Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 495, 2020 г.

Б. П. Харламов

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ ТОГО, ЧТО ДИФФУЗИОННЫЙ ПРОЦЕСС НИКОГДА НЕ ДОСТИГНЕТ ГРАНИЦ НЕКОТОРОГО ИНТЕРВАЛА

Введение

В работе [6] рассматривался случай недостижимости границ интервала значений марковского диффузионного процесса $X(t)$ без обрыва, соответствующего уравнению

$$\frac{1}{2}\,y'' + A(x)y' = 0. \tag{1}$$

Процесс $X(t)$ в рассмотренном случае это процесс с областью определения $[0,\infty)$ и областью значений (a,b), где $-\infty < a < b < \infty$.

Множитель $1/2$ в данном выражении обычно сохраняется как напоминание об уравнении Колмогорова о диффузионном марковском процессе (см., например, [1, с. 215]). Недостижимость границ интервала (a,b) достигалась за счёт роста абсолютной величины коэффициента A при приближении значения процесса к этим границам (к левой границе со знаком плюс, к правой границе – минус). Некоторые результаты о недостижимости границ интервала содержатся в книге Гихмана и Скорохода [2, с. 164], в которой исследовалась задача о моменте первого выхода из интервала и точке первого выхода из интервала в терминах стохастических дифференциальных уравнений. В книге Чёрного и Энгельберта [7] подводился итог исследованиям в этой области, где проблеме недостижимости границ диффузионным процессом посвящена вторая глава, в которой исследуется поведение процесса в односторонних окрестностях сингулярных точек стохастических дифференциальных уравнений.

В работе [6] исследовалась та же задача с точки зрения диффузимонных полумарковских процессов. В теории этих процессов решение уравнения (1) с теми или иными краевыми условиями непосредственно равнялось вероятностям первого выхода процесса на правую или

Ключевые слова: полумарковская переходная функция, функциональное уравнение, дифференциальное уравнение, бесконечное произведение, расходящийся ряд.

левую границу интервала, что приводило к простому решению задачи о недостижимости границ. Фактически – к выводу необходимых и достаточных условий недостижимости границ в терминах коэффициента A.

Как было отмечено в работе [6], добавление к левой части слагаемого $-B(x)y$ с неотрицательной (не равной нулю тождественно) функцией B выводит процесс из класса марковских, для которых этот коэффициент характеризует обрыв – выход из интервала (a, b) в некоторую точку $\delta \notin (-\infty, \infty)$ и потому не относится к задаче о недостижимости границ отрезка. Добавление этого слагаемого приводит к уравнению, для которого нет решения в конечном виде. Именно это уравнение исследуется в данной статье.

Итак, в настоящей работе рассматривается уравнение

$$\frac{1}{2}\, y'' + A(x)\, y' - B(x)\, y = 0, \tag{2}$$

где функции B непрерывна, неотрицательна на интервале (a, b), и не равна тождественно нулю на этом интервале. Такое предположение допускает возможность бесконечной остановки процесса $X(t)$ внутри этого интервала. В этом случае момента первого выхода из него не существует. Остаётся предположить, что $X(t)$ не марковский процесс (см., например, [5]), и что для него бесконечная остановка имеет смысл и определяется в терминах полумарковских переходных функций. Заметим, что момент начала бесконечного интервала не является марковским моментом. Для марковского диффузионного процесса, связанного с таким уравнением, обычно предполагается (см., например, [1]), что такой процесс обрывается в некоторый случайный марковский момент времени $\tau_{(a,b)} < \infty$. Сама постановка задачи о недостижимости, например, левой границы интервала в марковском случае не лишена некоторого противоречия. Предполагается, что вероятность недостижимости левой границы равна вероятности того, что $\tau_{(a,b)}$ на множестве $X(\tau_{(a,b)}) = a$ равно бесконечности, и чтобы придать этому понятию какой-то смысл, прибавляется условие: если $\tau_{(a,b)} < \infty$, то $X(\tau_{(a,b)}) = b$. Поведение процесса на левой границе определяется его поведением на правой. Вместе с тем, недостижимость любой из границ – это локальное свойство вероятностей вблизи этих границ.

