Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 495, 2020 г.

Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Пусть $T_l(t)$, $t \geqslant 0$, $T_l(0) = l$, – однородное во времени марковское семейство со значениями в конечном множестве $J = \{1, 2, \ldots, r\}$ и непрерывными справа траекториями.

Через

$$A_0 = \{a_{jk}\}_{j,k=1}^{r}$$

обозначим матрицу переходных интенсивностей марковского семейства.

Матрица A_0 удовлетворяет условиям

1. $\sum\limits_{j=1}^{r} a_{lj} = 0$ для любого $l = 1, \ldots, r$;
2. $a_{lj} \geqslant 0$ при $j \neq l$;
3. $a_{ll} < 0$.

Через матрицу переходных интенсивностей выражаются вероятности изменения состояния марковской цепи за малое время, именно, при $l \neq j$

$$\mathbf{P}(T_l(t) = j) = a_{lj}t + o(t),\ t \downarrow 0 \tag{1}$$

и

$$\mathbf{P}(T_l(t) = l) = 1 + a_{ll}t + o(t),\ t \downarrow 0. \tag{2}$$

Приведем сначала удобный способ генерации траекторий такого процесса. Сначала выберем и фиксируем число $\beta > 0$, так чтобы матрица

$$B = I + \beta A_0$$

(здесь I – единичная матрица) была бы матрицей переходных вероятностей. Пусть $\kappa(t)$, $t \geqslant 0$, – пуассоновский процесс с интенсивностью $\frac{1}{\beta}$. Процесс T_l стартует в нулевой момент из состояния l, а в моменты скачков $0 < t_1 < t_2 < \ldots$ процесса $\kappa(t)$ мы будем разыгрывать перескок нашей марковской цепи независимо от процесса $\kappa(t)$ в соответствии с

Ключевые слова: процессы с переключениями, предельные теоремы, диффузионные процессы.

Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ (грант No. 19-01-00657).

матрицей B. Покажем, что для построенного таким образом процесса $T_l(t)$ справедливы соотношения (1) и (2). Для $j \neq l$, $t \downarrow 0$ имеем

$$\mathbf{P}(T_l(t) = j) = \frac{1}{\beta}\, te^{-\frac{t}{\beta}} \beta a_{lj} + o(t) = a_{lj} t + o(t).$$

При $j = l$ имеем

$$\mathbf{P}(T_l(t) = l) = e^{-\frac{t}{\beta}} + \frac{1}{\beta}\, te^{-\frac{t}{\beta}} (1 + \beta a_{ll}) + o(t) = 1 + a_{ll} t + o(t).$$

Далее, пусть у нас имеется $2r$ функций

$$a_j(x), c_j(x)\ x \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, r,$$

ограниченных вместе со своими производными до четвертого порядка включительно. С каждой парой функций $a_j(x), c_j(x)$ свяжем однородный диффузионный процесс $\xi_x^{(j)}(t)$, определяемый как решение стохастического уравнения (см. [8])

$$d\xi_x^{(j)}(t) = a_j\big(\xi_x^{(j)}(t)\big)\, dt + c_j\big(\xi_x^{(j)}(t)\big)\, dw(t), \quad \xi_x^{(j)}(0) = x. \tag{3}$$

Через $\mathcal{L}_j$ обозначим генератор (инфинитезимальный оператор) полугруппы, отвечающей процессу $\xi_x^{(j)}(t)$, именно,

$$\mathcal{L}_j = a_j(x)\, \frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\, c_j^2(x) \frac{d^2}{dx^2}.$$

Введем теперь в рассмотрение переключающийся диффузионный процесс $\xi_{l,x}(t)$, управляемый марковской цепью $T_l(t)$. Данный процесс является двухкомпонентым процессом

$$\xi_{l,x}(t) = \big(T_l(t), Y_{l,x}(t)\big),$$

где $Y_{l,x}(t)$ есть решение стохастического дифференциального уравнения

$$dY_{l,x}(t) = A\big(T_l(t), Y_{l,x}(t)\big)\, dt + C\big(T_l(t), Y_{l,x}(t)\big)\, dw(t), \tag{4}$$

$$T_l(0) = l, \quad Y_{l,x}(0) = x, \tag{5}$$

а функции $A, C : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определяются соотношением

$$A(j, y) = a_j(y), \quad C(j, y) = c_j(y). \tag{6}$$

Хорошо известно (см., например, [4,5,12]), что наложенные на функции a_j, c_j условия гарантируют существование единственного решения уравнения (4), (5), а процесс $\xi_{l,x}(t)$ является марковским процессом. Формулы для распределений некоторых функционалов от траекторий процессов с переключениями были получены в [9–11].

