Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 495, 2020 г.

В. Н. Солев

ОЦЕНКА ФУНКЦИИ В ГАУССОВСКОМ СТАЦИОНАРНОМ ШУМЕ

§1. Введение

Статистическая задача, исследуемая в настоящей работе, есть задача оценивания неизвестной функции s, лежащей в заданом подмножестве $\mathscr{L}_*$ множества $L^2_{\rm loc}$ локально квадратично суммируемых функций, по наблюдениям над процессом

$$y(t) = s(t) + x(t), \quad |t| \leqslant T. \tag{1}$$

Здесь $x(t)$ – гауссовский стационарный процесс со спектральной плотностью (далее всюду с.п.) f_*, допускающей при некотором $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 1$, представление

$$f_*(u) = \frac{f(u)}{(1+u^2)^n}, \quad \text{где} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(1+u^2)}\, du < \infty. \tag{2}$$

Позже мы наложим дополнительные условия на функцию f и установим, что при этих условиях

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(u)(1+u^2)}\, du < \infty. \tag{3}$$

В статистической задаче, которую мы будем рассматривать, нам потребуются выражения вида

$$x[\varphi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, x(t)\, dt. \tag{4}$$

Ключевые слова: псевдопериодическая функция, непараметрическая оценка, процесс со стационарными приращениями.

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00273, и программой фундаментальных исследований РАН "Современные проблемы теоретической математики."

Случайные величины $x[\varphi]$ определены, например, для линейного множества D функций φ, удовлетворяющих условию

$$\varphi \in L^2, \ |\widehat{\varphi}(u)|^2 \leqslant \frac{C(\varphi)}{1+u^2}, \text{ где } \widehat{\varphi}(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iut}\varphi(t)\,dt. \tag{5}$$

Как известно (см. [1]), если $\varphi \in D$,

$$\mathbf{E}\,x[\varphi] = 0, \quad \mathbf{E}\,|x[\varphi]|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(u)|^2 f_*(u)\,du. \tag{6}$$

Для неотрицательной функции g через L^2_g будем обозначать L^2-пространство, построенное по мере с плотностью g относительно меры Лебега в $\mathbb{R}$. Функцию f_* из (6) будем называть спектральной плотностью процесса $(x[\varphi],\ \varphi \in D)$. Сказанное о процессе $x[\varphi]$ остается корректным и в случае, когда $n = 0$, то есть, когда $f_* = f$. Процесс $(x[\varphi],\ \varphi \in D)$ со с.п. f занимает особое место в нашей работе. Он может быть продолжен (подробнее см. в [1]) на линейное множество

$$D(f) = \{\varphi : \widehat{\varphi} \in L^2 \cap L^2_f\}.$$

Отметим, что в случае, когда выполнено условие (3), функция f отлична от нуля почти всюду.

При $T > 0$ примем обозначение

$$D_T := \{\varphi :\ \varphi \in D,\ \operatorname{supp}\varphi \subset [-T, T]\} \tag{7}$$

Вместо модели (1) удобно рассматривать модель, в которой статистику доступны величины

$$y[\varphi] = s[\varphi] + x[\varphi], \quad \varphi \in D_T. \tag{8}$$

Здесь

$$y[\varphi] := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\,y(t)\,dt, \quad s[\varphi] := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\,s(t)\,dt.$$

Мы будем предполагать, что подлежащая оцениванию функция s лежит в выпуклом центрально-симметричном подмножестве $\mathscr{L}_*$ банахова пространства $\mathscr{L}$ локально квадратично суммируемх функций s, таких что

$$\|s\|^2_{\mathscr{L}} = \sup_x \int\limits_{x}^{x+1} |s\,(t)|^2\,dt < \infty. \tag{9}$$

Опишем подробнее упомянутое множество $\mathscr{L}_*$. Пусть Λ – счетное множество в $\mathbb{R}^1$, удовлетворяющее условию отделимости

$$\tau = \tau(\Lambda) = \inf_{u,v\in\Lambda,\, u\neq v} |u - v| > 0. \tag{10}$$

Из условия (10) следует, что при $\beta > 0$ найдутся такие константы D и $m_0 > 0$, что для любого $m > m_0 > 0$

$$\sum_{u:\, u\in\Lambda, |u|\leqslant m} (1 + |u|)^{2\beta} \leqslant D\, m^{2\beta+1}. \tag{11}$$

Мы также будем предполагать, что при некотором положительных d для достаточно больших m, $m > m_0$,

$$d\, m^{2\beta+1} \leqslant \sum_{u\in\Lambda,\, |u|\leqslant m} (1 + |u|)^{2\beta}. \tag{12}$$