Одномерный диффузионный полумарковский процесс. Рассматривается одномерный диффузионный полумарковский процесс

$X(t)$, определённый на полупрямой $[0,\infty)$ со значениями в некоторой области, принадлежащей $\mathbb{R} \equiv (-\infty,\infty)$. Процесс однороден во времени и полностью определяется набором всех своих полумарковских переходных функций $Y_{(a,b)}(T,\, a\,|\,x)$ и $Y_{(a,b)}(T,\, b\,|\,x)$, где $x \in (a,b)$, $T \subset (0,\infty)$. Выражение $Y_{(a,b)}(T,\, \gamma\,|\,x)$ означает условную вероятность (относительно условия $X(0) = x$) события {момент первого выхода из интервала (a,b) принадлежит T, γ является точкой первого выхода из интервала (a,b)}, где γ – одно из двух значений: $\gamma = a$ или $\gamma = b$. Для одномерного диффузионного полумарковского процесса эти условные вероятности согласованы двумя уравнениями:

$$Y_{(a,b)}((0,t),\, a\,|\,x) = \int\limits_0^t Y_{(c,d)}(dy,\, c\,|\,x)\, Y_{(a,b)}((0,t-y),\, a\,|\,c)$$

$$+ \int\limits_0^t Y_{(c,d)}(dy,\, d\,|\,x)\, Y_{(a,b)}((0,t-y),\, a\,|\,d),$$

$$Y_{(a,b)}((0,t),\, b\,|\,x) = \int\limits_0^t Y_{(c,d)}(dy,\, c\,|\,x)\, Y_{(a,b)}((0,t-y),\, b\,|\,c)$$

$$+ \int\limits_0^t Y_{(c,d)}(dy,\, d\,|\,x)\, Y_{(a,b)}((0,t-y),\, b\,|\,d),$$

где $(c,d) \subset (a,b)$. Обозначим

$$g_{(a,b)}(x) \equiv Y_{(a,b)}((0,\infty),\, a\,|\,x), \quad h_{(a,b)}(x) \equiv Y_{(a,b)}((0,\infty),\, b\,|\,x).$$

Кроме того, определив эти функции в точках $x \notin (a,b)$ следующим интуитивно понятным образом: 1) $g_{(a,b)}(b) = 0$, 2) $g_{(a,b)}(a) = 1$, 3) $h_{(a,b)}(a) = 0$, 4) $h_{(a,b)}(b) = 1$, мы получаем для семейства этих функций условия согласования:

$$g_{(a,b)}(x) = g_{(c,d)}(x)\, g_{(a,b)}(c) + h_{(c,d)}(x)\, g_{(a,b)}(d), \tag{3}$$

$$h_{(a,b)}(x) = g_{(c,d)}(x)\, h_{(a,b)}(c) + h_{(c,d)}(x)\, h_{(a,b)}(d). \tag{4}$$

В частности, при $(c,d) = (a,b)$ получаем

$$g_{(a,b)}(x) = g_{(a,b)}(x)\, g_{(a,b)}(a) + h_{(a,b)}(x)\, g_{(a,b)}(b),$$
$$h_{(a,b)}(x) = g_{(a,b)}(x)\, h_{(a,b)}(a) + h_{(a,b)}(x)\, h_{(a,b)}(b),$$

и следовательно, при положительности функций $g_{(a,b)}(x)$ и $h_{(a,b)}(x)$ внутри интервала справедливы утверждения:

12) $g_{(a,b)}(b) = 0$ тогда и только тогда, когда $g_{(a,b)}(a) = 1$,

34) $h_{(a,b)}(b) = 1$ тогда и только тогда, когда $h_{(a,b)}(a) = 0$.

Кроме того значения обеих этих функций не больше единицы и поэтому при $a = c < x < d < b$ имеем

$$h_{(a,b)}(x) = h_{(a,d)}(x)\, h_{(a,b)}(d) \leqslant h_{(a,b)}(d),$$

то есть $h_{(a,b)}(x)$ не убывает. И если $a < c < x < d = b$, то

$$g_{(a,b)}(x) = g_{(c,b)}(x)\, g_{(a,b)}(c) \leqslant g_{(a,b)}(c),$$

то есть $g_{(a,b)}(x)$ не возрастает. В дальнейшем будем предполагать, что на данном интервале обе эти функции непрерывны справа.

