1-\cos(x\delta)\bigr)d\Lambda(x),\quad t\in\mathbb{R},\quad \delta\in(0,1).$$

Тогда для любых $t\in\mathbb{R}$ и $\delta\in(0,1)$

$$\left|\operatorname{Ln} f(t)-\frac{\operatorname{Ln} f(t-\delta)+\operatorname{Ln} f(t+\delta)}{2}\right|\leqslant\frac{\sigma^2\delta^2}{2}+\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\bigl(1-\cos(x\delta)\bigr)d|\Lambda|(x)$$
$$=\frac{\sigma^2\delta^2}{2}+\int\limits_{0<|x|<1}\bigl(1-\cos(x\delta)\bigr)d|\Lambda|(x)+2\int\limits_{|x|>1}d|\Lambda|(x).$$

Воспользуемся известным неравенством $1-\cos(x)\leqslant\frac{x^2}{2}$ и далее тем, что $\delta\in(0,1)$:

$$\left|\operatorname{Ln} f(t)-\frac{\operatorname{Ln} f(t-\delta)+\operatorname{Ln} f(t+\delta)}{2}\right|$$
$$\leqslant\frac{\sigma^2\delta^2}{2}+\frac{\delta^2}{2}\int\limits_{0<|x|<1}x^2d|\Lambda|(x)+2\int\limits_{|x|>1}d|\Lambda|(x)$$
$$\leqslant\frac{\sigma^2}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{0<|x|<1}x^2d|\Lambda|(x)+2\int\limits_{|x|>1}d|\Lambda|(x).$$

Последнее выражение (обозначим его через L) конечно в силу условий из определения квази-безгранично делимой ф.р. Тогда для любых $t\in$

$\mathbb{R}$ и $\delta \in (0,1)$ верна оценка

$$\frac{\left|f(t-\delta)f(t+\delta)\right|}{|f(t)|^2} \leqslant e^{2L},$$

из которой следует нужное утверждение. □

Доказательство теоремы 3. Если х.ф. f имеет нули на вещественной прямой, то ф.р. F не является квази-безгранично делимой (см. во введении описание квази-безгранично делимых ф.р.). Далее предполагаем, что $f(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Покажем, что в этом случае условие из леммы 1 для х.ф. f не выполняется. Рассмотрим модуль из этого условия:

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(t-\delta)f(t+\delta)}{f(t)^2}\right| &= \left|\frac{f(t)^2 - f(t-\delta)f(t+\delta)}{f(t)^2} - 1\right| \\ &\geqslant \frac{\left|f(t)^2 - f(t-\delta)f(t+\delta)\right|}{|f(t)|^2} - 1.\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь

$$\begin{aligned}f(t)^2 &= \left(p_0 + p_\alpha e^{it\alpha} + p_1 e^{it}\right)^2 \\ &= p_0^2 + (p_\alpha e^{it\alpha})^2 + (p_1 e^{it})^2 + 2p_0 p_\alpha e^{it\alpha} + 2p_0 p_1 e^{it} + 2p_\alpha p_1 e^{it\alpha} e^{it}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}f(t-\delta)f(t+\delta) &= \left(p_0 + p_\alpha e^{i(t-\delta)\alpha} + p_1 e^{i(t-\delta)}\right)\left(p_0 + p_\alpha e^{i(t+\delta)\alpha} + p_1 e^{i(t+\delta)}\right) \\ &= p_0^2 + (p_\alpha e^{it\alpha})^2 + (p_1 e^{it})^2 + p_0 p_\alpha e^{it\alpha}(e^{-i\delta\alpha} + e^{i\delta\alpha}) \\ &\quad + p_0 p_1 e^{it}(e^{-i\delta} + e^{i\delta}) + p_\alpha p_1 e^{it\alpha} e^{it}\left(e^{i\delta(1-\alpha)} + e^{-i\delta(1-\alpha)}\right) \\ &= p_0^2 + (p_\alpha e^{it\alpha})^2 + (p_1 e^{it})^2 + 2p_0 p_\alpha e^{it\alpha}\cos(\delta\alpha) \\ &\quad + 2p_0 p_1 e^{it}\cos(\delta) + 2p_\alpha p_1 e^{it\alpha} e^{it}\cos(\delta(1-\alpha)).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}f(t)^2 - f(t-\delta)f(t+\delta) &= 2p_0 p_\alpha e^{it\alpha}\left(1 - \cos(\delta\alpha)\right) + 2p_0 p_1 e^{it}\left(1 - \cos(\delta)\right) \\ &\quad + 2p_\alpha p_1 e^{it\alpha} e^{it}\left(1 - \cos(\delta(1-\alpha))\right).\end{aligned}$$