Обозначим $\mathscr{L}(\Lambda)$ введенный Степановым (см. подробнее в [4]) класс псевдопериодических функций s,

$$s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\, e^{iut}, \quad \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 < \infty. \tag{13}$$

В [4] установлено, что $\mathscr{L}(\Lambda)$ – замкнутое подпространство банахова пространства $\mathscr{L}$. Интересующее нас параметрическое множество $\mathscr{L}_*$, обозначаемое далее $\mathscr{L}(n, \beta, L)$, выделяется при $\beta > 0$ из функционального класса $\mathscr{L}(\Lambda)$ условием

$$\sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 (|u| + 1)^{2(n+\beta)} \leqslant L. \tag{14}$$

Для s из (13), удовлетворяющей условию (14) при $n = 0$, вместо $\mathscr{L}(0, \beta, L)$ будем писать $\mathscr{L}(\beta, L)$.

Вместе с банаховой нормой $\|s\|_{\mathscr{L}}$, определенной в (9), будем также рассматривать на $\mathscr{L}(\Lambda)$ гильбертовы нормы

$$\|s\|_* := \left\{ \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 \right\}^{1/2} \quad \text{и} \quad \|s\|_T := \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |s(t)|^2\, dt \right\}^{1/2}$$

и использовать обозначение L^2_T для L^2-пространства на отрезке $[-T, T]$, построенного по нормированной мере Лебега, со скалярным произведением

$$(s_1, s_2)_T := \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} s_1(t)\, \overline{s_2(t)}\, dt.$$

Как установлено в [5], при условии отделимости найдутся такие константы $0 < c_1, C_1 < \infty$ и $0 < c_2, C_2 < \infty$, что при $s \in \mathscr{L}(\Lambda)$

$$c_1\, \|s\|_* \leqslant \|s\|_{\mathscr{L}} \leqslant C_1\, \|s\|_*\,, \tag{15}$$

и при достаточно большом $T > T_0$

$$c_2\, \|s\|_T \leqslant \|s\|_{\mathscr{L}} \leqslant C_2\, \|s\|_T\,. \tag{16}$$

При этом величины c_1, c_2, C_1, C_2, T_0 зависят только от τ.

Риск от использования оценки $\widehat{s}_T$, построенной по наблюдениям (8) и предназначенной для оценивания s, будем измерять величиной

$$\mathscr{R}_T\,(\widehat{s}_T; \mathscr{L}_*) = \sup_{s \in \mathscr{L}_*} \mathbf{E}_{s,f_*}\, \|\widehat{s}_T - s\|^2_{\mathscr{L}}\,. \tag{17}$$

Сопоставим функции $s(t)$ вектор $\boldsymbol{a} = As = (a(u),\ u \in \Lambda)$ ее коэффициентов в разложении (13) и обозначим $\|\boldsymbol{a}\|_2$ норму вектора $\boldsymbol{a}$ в пространстве $l^2(\Lambda)$,

$$\|\boldsymbol{a}\|_2^2 = \sum_{u \in \Lambda} |a(u)|^2 = \|s\|_*^2.$$

Риск от использования $\widehat{\boldsymbol{a}}_T = (\widehat{a}(u),\ u \in \Lambda)$, построенной по наблюдениям (8) и предназначенной для оценивания $\boldsymbol{a}$, будем измерять величиной

$$R_T\big(\widehat{\boldsymbol{a}}_T; \widetilde{\mathscr{L}}\,\big) = \sup_{\boldsymbol{a} \in \widetilde{\mathscr{L}}} \mathbf{E}_{\boldsymbol{a},\, f_*}\, \|\widehat{\boldsymbol{a}}_T - \boldsymbol{a}\|_2^2\,, \quad \widetilde{\mathscr{L}} = A\mathscr{L}_*. \tag{18}$$

Пусть $\mathscr{R}_T^*,\ R_T^*$ – соответствующие минимаксные риски,

$$\mathscr{R}_T^*(\mathscr{L}_*) = \inf_{\widehat{s}_T} \mathscr{R}_T\,(\widehat{s}_T; \mathscr{L}_*)\,, \quad R_T^*\big(\widetilde{\mathscr{L}}\,\big) = \inf_{\widehat{\boldsymbol{a}}_T} R_T\big(\widehat{\boldsymbol{a}}_T; \widetilde{\mathscr{L}}\,\big). \tag{19}$$