Одномерный непрерывный полумарковский процесс называется диффузионным в (a, b), если в окрестности любой точки x, принадлежащей (a, b) вместе с некоторым интервалом $(x-r, x+r)$, существуют функции: $A(x)$ непрерывно дифференцируемая и $B(x)$ неотрицательная непрерывная, такие что при $r > 0$, $r \to 0$

$$g_{(x-r,x+r)}(x) = \frac{1}{2}(1 - A(x)r - B(x)r^2) + o(r^2), \tag{5}$$

$$h_{(x-r,x+r)}(x) = \frac{1}{2}(1 + A(x)r - B(x)r^2) + o(r^2). \tag{6}$$

Легко проверить следующее утверждение, вытекающее из наших предположений: функции $g_{(a,b)}(x)$, $h_{(a,b)}(x)$ непрерывно дифференцируемы. Если они к тому же дважды дифференцируемы на этом интервале, то они удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2}\, y'' + A(x)y' - B(x)y = 0. \tag{7}$$

Заметим, что пределы справа и слева на концах интервала удовлетворяют неравенствам

$$g_{(a,b)}(a+) \leqslant 1, \quad h_{(a,b)}(a+) \geqslant 0, \quad g_{(a,b)}(b-) \geqslant 0, \quad h_{(a,b)}(b-) \leqslant 1,$$

и, в соответствии с условиями 1)–4), эти функции могут иметь на концах интервала разрывы (функция $g_{(a,b)}(x)$ – отрицательные скачки, а функция $h_{(a,b)}(x)$ – положительные). Как будет показано ниже, эти разрывы связаны с недостижимостью концов интервала (a, b).

Для упрощения записи в дальнейшем будем исследовать уравнение вида

$$f'' + A(x)f' - B(x)f = 0$$

(без множителя 1/2) и соответствующие ему функции $g_{(a,b)}(x)$ и $h_{(a,b)}(x)$, учитывая этот множитель только при окончательной формулировке результатов.

Недостижимость правой границы. Граница b называется недостижимой, если для любой точки $a < x_0 < b$ справедливо $h_{(a,b)}(x_0) = 0$.

Рассмотрим формулу

$$h_{(a,b)}(x) = h_{(a,d)}(x)h_{(a,b)}(d). \tag{8}$$

Пусть $(x_n)_0^\infty$ – строго возрастающая последовательность точек, у которых $x_0 \in (a,b)$, а также $x_n \to b$. Отсюда и из (8) следует равенство

$$h_{(a,x_n)}(x_0) = \prod_{k=1}^{n} h_{(a,x_k)}(x_{k-1}), \quad x_k > x_{k-1},$$

которое можно продолжить

$$h_{(a,b)}(x_0) = \prod_{k=1}^{\infty} h_{(a,x_k)}(x_{k-1}).$$

Отсюда следует, что недостижимость этой границы равносильна равенству нулю соответствующего бесконечного произведения (произведение расходится). Это, в свою очередь, равносильно расходимости ряда (см., например, [4, с. 357])

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - h_{(a,x_k)}(x_{k-1})) = \infty.$$

Следующая формула выведена в книге [5], с.167:

$$h_{(c,d)}(x) = \frac{x-c}{d-c} + \int\limits_{c}^{d} K_{(c,d)}(x,t)\, h_{(c,d)}(t)\, dt,$$

где

$$K_{(c,d)}(x,t) = \begin{cases} \frac{d-x}{d-c}[-A(t) - (B(t) + A'(t))(t-c)], & t < x \\ \\ \frac{x-c}{d-c}[A(t) - (B(t) + A'(t))(d-t)], & t > x. \end{cases}$$