Определим θ_α и θ_1 как в (4). Тогда, как видно из доказательства теоремы 1, верно

$$p_0 + p_\alpha e^{i\theta_\alpha} + p_1 e^{-i\theta_1} = 0. \tag{11}$$

По предположению α – иррациональное число, тогда 1 и α линейно независимы, т.е. равенство $n \cdot 1 + m \cdot \alpha = 0$ с целыми n и m возможно лишь в случае $n = 0$ и $m = 0$. Тогда по теореме Кронекера(см. [2, с. 106 и 109]) для любого $\varepsilon > 0$ существует t_ε, такое что $|e^{it_\varepsilon\alpha} - e^{i\theta_\alpha}| < \varepsilon$ и $|e^{it_\varepsilon} - e^{-i\theta_1}| < \varepsilon$. Будем далее брать $\varepsilon \in (0,1)$ и указанным образом выбирать для него t_ε. С учетом этого и равенства (11), оценим сверху $|f(t_\varepsilon)|$:

$$\begin{aligned} |f(t_\varepsilon)| &= |p_0 + p_\alpha e^{it_\varepsilon\alpha} + p_1 e^{it_\varepsilon}| \\ &\leqslant |p_0 + p_\alpha e^{i\theta_\alpha} + p_1 e^{-i\theta_1}| + p_\alpha|e^{it_\varepsilon\alpha} - e^{i\theta_\alpha}| + p_1|e^{it_\varepsilon} - e^{-i\theta_1}| \\ &< (p_\alpha + p_1)\varepsilon \\ &< \varepsilon. \end{aligned} \tag{12}$$

Далее оценим величину

$$\begin{aligned} |f(t_\varepsilon)^2 - f(t_\varepsilon-\delta)f(t_\varepsilon+\delta)| &= \big|2p_0p_\alpha e^{it_\varepsilon\alpha}\big(1-\cos(\delta\alpha)\big) + 2p_0p_1e^{it_\varepsilon}\big(1-\cos(\delta)\big) \\ &\quad + 2p_\alpha p_1 e^{it_\varepsilon\alpha}e^{it_\varepsilon}\big(1-\cos(\delta(1-\alpha))\big)\big| \\ &\geqslant \big|2p_0p_\alpha e^{i\theta_\alpha}\big(1-\cos(\delta\alpha)\big) + 2p_0p_1e^{-i\theta_1}\big(1-\cos(\delta)\big) \\ &\quad + 2p_\alpha p_1 e^{i\theta_\alpha}e^{-i\theta_1}\big(1-\cos(\delta(1-\alpha))\big)\big| \\ &\quad - 2\varepsilon p_0p_\alpha\big(1-\cos(\delta\alpha)\big) - 2\varepsilon p_0p_1\big(1-\cos(\delta)\big) \\ &\quad - 4\varepsilon p_\alpha p_1\big(1-\cos(\delta(1-\alpha))\big). \end{aligned}$$

Положим $\delta = \delta_\varepsilon = \varepsilon^{1/4}$ и воспользуемся тем, что

$$1 - \cos x = \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^4}{4!} + O(x^6), \quad |x| < 1.$$

Тогда

$$|f(t_\varepsilon)^2 - f(t_\varepsilon-\delta_\varepsilon)f(t_\varepsilon+\delta_\varepsilon)| \geqslant |S_1\varepsilon^{1/2} - S_2\varepsilon| + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \varepsilon \in (0,1), \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &:= \alpha^2 p_0p_\alpha e^{i\theta_\alpha} + p_0p_1e^{-i\theta_1} + (1-\alpha)^2 p_\alpha p_1 e^{i\theta_\alpha}e^{-i\theta_1}, \\ S_2 &:= \tfrac{2}{4!}\big(\alpha^4 p_0p_\alpha e^{i\theta_\alpha} + p_0p_1e^{-i\theta_1} + (1-\alpha)^4 p_\alpha p_1 e^{i\theta_\alpha}e^{-i\theta_1}\big). \end{aligned}$$