В силу неравенств (15), задача оценивания функции $s \in \mathscr{L}(n, \beta, L)$ в понятном смысле эвивалентна задаче оценивания функции $\boldsymbol{a} \in \widetilde{\mathscr{L}}(n, \beta, L)$, где $\widetilde{\mathscr{L}}(n, \beta, L)$ выделяется из пространства $l^2(\Lambda)$ условием (14). Точнее, при условии отделимости (10) существуют такие константы $0 < c \leqslant C < \infty$ и T_0, зависящие только от τ, что при $T > T_0$

$$c\, R_T\big(\widehat{\boldsymbol{a}}_T; \widetilde{\mathscr{L}}\,\big) \leqslant \mathscr{R}_T\big(\widehat{s}_T;\, \mathscr{L}_*\big) \leqslant C\, R_T\big(\widehat{\boldsymbol{a}}_T; \widetilde{\mathscr{L}}\,\big). \tag{20}$$

Здесь

$$\widetilde{\mathscr{L}} = \widetilde{\mathscr{L}}(n, \beta, L), \quad \mathscr{L}_* = \mathscr{L}(n, \beta, L), \quad \widehat{\boldsymbol{a}}_T = A\, \widehat{s}_T. \tag{21}$$

Цель настоящей работы состоит в поиске простой оценки $\widehat{s}_T$, имеющей тот же порядок малости величины $\mathscr{R}_T\,(\widehat{s}_T; \mathscr{L}_*)$ при $T \to \infty$, что и минимаксный риск,

$$\mathscr{R}_T^* \leqslant \mathscr{R}_T\,(\widehat{s}_T) \leqslant C\, \mathscr{R}_T^*, \tag{22}$$

и исследование асимптотического поведения при $T \to \infty$ величины $\mathscr{R}_T\,(\widehat{s}_T)$.

§2. Локальное условие Маккенхаупта

Для неотрицательной функции f мы будем пользоваться при $\varepsilon = 1/T > 0$ следующими "средними" значениями в точке u

$$f_\varepsilon(u) := \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u+x)\, dx, \quad f^\varepsilon(u) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 Tx}{\pi\, Tx^2}\, f(u+x)\, dx. \tag{23}$$

Мы продолжаем предполагать, что функция f удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{(1+u^2)}\, du < \infty. \tag{24}$$

В этом случае величина $f^\varepsilon(u) < \infty$ для любого $u \in \mathbb{R}$. Мы будем говорить, что неотрицательная функция f удовлетворяет локальному аналогу условия Маккенхаупта, если при некотором $\varepsilon_0 > 0$

$$\lambda = \lambda(f) := \sup_{\substack{\varepsilon_0 \geqslant \varepsilon > 0,\\ u \in \Lambda}} f^\varepsilon(u) \times \left[\frac{1}{f}\right]^\varepsilon (u) < \infty. \tag{25}$$

При условии (25) справедливы неравенства

$$\left(\left[\frac{1}{f}\right]^\varepsilon (u)\right)^{-1} \leqslant f^\varepsilon(u) \leqslant \lambda \left(\left[\frac{1}{f}\right]^\varepsilon (u)\right)^{-1}, \quad u \in \Lambda, \tag{26}$$

$$\Big(f^\varepsilon(u)\Big)^{-1} \leqslant \left[\frac{1}{f}\right]^\varepsilon (u) \leqslant \lambda \Big(f^\varepsilon(u)\Big)^{-1}, \quad u \in \Lambda. \tag{27}$$

Из (25) следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(u)(1+u^2)}\,du < \infty$$

и, следовательно, функция f отлична от нуля почти всюду. Из (25), (26), (27) легко выводится (подробнее см. в [10]), что при условии (25) существуют такие константы $0 < c \leqslant C < \infty$, зависящие только от $\lambda(f)$, что при $\varepsilon_0 \geqslant \varepsilon > 0$ и $u \in \Lambda$

$$c\,f_\varepsilon(u) \leqslant f^\varepsilon(u) \leqslant C\,f_\varepsilon(u), \tag{28}$$

$$c\left[\frac{1}{f}\right]_\varepsilon(u) \leqslant \left[\frac{1}{f}\right]^\varepsilon \leqslant C\left[\frac{1}{f}\right]_\varepsilon(u). \tag{29}$$

При этом c – абсолютная костанта, а C зависит только от λ.