В частности, при $A = 0$ для уравнения $f'' - Bf = 0$ имеем

$$K_{(c,d)}(x,t) = \begin{cases} \frac{d-x}{d-c}[-B(t)(t-c)], & t < x \\ \\ \frac{x-c}{d-c}[-B(t)(d-t)], & t > x, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
h_{(c,d)}(x) &= \frac{x-c}{d-c} - \int\limits_c^x \frac{d-x}{d-c}\, B(t)\,(t-c)\, h_{(c,d)}(t)\, dt \\
&\quad - \int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c}\, B(t)\,(d-t)\, h_{(c,d)}(t)\, dt, \\
1 - h_{(c,d)}(x) &= \frac{d-x}{d-c} + \int\limits_c^x \frac{d-x}{d-c}\, B(t)\,(t-c)\, h_{(c,d)}(t)\, dt \\
&\quad + \int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c}\, B(t)\,(d-t)\, h_{(c,d)}(t)\, dt \\
&\geqslant \frac{d-x}{d-c} + h_{(c,d)}(x) \int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c}\, B(t)\,(d-t)\, dt, \\
1 - h_{(c,d)}(x) - h_{(c,d)}(x) &\int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c} B(t)\,(d-t)\, dt \geqslant \frac{d-x}{d-c}, \\
\frac{x-c}{d-c} &\geqslant h_{(c,d)}(x) \left[1 + \int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c} B(t)\,(d-t)\, dt \right], \\
h_{(c,d)}(x) &\leqslant \frac{x-c}{d-c} \left[1 + \int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c} B(t)\,(d-t)\, dt \right]^{-1}, \\
1 - h_{(c,d)}(x) &\geqslant 1 - \frac{x-c}{d-c} \left[1 + \int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c}\, B(t)\,(d-t)\, dt \right]^{-1}
\end{aligned}$$

$$\geqslant 1 - \left[1 + \int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c}\, B(t)\,(d-t)\,dt\right]^{-1}$$
$$= \int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c}\, B(t)\,(d-t)\,dt \left[1 + \int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c}\, B(t)\,(d-t)\,dt\right]^{-1}.$$

Учитывая неравенства $a < x_{k-1} < x_k < b$ и свойство строгого возрастания функции $f(x) \equiv x/(1+x)$, полагая $c \equiv a$, $d \equiv x_k$, $x \equiv x_{k-1}$, получаем

$$1 - h_{(a,x_k)}(x_{k-1})$$
$$\geqslant \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{x_{k-1}-a}{x_k-a}\, B(t)\,(x_k-t)\,dt \left[1 + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{x_{k-1}-a}{x_k-a}\, B(t)\,(x_k-t)\,dt\right]^{-1}$$
$$\geqslant \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{x_0-a}{b-a}\, B(t)\,(x_k-t)\,dt \left[1 + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{x_0-a}{b-a} B(t)\,(x_k-t)\,dt\right]^{-1}.$$

Условие недостижимости правой границы интервала равносильно

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{x_0-a}{b-a} B(t)\,(x_k-t)\,dt \left[1 + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{x_0-a}{b-a} B(t)\,(x_k-t)\,dt\right]^{-1} = \infty.$$

Достаточное условие недостижимости правой границы интервала, например, такое: $(\exists \epsilon > 0)$ $(\forall k \geqslant 1)$

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{x_0-a}{b-a}\, B(t)\,(x_k-t)\,dt \left[1 + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{x_0-a}{b-a}\, B(t)\,(x_k-t)\,dt,\right]^{-1} \geqslant \epsilon$$

слишком громоздко и трудно проверяемо.

Будем искать более простое достаточное условие. Зададим конкретную последовательность $(x_n)_0^{\infty}$:

$$(\forall k \geqslant 1) \quad x_k = x_0 + (b - x_0)(1 - 2^{-k}),$$

откуда $r_k = (b - x_0)2^{-k}$, где $r_k \equiv x_k - x_{k-1}$. Более простое условие достаточности:

$$(\exists\epsilon > 0)\ (\forall k \geqslant 1) \quad \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} B(t)\,(x_k - t)\,dt \geqslant \epsilon.$$