Рассмотрим подробнее, как выглядят траектории процесса $Y_{l,x}(t)$. Пусть $t_0 = 0$,

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots$$

– последовательность моментов переключения цепи $T_l(t)$, а $w(t)$ – не зависящий от марковской цепи винеровский процесс.

На каждом интервале $[t_j, t_{j+1})$ траектории двухкомпонентного процесса

$$\xi_{l,x}(t) = (T_l(t), Y_{l,x}(t)), \quad \xi_{l,x}(0) = (l, x),$$

выглядят следующим образом: при $t \in [t_j, t_{j+1})$

$$T_l(t) = T_l(t_j),$$

а

$$Y_{l,x}(t) = Y_{l,x}(t_j) + \int\limits_{t_j}^{t} A\big(T_l(t_j), Y_{l,x}(\tau)\big)\, d\tau + \int\limits_{t_j}^{t} C\big(T_l(t_j), Y_{l,x}(\tau)\big)\, dw(\tau).$$

Следующим шагом мы определим последовательность переключающихся скачкообразных марковских процессов, также управляемых марковской цепью $T_l(t)$.

Пусть $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с общим симметричным распределением $\mathcal{P}$, не зависящих от марковской цепи. Мы будем предполагать, что случайная величина X_1 имеет конечный восьмой момент и удовлетворяет условию нормировки

$$\mathbf{E}X_1^2 = \mathbf{D}X_1 = 1. \tag{7}$$

Далее, пусть $\eta(t)$ – стандартный пуассоновский процесс, не зависящий от марковской цепи и от последовательности $\{X_k\}$, для $n \in \mathbb{N}$ через η_n будем обозначать процесс

$$\eta_n(t) = \eta(nt).$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ по аналогии с переключающимся диффузионным процессом определим двухкомпонентный марковский процесс

$$\zeta_{l,x}^n(t) = \big(T_l(t), Y_{l,x}^n(t)\big), \quad \zeta_{l,x}^n(0) = (l, x),$$

где процесс $Y_{l,x}^n(t)$, $Y_{l,x}^n(0) = x$, является чисто скачкообразным, имеет непрерывные справа траектории и строится по последовательности $\{X_k\}$ и марковской цепи $T_l(t)$ следующим образом. Пусть $s_0 = 0$, а

$$0 < s_1 < s_2 < \cdots$$

– моменты скачков $\eta_n(t)$. С вероятностью 1 моменты $\{s_j\}$ не совпадают при $j > 0$ с моментами $\{t_j\}$. Траектории процесса $Y^n_{l,x}(t)$ постоянны на интервалах $[s_{j-1}, s_j)$, на интервале $[0, s_1)$ значение процесса равно x, в момент s_1 процесс $Y^n_{l,x}(t)$ совершает скачок, равный

$$C(T_l(s_1), x)\frac{X_1}{\sqrt{n}} + A(T_l(s_1), x)\frac{X_1^2}{n},$$

в момент времени s_2 процесс совершает скачок, равный

$$C\big(T_l(s_2), Y^n_{l,x}(s_2 - 0)\big)\frac{X_2}{\sqrt{n}} + A\big(T_l(s_2), Y^n_{l,x}(s_2 - 0)\big)\frac{X_2^2}{n}.$$

Соответственно, в момент времени s_k процесс $Y^n_{l,x}(t)$ совершает скачок, равный

$$C\big(T_l(s_k), Y^n_{l,x}(s_k - 0)\big)\frac{X_k}{\sqrt{n}} + A\big(T_l(s_k), Y^n_{l,x}(s_k - 0)\big)\frac{X_k^2}{n}.$$

Целью настоящей работы является доказательство предельной теоремы о сходимости при $n \to \infty$ математических ожиданий некоторых функционалов от процесса $\zeta^n_{l,x}(t)$ к математическому ожиданию того же функционала от переключающегося диффузионного процесса $\xi_{l,x}(t)$.

Введем необходимые функциональные классы. Пусть, как и выше, $J = \{1, \ldots, r\}$, а

$$f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

– функция двух переменных $j \in J$ и $x \in \mathbb{R}$. Всякую такую функцию мы будем естественным образом отождествлять с вектор-функцией

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $f_j(x) = f(j, x)$.