Правильность поведения средних $f_\varepsilon(u)$ при $u \in \Lambda$, когда $u \to \infty$, описывается следующим образом. Мы будем проедполагать, что с.п. f удовлетворяет при $\alpha > -1$, $\beta > 1$ и неотрицательных $b \leqslant B$ условиям

$$b\,\varepsilon^\alpha \leqslant \frac{1}{N(m)} \sum_{|u|\leqslant m} f_\varepsilon(u) \leqslant B\,\varepsilon^\alpha \tag{30}$$

в одних моделях (случай, когда в (2) величина $n = 0$), или

$$b\,\varepsilon^\alpha \leqslant \frac{1}{N(m)} \sum_{|u|\leqslant m} f_\varepsilon(u)\,(1+|u|)^{-2n} \leqslant B\,\varepsilon^\alpha \tag{31}$$

в других случаях. Здесь и далее мы для простоты написания опускаем под знаком суммирования условие $u \in \Lambda$. В (30) через $N(m)$ обозначено число точек из Λ, содержащихся в отрезке $[-m, m]$. Очевидно, $\tau(N(m)-1) \leqslant 2m$.

§3. Сопряженная система

Мы приняли обозначение L^2_T для L^2-пространства на отрезке $[-T, T]$, построенного по нормированной мере Лебега, со скалярным произведением

$$(s_1, s_2)_T := \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} s_1(t)\,\overline{s_2(t)}\,dt$$

и нормой $\|s\|_T$. Нам удобно предполагать, что функции из пространства L^2_T продолжены на всю числовую ось нулем вне отрезка $[-T, T]$.

Обозначим $\mathscr{L}_T(\Lambda) = \mathbf{1}_{[-T,T]}\mathscr{L}(\Lambda)$. Из (10) и (16) следует, что при $\tau(\Lambda) > 0$ и $T > T_0$ оператор умножения на индикаторную функцию $\mathbf{1}_{[-T,T]}(t)$ является ограниченным и ограниченно обратимым оператором из пространства $\mathscr{L}(\Lambda)$, (рассматриваемого как подпространство банахова пространства $\mathscr{L}$) в подпространство $\mathscr{L}_T(\Lambda)$ пространства L^2_T. Из упомянутыз условий (10),(16) и условия (15) также следует, что система $\{\varphi_T(u;t),\ u \in \Lambda\}$ является базисом Рисса в L^2_T. Здесь $\varphi_T(u;t); = \mathbf{1}_{[-T,T]}(t)\, e^{itu}$.

Для $r > T_0$ обозначим $\{\psi^r_u,\ u \in \Lambda\}$ систему из $\mathscr{L}_r(\Lambda)$, сопряженную (в метрике пространства L^2_r) к системе $\{\varphi_r(u;\,\cdot\,),\ u \in \Lambda\}$,

$$(\varphi_r(u;\,\cdot\,), \psi^r_v)_r = \delta_{u,\,v}, \quad u, v \in \Lambda. \tag{32}$$

Иными словами

$$\widehat{\psi}^r_u(v) = \int\limits_{-r}^{r} \psi^r_u(x)\, e^{-ivx}\, dx = 2r\, \delta_{u,v}, \quad u, v \in \Lambda. \tag{33}$$

В дальнейшем сопряженной к системе $\{\varphi_T(u;\,\cdot\,),\ u \in \Lambda\}$ будем называть любую систему $\{\psi^T_u,\ u \in \Lambda\}$ из L^2_T, удовлетворяющую (32) при $T = r$, то есть не обязательно лежащую в $\mathscr{L}_T(\Lambda)$.

При $T - r > r > T_0(\tau)$ обозначим

$$g(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi^r_u(t - s)\, \varphi_u(T - r; s)\, ds. \tag{34}$$

Заметим, что $\varphi_v(T;t) = 0$ при $|t| > T$ и $g \in L^2_T$. Поэтому

$$\frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} g(t)\, \overline{\varphi_v(T;t)}\, dt = \frac{1}{2T} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)\, \overline{\varphi_v(T;t)}\, dt = \frac{1}{2T}\, \widehat{g}(v). \tag{35}$$

При этом

$$\widehat{g}(z) = \widehat{\psi^r_u}(z)\, \frac{2\sin(T-r)(v-z)}{\sqrt{2\pi}(v-z)}.$$

Следовательно,

$$\widehat{g}(v) = \frac{4r(T-r)}{\sqrt{2\pi}}\, \delta_{u,v}.$$

Определим новую систему $\{g_u^T,\ u\in\Lambda\}$ соотношением

$$g_u^T(t)=\frac{T\sqrt{2\pi}}{2r(T-r)}\,g(t)=\frac{T\sqrt{2\pi}}{2r(T-r)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_u^r(t-s)\,\varphi_u(T-r;s)\,ds. \tag{36}$$

Для преобразования Фурье функции g_u^T получаем

$$\widehat{g_u^T}\,(z)=\widehat{\psi_u^r}(z)\,\frac{T\,\sin(T-r)(v-z)}{r(T-r)(v-z)}. \tag{37}$$

Отсюда, при $u,v\in\Lambda$

$$\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}g_u^T(t)\,\overline{\varphi_v(T;t)}\,dt=\delta_{u,v}, \tag{38}$$

то есть система $\{g_u^T,\ u\in\Lambda\}$ является сопряженной к системе $\{\varphi_u(T;\,\cdot),\ u\in\Lambda\}$ в L_T^2. Нам потребуется следующее утверждение, содержащееся в [11].