Предположим, что $B(\,\cdot\,)$ не убывает на интервале (x_0, b). В этом случае для выполнения предыдущего условия достаточно $(\exists\epsilon > 0)\ (\forall k \geqslant 1)$

$$B(x_{k-1}) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - t)\,dt \geqslant \epsilon,$$

что равносильно

$$B(x_{k-1}) \geqslant \epsilon \left[\frac{r_k^2}{2}\right]^{-1}.$$

Рассмотрим продолжение функции x_n, заданной для всех целых $n \geqslant 0$, на интервал всех $t \geqslant 0$:

$$x_t = x_0 + (b - x_0)(1 - 2^{-t}).$$

Отсюда $r_t = (b - x_0)/2^t$. Используя выражение множителя 2^t в терминах x_t:

$$2^t = \frac{b - x_0}{b - x_t},$$

получаем продолжение функции $B(x_n)$ на все $z \in [x_0, b)$ и условие достаточности в терминах $B(z)$:

$$B(z) \geqslant \frac{2\epsilon}{r_{t+1}^2} = \frac{8\epsilon}{(b - z)^2}.$$

Недостижимость левой границы. Граница a называется недостижимой, если для любой точки $y_0 > a$ справедливо $g_{(a,b)}(y_0) = 0$.

Рассмотрим формулу

$$g_{(a,b)}(x) = g_{(c,b)}(x) g_{(a,b)}(c). \tag{9}$$

Пусть $(y_n)_0^\infty$ – строго убывающая последовательность точек, у которых $y_0 \in (a, b)$, а также $y_n \to a$. Отсюда и из (9) следует равенство

$$g_{(y_n,b)}(y_0) = \prod_{k=1}^{n} g_{(y_k,b)}(y_{k-1}), \quad y_k < y_{k-1},$$

которое можно продолжить

$$g_{(a,b)}(y_0) = \prod_{k=1}^{\infty} g_{(y_{k-1},b)}(y_k).$$

Из этого, в свою очередь, вытекает, что недостижимость левой границы равносильна расходимости ряда (см., например, [4, с. 357]),

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - g_{(a,y_{k-1})}(y_k)) = \infty. \tag{10}$$

Следующая формула выведена в книге [5], с. 167:

$$g_{(c,d)}(x) = \frac{d-x}{d-c} + \int\limits_c^d K_{(c,d)}(x,t) g_{(c,d)}(t)\, dt,$$

где ядро $K_{(c,d)}(x,t)$ определено выше. В частности, при $A \equiv 0$

$$K_{(c,d)}(x,t) = \begin{cases} \frac{d-x}{d-c}[-B(t)(t-c)], & t < x \\ \frac{x-c}{d-c}[-B(t)(d-t)], & t > x. \end{cases}$$

Зададим конкретную последовательность

$$y_n = a + (y_0 - a)2^{-n}$$

и её продолжение на все $t > 0$

$$y_t = a + (y_0 - a)2^{-t}. \tag{11}$$

Для данной последовательности (y_n) имеем

$$r_n \equiv y_{n-1} - y_n = (y_0 - a)2^{-n},$$

а также

$$\begin{aligned} &1 - g_{(y_n,b)}(y_{n-1}) \\ &\geqslant \frac{r_n}{b - y_n} + \int\limits_{y_n}^{y_{n-1}} \frac{b - y_{n-1}}{b - y_n} B(z)(z - y_n) g_{(y_n,b)}(z)\, dz \\ &\geqslant \frac{r_n}{b - y_n} + g_{(y_n,b)}(y_{n-1}) L_n, \end{aligned}$$

где

$$L_n \equiv \frac{b - y_{n-1}}{b - y_n} \int\limits_{y_n}^{y_{n-1}} B(z)(z - y_n)\, dz.$$

Отсюда

$$L_n \geqslant \frac{b-y_0}{b-a} \int\limits_{y_n}^{y_{n-1}} B(z)(z-y_n)\,dz,$$

$$\frac{L_n}{1+L_n} \geqslant \left(\frac{b-y_0}{b-a} \int\limits_{y_n}^{y_{n-1}} B(z)(z-y_n)\,dz\right) \times \left[1+\frac{b-y_0}{b-a} \int\limits_{y_n}^{y_{n-1}} B(z)(z-y_n)\,dz\right]^{-1},$$