Через $C^k_b(J \times \mathbb{R})$ будем обозначать множество функций f, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка k включительно. Норму в этом пространстве определим как

$$\|f\|_{C^k_b} = \max_{0 \leqslant j \leqslant k}(\|f_1^{(j)}\|_\infty, \|f_2^{(j)}\|_\infty, \ldots, \|f_r^{(j)}\|_\infty).$$

Введем еще одно обозначение. Через M_a^k, M_c^k будем обозначать величины

$$M_a^k = \|A\|_{C_b^k}, \quad M_c^k = \|C\|_{C_b^k}, \tag{9}$$

где функции $A(j,y), C(j,y)$ определяются формулой (6).

Сформулируем основное утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $f \in C_b^4(J \times \mathbb{R})$. *Положим*

$$u(t,l,x) = \mathbf{E} f\big(\xi_{l,x}(t)\big), \quad u_n(t,l,x) = \mathbf{E} f\big(\zeta_{l,x}^n(t)\big).$$

Тогда найдется такое число $C > 0$, *что справедливо неравенство*

$$\max_{0 \leqslant l \leqslant r} \|u_n(t,l,\,\cdot\,) - u(t,l,\,\cdot\,)\|_\infty \leqslant \frac{C\|f\|_{C_b^4}}{n}.$$

Доказательство. Рассмотрим полугруппу операторов P^t, порожденную марковским семейством $\xi_{l,x}(t)$. По определению полугруппа P^t действует на функцию $f \in C_b^0(J \times \mathbb{R})$ как

$$P^t f(l,x) = \mathbf{E} f\big(\xi_{l,x}(t)\big). \tag{10}$$

Нам будет удобнее при этом смотреть на функцию f как на вектор-функцию (8). В этих обозначениях формула (10) запишется как

$$P^t \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{E} f_{T_1(t)}\big(Y_{l,x}(t)\big) \\ \vdots \\ \mathbf{E} f_{T_r(t)}\big(Y_{l,x}(t)\big) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Сосчитаем генератор полугруппы P^t. Отметим, что явную формулу для генератора можно найти, например, в [3] или в [1], но нам будет удобнее провести эту короткую выкладку здесь.

Для $1 \leqslant l \leqslant r$ и $t \downarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned}(P^t f)_l(x) &= \mathbf{E} f_{T_l(t)}(Y_{l,x}(t)) \\ &= (1 + a_{ll}t)\mathbf{E} f_l(Y_{l,x}(t)) + t\sum_{j\neq l} \mathbf{E} f_j(Y_{l,x}(t)) a_{lj} + o(t) \\ &= f_l(x) + t\Big((\mathcal{L}_l f_l)(x) + \sum_{j=1}^r f_j(x) a_{lj}\Big) + o(t).\end{aligned}$$

Из последней формулы следует, что генератор $\mathcal{A}$ полугруппы P^t имеет вид

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_r\} + A_0.$$

Следующим шагом сосчитаем генератор полугруппы P_n^t, где

$$P_n^t f(x) = \mathbf{E} f(\zeta_{l,x}^n(t)).$$

Для $1 \leqslant l \leqslant r$ и $t \downarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned}(P_n^t f)_l(x) &= \mathbf{E} f_{T_l(t)}(Y_{l,x}^n(t)) \\ &= (1 + a_{ll}t)\mathbf{E} f_l(Y_{l,x}^n(t)) + t\sum_{j\neq l} \mathbf{E} f_j(Y_{l,x}^n(t)) a_{lj} + o(t) \\ &= \mathbf{E} f_l(Y_{l,x}^n(t)) + t\sum_{j=1}^{r} f_j(x) a_{lj} + o(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Далее имеем

$$\mathbf{E} f_l(Y_{l,x}^n(t)) = e^{-nt} f_l(x) + nte^{-nt}\mathbf{E} f\big(x + c_l(x)\frac{X_1}{\sqrt{n}} + a_l(x)\frac{X_1^2}{n}\big) + o(t)$$

$$= f_l(x) + t\big(n\int \big(f_l\big(x + c_l(x)\frac{y}{\sqrt{n}} + a_l(x)\frac{y^2}{n}\big) - f_l(x)\big)\mathcal{P}(dy)\big) + o(t).$$

Подставляя последнее выражение в (12), получаем, что генератор $\mathcal{A}_n$ полугруппы P_n^t равен

$$\mathcal{A}_n = \operatorname{diag}\{\mathcal{L}_1^n, \mathcal{L}_2^n, \dots, \mathcal{L}_r^n\} + A_0,$$