Лемма 3.1. *Пусть $\tau=\tau(\Lambda)>0$, $\lambda(f)\leqslant\lambda<\infty$. Тогда найдутся такие константы $0<c(\tau,r,\lambda)\leqslant C(\tau,r,\lambda)<\infty$, зависящие только от λ,r и τ, что при $T>T_0(r,\tau)$ для преобразования Фурье $\widehat{g_u^T}$ функции g_u^T при $\varepsilon=1/T$ справедливы оценки*

$$c(\tau,r,\lambda)\,T\,f_\varepsilon(u)\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{g}_u^T(x)|^2\,f(x)\,dx\leqslant C(\tau,r,\lambda)\,T\,f_\varepsilon(u). \tag{39}$$

§4. Дискретная модель

Стандартный прием заключается в переходе от модели (8) к дискретной модели

$$Y_u=a(u)+X_u,\ u\in\Lambda, \tag{40}$$

где $Y_u=y\big[g_u^T\big]$, $a(u)=s\big[g_u^T\big]$, $X_u=x\big[g_u^T\big]$, при подходящем выборе системы функций $\{g_u^T,\ u\in\Lambda\}$ из D_T. Риск от использования оценки $\widehat{\boldsymbol a}_T=(\widehat a(u),\ u\in\Lambda)$, построенной по наблюдениям (40) и предназначенной для оценивания $\boldsymbol a\in\widetilde{\mathscr L}$, будем измерять величиной

$$\boldsymbol R_T\big(\widehat{\boldsymbol a}_T;\widetilde{\mathscr L}\,\big)=\sup_{\boldsymbol a\in\widetilde{\mathscr L}}\mathbf E_{\boldsymbol a,\,f_*}\ \|\widehat{\boldsymbol a}_T-\boldsymbol a\|_2^2\,. \tag{41}$$

Пусть

$$\boldsymbol R_T^*\big(\widehat{\boldsymbol a}_T;\widetilde{\mathscr L}\,\big)=\inf_{\widehat{\boldsymbol a}}\ \boldsymbol R_T\big(\widehat{\boldsymbol a}_T;\widetilde{\mathscr L}\,\big)$$

– минимаксный риск. В наиболее простом случае, когда $\{X_u,\ u \in \Lambda\}$ – независимые гауссовские величины, нижнюю границу для минимаксного риска легко получить. Возможность перехода к зависимым величинам дается следующей леммой, принадлежащей С. В. Решетову.

Лемма 4.1. *Пусть* $(X_u,\ u \in \Lambda)$ *– гауссовский вектор с нулевым средним,* $\mathbf{E}\,|X_u|^2 = \sigma^2(u)$. *Предположим, что существует такая константа* $c > 0$, *что для любого конечного набора* $\{a(v),\, v \in \Lambda\}$

$$\mathbf{E}\left|X_u - \sum_{v \neq u} a(v) X_v\right|^2 \geqslant c\,\mathbf{E}|X_u|^2. \tag{42}$$

Тогда найдется такая константы $C_1(c) > 0$, *зависящиая только от* c, *что для любого вектора* $(\tau_u,\ u \in \Lambda) \in \widetilde{\mathscr{L}}$

$$C_1(c) \sum_{u \in \Lambda} \tau_u^2 \wedge \sigma(u)^2 \leqslant \boldsymbol{R}_T^*\big(\widehat{\boldsymbol{a}}_T; \widetilde{\mathscr{L}}\,\big). \tag{43}$$

§5. Оценка сверху минимаксного риска

Пусть $\mathscr{D} = (\mathbf{1} + \frac{d}{dt})$, где $\mathbf{1}$ – тождественный оператор. Ближайшая наша цель – перейти от процесса

$$y[\varphi] = s[\varphi] + x[\varphi], \qquad \varphi \in D_T,$$

к процессу $(\mathscr{D}y\,[\varphi],\ \varphi \in D_T)$ в случае, когда с.п. f_* процесса $x(t)$ удовлетворяет условию (2) при $n \geqslant 1$, а функция $s \in \mathscr{L}(n, \beta, L)$ при $\beta > 0$. Заметим, что в силу (2) для $\varphi \in D$ величины

$$\mathscr{D}x\,[\varphi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, x(t)\, dt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, dx(t)$$

корректно определены. При этом

$$\mathbf{E}\,\mathscr{D}x[\varphi] = 0, \quad \mathbf{E}\,|\mathscr{D}x[\varphi]|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(u)|^2\,(1 + u^2) f_*(u)\, du. \tag{44}$$

Так что спектральная плотность процесса $(\mathscr{D}\,x[\varphi],\ \varphi \in D)$ совпадает с функцией $(1 + u^2) f_*(u)$.