Если $S_1 \neq 0$, то

$$|f(t_\varepsilon)^2 - f(t_\varepsilon-\delta_\varepsilon)f(t_\varepsilon+\delta_\varepsilon)| \geqslant |S_1|\varepsilon^{1/2} - |S_2|\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \varepsilon \in (0,1).$$

Тогда, с учетом (10) и (12), получаем неравенство

$$\frac{|f(t_\varepsilon-\delta_\varepsilon)f(t_\varepsilon+\delta_\varepsilon)|}{|f(t_\varepsilon)|^2} \geqslant |S_1|\varepsilon^{-3/2} - |S_2|\varepsilon^{-1} + O(\varepsilon^{-1/2}) - 1, \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{14}$$

Пусть $S_1 = 0$. Заметим, что

$$S_1 = \alpha^2 p_\alpha e^{i\theta_\alpha}(p_0 + p_1 e^{-i\theta_1}) - 2\alpha p_\alpha p_1 e^{i\theta_\alpha} e^{-i\theta_1} + p_1 e^{-i\theta_1}(p_\alpha e^{i\theta_\alpha} + p_0).$$

Учитывая (11), получаем

$$\begin{aligned} S_1 &= -\alpha^2 (p_\alpha e^{i\theta_\alpha})^2 - 2\alpha p_\alpha p_1 e^{i\theta_\alpha} e^{-i\theta_1} - (p_1 e^{-i\theta_1})^2 \\ &= -\big(\alpha p_\alpha e^{i\theta_\alpha} + p_1 e^{-i\theta_1}\big)^2. \end{aligned}$$

Тогда имеем $\alpha p_\alpha e^{i\theta_\alpha} + p_1 e^{-i\theta_1} = 0$. В частности, это дает $\alpha p_\alpha \sin(\theta_\alpha) - p_1 \sin(\theta_1) = 0$, в то время как из (11) вытекает $p_\alpha \sin(\theta_\alpha) - p_1 \sin(\theta_1) = 0$. Т.к. $\alpha \neq 1$ (α – иррациональное число), отсюда находим, что $\theta_\alpha = \theta_1 = \pi$. Подставляя эти значения в (11), получаем, что $p_0 = p_\alpha + p_1 = 1 - p_0$, т.е. $p_0 = \frac{1}{2}$. Аналогичная подстановка в равенство $\alpha p_\alpha e^{i\theta_\alpha} + p_1 e^{-i\theta_1} = 0$ дает $\alpha p_\alpha + p_1 = 0$. В итоге мы имеем $p_0 = p_\alpha + p_1 = \frac{1}{2}$ и $\alpha p_\alpha + p_1 = 0$. Отсюда получаем $p_\alpha = \frac{1}{2(1-\alpha)}$ и $p_1 = -\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}$.

Таким образом, если $S_1 = 0$, то $\theta_\alpha = \theta_1 = \pi$, $p_0 = \frac{1}{2}$, $p_\alpha = \frac{1}{2(1-\alpha)}$, $p_1 = -\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}$. При этих значениях вычислим S_2:

$$\begin{aligned} S_2 &= \tfrac{2}{4!}\big(\alpha^4 p_0 p_\alpha e^{i\theta_\alpha} + p_0 p_1 e^{-i\theta_1} + (1-\alpha)^4 p_\alpha p_1 e^{i\theta_\alpha} e^{-i\theta_1}\big) \\ &= \tfrac{2}{4!}\Big(-\tfrac{\alpha^4}{4(1-\alpha)} + \tfrac{\alpha}{4(1-\alpha)} - \tfrac{(1-\alpha)^4\alpha}{4(1-\alpha)^2}\Big) \\ &= \tfrac{\alpha}{4!\cdot 2(1-\alpha)} \cdot \big(1 - \alpha^3 - (1-\alpha)^3\big) \\ &= \tfrac{\alpha}{4!\cdot 2} \cdot (1 + \alpha + \alpha^2 - 1 + 2\alpha - \alpha^2) \\ &= \tfrac{\alpha^2}{16}. \end{aligned}$$

Видим, что $S_2 > 0$.