и ряд (10) расходится, если существует $\epsilon > 0$, при котором

$$\int\limits_{y_n}^{y_{n-1}} B(z)(z-y_n)\,dz \geqslant \epsilon.$$

Будем предполагать, что на интервале (a, y_0) функция $B(z)$ не возрастает. Тогда

$$L_n \geqslant \frac{b-y_0}{b-a} B(y_n) \int\limits_{y_n}^{y_{n-1}} (z-y_n)\,dz.$$

Следовательно, ряд (10) расходится, если существует $\epsilon > 0$, при котором

$$B(y_n) \int\limits_{y_n}^{y_{n-1}} (z-y_n)\,dz \geqslant \epsilon.$$

Это равносильно тому, что

$$B(y_n) \geqslant \frac{2\epsilon}{(y_n-y_{n-1})^2}.$$

Для этого условия достаточно

$$B(y_{n-1}) \geqslant \frac{2\epsilon}{(y_n-y_{n-1})^2},$$

что для продолженной последовательности (11) равносильно неравенству

$$B(y_t) \geqslant \frac{2\epsilon}{(y_{t+1}-y_t)^2}.$$

Подставляя значения продолженной последовательности (11) в это неравенство, получаем

$$B(y_t) \geqslant \frac{8\epsilon}{(y_t - a)^2},$$

что в терминах интервала (a, b) может быть записано как

$$B(z) \geqslant \frac{8\epsilon}{(z - a)^2}$$

– достаточное условие расходимости ряда (10).

Приведение уравнения в нормальную форму. Рассмотрим уравнение

$$y'' + A(x)\, y' - B(x)\, y = 0. \tag{12}$$

С помощью замены функции

$$y(x) \equiv u(x) \exp\left(\frac{1}{2} \int\limits_x^b A(t)\, dt\right)$$

это уравнение очевидным образом преобразуется к нормальному виду (см., например, [3, с. 145])

$$u'' - B_1(x)\, u = 0, \tag{13}$$

где

$$B_1 \equiv B + \frac{1}{4} A^2 + \frac{1}{2} A'. \tag{14}$$

Чтобы уравнению (13) соответствовал диффузионный полумарковский процесс, предположим, что

$$B_1 \geqslant 0.$$

Обозначим $h_{(a,b)}^{(u)}(x)$ вероятность первого выхода этого нового процесса на правую границу интервала (a, b), а именно

$$h_{(a,b)}^{(u)}(a) = 0, \quad h_{(a,b)}^{(u)}(b) = 1.$$

Согласно замене функций, для соответствующего решения уравнения (12) имеем представление

$$h_{(a,b)}(x) = h_{(a,b)}^{(u)}(x) \exp\left(\frac{1}{2} \int\limits_x^b A(t)\, dt\right).$$

В частности,

$$h_{(a,b)}(a) = h^{(u)}_{(a,b)}(a) \exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_a^b A(t)\,dt\right) = 0,$$

$$h_{(a,b)}(b) = h^{(u)}_{(a,b)}(b) \exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_b^b A(t)\,dt\right) = 1.$$

Согласно полученным выше сравнениям, для недостижимости новым процессом правой границы интервала (a, b) достаточно, чтобы для любого $z \in (a, b)$

$$B_1(z) \geqslant \frac{8\epsilon}{(b-z)^2}. \tag{15}$$

Из определения недостижимости правой границы следует, что эта недостижимость будет у старого процесса тогда же, как и у нового. Это означает, что условие (15) является достаточным для недостижимости правой границы старым процессом (с уравнением (12)).