Для простоты обозначений мы будем писать

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, \mathscr{D}x(t)\, dt := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, x(t)\, dt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, dx(t).$$

Так что

$$\mathscr{D}x\,[\varphi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, \mathscr{D}x(t)\, dt. \tag{45}$$

Пусть $\sigma_T(x)$ – σ-алгебра, порожденная процессом $(x[\varphi],\ \varphi \in D_T)$, а $\sigma_T(\mathscr{D}x)$ σ-алгебра, порожденная процессом $(\mathscr{D}x[\varphi],\ \varphi \in D_T)$. Ясно, что при $T > 0$

$$\sigma_T(\mathscr{D}x) \subset \sigma_T(x). \tag{46}$$

Точно так же в случае, когда $s \in \mathscr{L}(n, \beta, L)$ и $n \geqslant 1$, для процесса $y(t) = \mathscr{D}y(t)$ при $\varphi \in D$ будем писать

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, \mathscr{D}y(t)\, dt := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, y(t)\, dt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, dy(t)$$

и, стало быть,

$$\mathscr{D}y\,[\varphi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t)}\, \mathscr{D}y(t)\, dt = \mathscr{D}s[\varphi] + \mathscr{D}x\,[\varphi]. \tag{47}$$

Из (47) следует, что при $T > 0$

$$\sigma_T(\mathscr{D}y) \subset \sigma_T(y). \tag{48}$$

Таким образом, мы фактически доказали при $n = 1$ справедливость следующего утверждения.

Лемма 5.1. *Пусть*

$$y[\varphi] = s[\varphi] + x[\varphi], \quad \varphi \in D_T, \tag{49}$$

где с.п. f_* процесса $(x[\varphi],\ \varphi \in D)$ удовлетворяет условию (2)*, функция $s \in \mathscr{L}(n, \beta, L)$, $\beta > 0$. Тогда*

$$\mathscr{D}^n y\,[\varphi] = \mathscr{D}^n s\,[\varphi] + \mathscr{D}^n x\,[\varphi], \quad \varphi \in D_T, \tag{50}$$

где с.п. процесса $(\mathscr{D}^n x\,[\varphi],\ \varphi \in D)$ совпадает с функцией f, функция $\mathscr{D}^n s \in \mathscr{L}(\beta, L)$. Причем

$$\sigma_T(\mathscr{D}^n y) \subset \sigma_T(y). \tag{51}$$

Доказательство леммы 5.1 получается n-кратным применением ее варианта, соответствующего случаю $n = 1$.

В условиях леммы 5.1 сопоставим процессу $(y[\varphi],\ \varphi \in D_T)$ из (49) процесс $(Y[\varphi],\ \varphi \in D_T)$,

$$Y[\varphi] = S[\varphi] + X[\varphi], \quad \varphi \in D_T, \tag{52}$$

полагая

$$Y[\varphi] = \mathscr{D}^n y\,[\varphi], \quad S[\varphi] = \mathscr{D}^n s\,[\varphi], \quad X[\varphi] = \mathscr{D}^n x\,[\varphi]. \tag{53}$$

Пусть $s(t) = \sum\limits_{u\in\Lambda} a(u)\, e^{iut}$, $s \in \mathscr{L}(n, \beta, L)$. Тогда по лемме 5.1 функция $S \in \mathscr{L}(\beta, L)$, $S(t) = \sum\limits_{u\in\Lambda} b(u)\, e^{iut}$, где $b(u) = (1 + iu)^n a(u)$, $u \in \Lambda$. Если $(x[\varphi], \varphi \in D)$ – гауссовский стационарный процесс со с.п. f_* из (6), то $(X[\varphi], \varphi \in D)$ – гауссовский стационарный процесс со с.п. f, связанной с функцией f_* соотношением (2).