Вернемся к неравенству (13). Подставляя в него значения $S_1 = 0$ и $S_2 = \frac{\alpha^2}{16}$, получим:

$$|f(t_\varepsilon)^2 - f(t_\varepsilon - \delta_\varepsilon) f(t_\varepsilon + \delta_\varepsilon)| \geqslant \tfrac{\alpha^2}{16}\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \varepsilon \in (0,1).$$

Тогда, с учетом (12), имеем

$$\frac{|f(t_\varepsilon - \delta_\varepsilon) f(t_\varepsilon + \delta_\varepsilon)|}{|f(t_\varepsilon)|^2} \geqslant \tfrac{\alpha^2}{16} \cdot \varepsilon^{-1} + O(\varepsilon^{-1/2}) - 1, \quad \varepsilon \in (0,1). \qquad (15)$$

Неравенства (14) и (15) противоречат свойству из леммы 1 для х.ф. квази-безгранично делимой ф.р. Действительно, ведь для любого M

найдется $\varepsilon \in (0,1)$, а вместе с ним $t_\varepsilon \in \mathbb{R}$ и $\delta_\varepsilon \in (0,1)$, такие что

$$\frac{|f(t_\varepsilon - \delta_\varepsilon)f(t_\varepsilon + \delta_\varepsilon)|}{|f(t_\varepsilon)|^2} \geqslant M.$$

В итоге х.ф. f не соответствует квази-безгранично делимой ф.р. $\square$

Из доказательства теоремы 3 видно, что в случае $\frac{1}{3} \leqslant p_0 \leqslant \frac{1}{2}$ и иррационального α х.ф. f не отделена от нуля, т.е. $\inf_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| = 0$.

В итоге, собирая вместе сделанные замечания, получаем следующий факт.

Замечание 1. Ф.р. F является квази-безгранично делимой, если ее х.ф. f отделена от нуля, т.е. $\inf_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| > 0$.

Представляет интерес выяснить, является ли условие отделимости от нуля х.ф. произвольного дискретного закона необходимым и достаточным для того, чтобы соответствующая ф.р. была квази-безгранично делимой.

Список литературы

1. В. М. Золотарев, *Современная теория суммирования независимых случайных величин.* М.: Наука, 1986.
2. Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции.* М.: ГИТТЛ, 1953.
3. Ю. В. Линник, И. В. Островский, *Разложения случайных величин и векторов.* М.: Наука, 1972.
4. Е. Лукач, *Характеристические функции.* М.: Наука, 1979.
5. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* М.: Наука, 1987.
6. R. Cuppens, *Decomposition of Multivariate Probabilities.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Probability and Mathematical Statistics, Vol. 29.
7. N. Demni, Z. Mouayn, *Analysis of generalized Poisson distributions associated with higher Landau levels.* — Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **18**, No. 4 (2015), 1550028.13.
8. A. A. Khartov, *Compactness criteria for quasi-infinitely divisible distributions on the integers.* — Statist. Probab. Letters **153** (2019), 1–6.
9. A. Lindner, L. Pan, K. Sato, *On quasi-infinitely divisible distributions.* — Trans. Amer. Math. Soc. **370** (2018), 8483–8520.
10. A. Lindner, K. Sato, *Properties of stationary distributions of a sequence of generalized Ornstein-Uhlenbeck processes.* — Math. Nachr. **284**, No. 17–18 (2011), 2225–2248.
11. K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions.* Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

12. F. W. Steutel, K. van Harn, *Infinite Divisibility of Probability Distributions on the Real Line*, Marcel Dekker Inc., New York, 2004.
13. H. Zhang, Y. Liu, B. Li, *Notes on discrete compound Poisson model with applications to risk theory.* — Insurance Math. Econom. **59** (2014), 325–336.

Khartov A. A., Alexeev I. A. Quasi-infinite divisibility and three-point probability laws.

Discrete three-point probability laws are considered. We obtain necessary and sufficient conditions to belong to the new class of quasi-infinitely divisible laws. The results are formulated in terms of the points and their probabilities, and also with the property of separability from zero of the characteristic functions.

Смоленский государственный университет,
ул. Пржевальского д. 4,
214000, Смоленск, Россия
E-mail: alexeykhartov@gmail.com

Поступило 23 ноября 2020 г.

Международный математический
институт им. Леонарда Эйлера,
Песочная набережная, 10,
197022, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: vanyalexeev@list.ru