где для $l = 1, 2, \dots, r$ действие оператора $\mathcal{L}_l^n$ на функцию f задается формулой

$$\mathcal{L}_l^n f(x) = n\int \big(f\big(x + c_l(x)\frac{y}{\sqrt{n}} + a_l(x)\frac{y^2}{n}\big) - f(x)\big)\mathcal{P}(dy).$$

Через генераторы $\mathcal{A}_n, \mathcal{A}$ полугруппы P_n^t, P^t выражаются как

$$P_n^t = e^{t\mathcal{A}_n}, \quad P^t = e^{t\mathcal{A}}.$$

Для доказательства утверждения теоремы воспользуемся следующей известной формулой теории возмущений (см. [6], гл. IX, §2 п. 1). Именно, справедливо следующее операторное равенство

$$e^{t\mathcal{A}_n} - e^{t\mathcal{A}} = \int_0^t e^{(t-\tau)\mathcal{A}_n}\,(\mathcal{A}_n - \mathcal{A})\,e^{\tau\mathcal{A}}\,d\tau. \tag{13}$$

Для того, чтобы воспользоваться формулой (13), нам понадобятся оценки некоторых операторных норм. Прежде всего заметим, что для любого n справедливо неравенство

$$\|e^{t\mathcal{A}_n}\|_{C_b^0 \to C_b^0} \leqslant 1 \tag{14}$$

(здесь и далее символом $\|K\|_{B_1 \to B_2}$ обозначается операторная норма оператора $K : B_1 \to B_2$).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Существует такое число $C > 0$, что справедливо неравенство*

$$\|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\|_{C_b^4 \to C_b^0} \leqslant \frac{C}{n} .$$

Доказательство. Для любых $\psi \in C^{(4)}(\mathbb{R})$, $1 \leqslant l \leqslant r$ и $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\left| n \int \big(\psi\big(x + c_l(x)\frac{y}{\sqrt{n}} + a_l(x)\frac{y^2}{n}\big) - \psi(x)\big)\mathcal{P}(dy) - \psi'(x)a_l(x) - \frac{1}{2}\psi''(x)c_l^2(x) \right|$$

$$\leqslant \left| n \int \big(\psi'(x)\big(c_l(x)\frac{y}{\sqrt{n}} + a_l(x)\frac{y^2}{n}\big)\mathcal{P}(dy) - \psi'(x)a_l(x) \right|$$

$$+ \left| \frac{n}{2} \int \big(\psi''(x)\big(c_l(x)\frac{y}{\sqrt{n}} + a_l(x)\frac{y^2}{n}\big)^2 \mathcal{P}(dy) - \frac{1}{2}\psi''(x)c_l^2(x) \right|$$

$$+ \left| \frac{n}{6} \int \big(\psi'''(x)\big(c_l(x)\frac{y}{\sqrt{n}} + a_l(x)\frac{y^2}{n}\big)^3 \mathcal{P}(dy) \right|$$

$$+ \|\psi\|_{C^{(4)}} \left| \frac{n}{24} \int \Big(c_l(x)\frac{y}{\sqrt{n}} + a_l(x)\frac{y^2}{n}\Big)^4 \mathcal{P}(dy) \right| \leqslant \frac{C\|\psi\|_{C^{(4)}}}{n}$$

На последнем шаге мы воспользовались тем, что распределение $\mathcal{P}$ симметрично и $\int y^2\mathcal{P}(dy) = 1$. □

Далее, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Для некоторого $C = C(k)$ справедливо неравенство*

$$\|e^{t\mathcal{A}}\|_{C_b^k \to C_b^k} \leqslant Ce^{t(M_a^k + M_c^k)}, \tag{15}$$

где величины M_a^k и M_a^k определяются формулой (9).

Доказательство. Для простоты докажем утверждение при $k = 1$. При $k > 1$ доказательство проводится аналогично.

По определению для $f \in C_b^1$ и $1 \leqslant l \leqslant r$ имеем

$$(e^{t\mathcal{A}} f)_l(x) = \mathbf{E} f_{T_l(t)}(Y_{l,x}(t)). \tag{16}$$

Для доказательства утверждения теоремы достаточно получить оценку

$$\max(\|(e^{t\mathcal{A}}f)_l\|_\infty, \|(e^{t\mathcal{A}}f)_l^{(1)}\|_\infty) \leqslant Ce^{t(M_a^1+M_c^1)}\|f\|_{C_b^1}$$

при каждом фиксированном l.