Займемся задачей оценивания вектора $\boldsymbol{b} = (b(u),\ u \in \Lambda)$ по наблюдениям (52) при априорном предположении $\boldsymbol{b} \in \widetilde{\mathscr{L}}(\beta, L)$, то есть

$$\sum_{u\in\Lambda} |b(u)|^2 (|u| + 1)^{2\beta} \leqslant L. \tag{54}$$

Риск от использования оценки $\widehat{\boldsymbol{b}}_T$, построенной по наблюдениям (52) и предназначенной для оценивания $\boldsymbol{b}$, будем измерять величиной

$$R_T\left(\widehat{\boldsymbol{b}}_T; \widetilde{\mathscr{L}}(b, L)\right) = \sup_{\boldsymbol{b}\in\widetilde{\mathscr{L}}(\beta,L)} \mathbf{E}_{s,f}\, \|\widehat{\boldsymbol{b}}_T - \boldsymbol{b}\|_2^2. \tag{55}$$

Минимаксный риск будем обозначать

$$R_T^*\big(\widetilde{\mathscr{L}}(b, L)\ \big) := \inf_{\widehat{\boldsymbol{b}}_T} R_T\left(\widehat{\boldsymbol{b}}_T; \widetilde{\mathscr{L}}(b, L)\right).$$

Асимптотическое поведение при $T \to \infty$ величины минимаксного риска $R_T^*\big(\widetilde{\mathscr{L}}(b, L)\ \big)$ было исследовано в [11]. Опишем оценку

$$\widehat{\boldsymbol{b}}_T = \big(\widehat{b}_T(u), u \in \Lambda\big)$$

вектора $\boldsymbol{b}_T = \big(b_T(u), u \in \Lambda\big)$.

Пусть $\alpha > -1, \beta > 1$, величина $\varepsilon = 1/T$ и связана с неотрицательным m соотношением $m^{1+2\beta}\, \varepsilon^{1+\alpha} = 1$.

Координаты $\widehat{b}_T(u)$ вектора $\widehat{\boldsymbol{b}}_T$ будем выбирать следующим образом:

$$\widehat{b}_T(u) = Y\big[g_u^T\big], \text{ если } |u| \leqslant m; \quad \widehat{b}_T(u) = 0, \text{ если } |u| > m. \tag{56}$$

В [11] получена следующая оценка сверху для величины $R_T\Big(\widehat{\boldsymbol{b}}_T; \widetilde{\mathscr{L}}(b,L)\Big)$.

Теорема 5.2. *Пусть с.п. f удовлетворяет условиям* (24), (25) *и условию* (30) *при $\alpha > -1$, $\beta > 1$ и неотрицательных $b \leqslant B$. Предположим также, что $\tau(\Lambda) > 0$ и при некотором положительных d для достаточно больших m, $m > m_0$,*

$$d\, m^{2\beta+1} \leqslant \sum_{u\in\Lambda,\, |u|\leqslant m} (1+|u|)^{2\beta}.$$

Тогда найдутся такие $0 < C < \infty$ и $T_0 > 0$, зависящие от величин $\alpha, \beta, \lambda, d, b, B, \tau$, что при $T > T_0$

$$R_T^*\big(\widetilde{\mathscr{L}}(b,L)\,\big) \leqslant C\, T^{-\frac{2\beta(1+\alpha)}{1+2\beta}}. \tag{57}$$

Перейдем к оценке величины $R_T\big(\widehat{\boldsymbol{a}}_T; \widetilde{\mathscr{L}}(n,\beta,L)\,\big)$. Сначала исправим оценку $\widehat{\boldsymbol{b}}$, приспособив ее для оценивания вектора $\boldsymbol{a}$. Исправление будет касаться нового выбора уровня отсечения $m(n)$. Пусть $\alpha > -1$, $\beta > 1$, величина $\varepsilon = 1/T$ и связана с неотрицательным $m = m(n)$ соотношением $m^{1+2\beta+2n}\,\varepsilon^{1+\alpha} = 1$.

При $u \in \Lambda$ определим оценку $\widehat{a}_T(u)$ соотношением $(1+iu)^n\,\widehat{a}_T(u) = \widehat{b}_T(u)$ и положим $\widehat{\boldsymbol{a}}_T = (\widehat{a}_T(u),\, u \in \Lambda)$. В этом случае, поскольку $\mathbf{E}\,Y\big[g_u^T\big] = b(u) = (1+iu)^n\, a(u)$, то при $|u| \leqslant m$

$$(1+iu)^n\,\widehat{a}_T(u) = (1+iu)^n\, a(u) + (\widehat{b}_T(u) - b(u)). \tag{58}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} R_T\big(\widehat{\boldsymbol{a}}_T; \widetilde{\mathscr{L}}(n,\beta,L)\,\big) \\ = \sum_{|u|\leqslant m} \mathbf{E}\,|\widehat{b}_T(u) - b(u)|^2\,(1+|u|)^{-2n} + \sum_{|u|>m} |a(u)|^2. \end{gathered} \tag{59}$$