Условие недостижимости левой границы старым процессом мы получим с помощью замены функции

$$y(x) = v(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_a^x A(t)\,dt\right).$$

При этом уравнение (12) очевидным образом преобразуется к нормальному виду.

$$v'' - B_1(x)\, v = 0, \tag{16}$$

где коэффициент $B_1(x)$ определён выше (14). Как и ранее мы предполагаем, что коэффициент $B_1(x)$ всюду на интервале (a, b) неотрицателен. Следовательно, существует диффузионный полумарковский процесс, соответствующий этому новому уравнению. Для этого процесса определена вероятность первого выхода на левую границу интервала как функция от начальной точки процесса $g^v_{(a,b)}(x)$. Левая граница интервала называется недостижимой, если для любой начальной точки x процесса выполняется $g^v_{(a,b)}(x) = 0$. Достаточным условием этой недостижимости является доказанное выше неравенство

$$B_1(z) \geqslant \frac{8\epsilon}{(z-a)^2}. \tag{17}$$

Функция $g_{(a,b)}(x)$ исходного процесса определяется условием

$$g_{(a,b)}(x) = g^{(v)}_{(a,b)}(x) \exp\left(-\frac{1}{2} \int\limits_a^x A(t)\,dt \right).$$

Поэтому достаточным условием недостижимости левой границы для исходного процесса является то же самое условие (17).

Таким образом мы доказали теорему

Теорема 1. *Пусть функция B непрерывна и неотрицательна на интервале (a,b), функция A непрерывно дифференцируема на этом интервале. Для того, чтобы для диффузионного полумарковского процесса, соответствующего уравнению*

$$\frac{1}{2} f'' + A(x) f' - B(x) f = 0, \tag{18}$$

правая граница интервала была недостижима, достаточно, чтобы функция $B_1 \equiv B + \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{2}A'$ была неотрицательной на (a,b) и неубывающей на некотором интервале (x_0,b) $(x_0 \in (a,b))$, а также для любого $z \in [x_0,b)$ выполнялось неравенство

$$B_1(z) \geqslant \frac{4\epsilon}{(b-z)^2}.$$

Для того, чтобы для диффузионного полумарковского процесса, соответствующего уравнению (18) со значениями на интервале (a,b), левая граница интервала была недостижима, достаточно, чтобы функция B_1 была неотрицательной на (a,b) и невозрастающей на некотором интервале (a,y_0) $(y_0 \in (a,b))$, а также для любого $z \in (a,y_0]$ выполнялось неравенство

$$B_1(z) \geqslant \frac{4\epsilon}{(z-a)^2}.$$

Пример. Следующий пример иллюстрирует предположение о неотрицательности функции B_1 при $B \equiv 0$. В этом случае недостижимость одной из границ интервала достигается за счёт “поведения” функции A на соответствующей границе.

Пусть $\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{2}A' = 1$. Нетрудно проверить, что одним из решений этого уравнения является функция $A \equiv 2\coth(x + C)$, где C – любая константа.

Случай $C = -a$ – это пример невозрастающей функции, стремящейся к $+\infty$ при $x \in (a, b)$, $x \to a$ (недостижимость левой границы интервала).

Случай $C = -b$ – это пример невозрастающей функции, стремящейся к $-\infty$ при $x \in (a, b)$, $x \to b$ (недостижимость правой границы интервала).

Такой характер изменения коэффициента A при $B \equiv 0$ зафиксирован в работе [6] в качестве необходимого условия недостижимости соответствующей границы интервала.

Список литературы

1. Е. Б. Дынкин, *Марковские процессы.* М.: ФМ, 1963.
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения.* Киев: Наукова думка, 1968.
3. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1971.
4. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Физматгиз, 1959.
5. Б. П. Харламов, *Непрерывные полумарковские процессы.* СПб: Наука, 2001.
6. Б. П. Харламов, *О недостижимой границе интервала значений диффузионного процесса: полумарковский подход.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 313–330.
7. A. S. Cherny, H. J. Engelbert, *Singular Stochastic Differential Equations.* Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2005.

Harlamov B. P. On a sufficient condition for a diffusion process will nether reach boundaries of some interval.

A one-dimensional diffusion semi-Markov process on some interval of its values is considered. Semi-Markov transition functions of the process satisfy a second order differential equation with coefficients admitting possibility that the process stops inside this interval. In terms of coefficients of this equation some sufficient conditions are proved for the process will neither reach the left or right boundaries of this interval.

Институт проблем машиноведения РАН,
С.-Петербург
E-mail: b.p.harlamov@gmail.com

Поступило 17 сентября 2020 г.