Так как

$$\sum_{|u|>m} |a(u)|^2 \leqslant (1+m)^{-2(n+\beta)} \sum_{|u|>m} |a(u)|^2 (1+|u|)^{2(n+\beta)} \leqslant L(1+m)^{-2(n+\beta)},$$

то, исходя из (59), получаем

$$R_T\big(\widehat{\boldsymbol{a}}_T; \widetilde{\mathscr{L}}(n,\beta,L)\,\big) \leqslant \sum_{|u|\leqslant m} \mathbf{E}\,|\widehat{b}_T(u) - b(u)|^2\,(1+|u|)^{-2n} + L(1+m)^{2(n+\beta)}.$$

В [11] установлено, что при условии (25) найдутся такие константы $0 < c(\tau, r, \lambda)) \leqslant C(\tau, r, \lambda)) < \infty$, что при $\varepsilon = 1/T$ справедливы оценки

$$c(\tau, r, \lambda)\, \varepsilon\, f_\varepsilon(u) \leqslant \mathbf{E}\, |\widehat{b}_T(u) - b(u))|^2 \leqslant C(\tau, r, \lambda)\, \varepsilon\, f_\varepsilon(u). \tag{60}$$

Отсюда,

$$\sum_{|u|\leqslant m} \mathbf{E}\, |\widehat{b}_T(u) - b(u)|^2\, (1 + |u|)^{-2n} \leqslant C(\tau, r, \lambda) \sum_{|u|\leqslant m} \varepsilon\, f_\varepsilon(u)\, (1 + |u|)^{-2n}.$$

Из (31) получаем

$$\sum_{|u|\leqslant m} \mathbf{E}\, |\widehat{b}_T(u) - b(u)|^2\, (1 + |u|)^{-2n} \leqslant C(\tau, r, \lambda)\, B\, \varepsilon^{\alpha+1}\, N(m).$$

Так как $\tau\,(N(m) - 1) \leqslant 2m$, то при некоторой константе $C = C(\tau, r, \lambda, B)$

$$R_T\big(\widehat{\boldsymbol{a}}_T; \widetilde{\mathscr{L}}(n, \beta, L)\ \big) \leqslant C(\tau, r, \lambda, B)\, \varepsilon^{\alpha+1}\, m.$$

Остается учесть, что $m^{1+2\beta+2n} \varepsilon^{1+\alpha} = 1$, $\varepsilon = 1/T$, чтобы получить

$$R_T\big(\widehat{\boldsymbol{a}}_T; \widetilde{\mathscr{L}}(n, \beta, L)\ \big) \leqslant K\, T^{-\frac{(2\beta+2n)(1+\alpha)}{2\beta+2n+1}}. \tag{61}$$

Список литературы

1. Ю. А. Розанов, *Стационарные процессы.* М.: Мир, 1963.
2. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские процессы.* М.: Мир, 1974.
3. D. L. Donoho, R. C. Liu, B. MacGibbon, *Minimax risk over hyperrectangles, and implications.* — The Ann. Statist. **18**, No. 3 (1990), 1416–1437.
4. W. Stepanoff, *Sur quelques generalisations des fonctions presque-periodiques.* — Comptes Rendus, **181** (1925), 90–92.
5. Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной плоскости.* М.: Наука, 1964.
6. B. J. Garnett, *Bounded Analytic Functions.* N.-Y.: Academic Press, 1981.
7. В. Н. Солев, *Условие локальной асимптотической нормальности для гауссовских стационарных процессов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **278** (2001), 225–247.
8. В. Н. Солев, *Оценка функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума: дискретизация.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **441** (2015), 286–298.
9. В. Н. Солев, *Адаптивная оценка функции, наблюдаемой на фоне гауссовского стационарного шума.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 261–275.
10. В. Н. Солев, *Локальная версия условия Маккенхаупта и точность оценивания неизвестной псевдо-периодической функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 261–275.
11. В. Н. Солев, *Оценка функции в гауссовском стационарном шуме: новые спектральные условия.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **486** (2018), 275–285.
12. С. В. Решетов, *Минимаксный риск для квадратично выпуклых множеств.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **368** (2009), 181–189.

13. С. В. Решетов, *Минимаксная оценка псевдо-периодической функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума.* — Вестник СПбГУ, сер. 1 **2** (2010), 106–115.

Solev V. N. Estimation of a function in a Gaussian stationary noise.

In the paper, we construct the upper bounds of the minimax risk in the estimation problem, as we observe the unknown pseudo periodic function in a Gaussian stationary noise with the spectral density satisfying some local version of the Muckenhoupt condition.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия
E-mail: vnsolev@gmail.com

Поступило 15 сентября 2020 г.