Неравенство

$$\|(e^{t\mathcal{A}}f)_l\|_\infty \leqslant \|f\|_{C_b^1}$$

выполнено по очевидной причине. Покажем теперь, что существует число $C > 0$, такое что выполняется неравенство

$$\|(e^{t\mathcal{A}}f)_l^{(1)}\|_\infty \leqslant Ce^{t(M_a^1+M_c^1)}\|f\|_{C_b^1}. \tag{17}$$

Заметим сначала, что, в силу независимости процессов $T_l(t)$ и $w(t)$, математическое ожидание в (16) сводится к последовательным усреднениям по траекториям $w(t)$, а затем – по траекториям $T_l(t)$. Это означает, что для доказательства (17) достаточно при фиксированной траектории процесса $T_l(t)$ получить оценку

$$\|Q_l^t f\|_\infty \leqslant Ce^{t(M_a^1+M_c^1)}\|f\|_{C_b^1}, \tag{18}$$

где

$$(Q_l^t f)(x) = \mathbf{E}_w f_{T_l(t)}(Y_{l,x}(t)),$$

(символ $\mathbf{E}_w$ означает, что усреднение проводится только по траекториям винеровского процесса), причем константа C в (18) не должна зависеть от траектории процесса $T_l(t)$.

Нам понадобится простая оценка, вытекающая из возможности дифференцирования решения стохастического дифференциального уравнения по начальному данному (см. [2], гл. 1, §8). Именно, если $\eta_x(t)$ есть решение уравнения

$$d\eta_x(t) = a\big(\eta_x(t)\big)dt + c\big(\eta_x(t)\big)dw(t), \;\; \eta_x(t_0) = x,$$

причем коэффициенты уравнения суть непрерывно дифференцируемые функции с ограниченными первыми производными, то случайные функции $\eta_x(t)$ дифференцируемы по переменной x. Производная $\frac{d}{dx}\eta_x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$d\frac{d}{dx}\eta_x(t) = a'\big(\eta_x(t)\big)\frac{d}{dx}\eta_x(t)dt + c'\big(\eta_x(t)\big)\frac{d}{dx}\eta_x(t)dw(t), \;\; \frac{d}{dx}\eta_x(t_0) = 1.$$

Решая это уравнение, получаем

$$\frac{d}{dx}\eta_x(t)=\exp\left(\int_{t_0}^{t} a'\big(\eta_x(\tau)\big)d\tau+\int_{t_0}^{t} c'\big(\eta_x(\tau)\big)dw(\tau)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\Big(c'\big(\eta_x(\tau)\big)\Big)^2 d\tau\right).$$

Из последнего равенства немедленно вытекает, что для любого x

$$\mathbf{E}\Big|\frac{d}{dx}\eta_x(t)\Big| = \mathbf{E}\frac{d}{dx}\eta_x(t) \leqslant e^{(t-t_0)\|a'\|_\infty}. \tag{19}$$

Применяя несколько раз (по числу смены состояний переключателя) оценку (19), получаем

$$|\mathbf{E}_w f_{T_l(t)}(Y_{l,x}(t))| \leqslant e^{t\cdot\max_j \|a_j'\|_\infty}.$$

Из последнего неравенства следует утверждение леммы. □

Используя леммы 1 и 2, а также (13) и (14), получаем утверждение теоремы. □

Список литературы

1. M. Freidlin, *Functional Integration and Partial Differential Equations.* Princeton, Annals of Mathematics Studies, vol. 109, 1985.
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения.* Киев: Наукова думка, 1968.
3. Р. З. Хасьминский, *Устойчивость стохастических дифференциальных уравнений с переключением режима.* — Пробл. передачи информ. **48**, вып. 3 (2012), 70–82.
4. G. Yin, C. Zhu, *Hybrid Switching Diffusions.* New York: Springer, 2010.
5. Shao-Qin Zhang, *Regime-switching diffusion processes: strong solutions and strong Feller property.* — Stoch. Anal. Appl. **38**, Bo. 1 (2020), 97–123.
6. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир, 1972.
7. A. Friedman, *Stochastic differential equations and applications* New York: Academic Press, 1975.
8. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов.* М.: Наука, 1977.
9. А. Н. Бородин, *Распределения функционалов от диффузий с переключениями и скачками.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **474** (2018), 28–45.
10. А. Н. Бородин, *Распределения функционалов от телеграфного процесса и диффузий с переключениями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 38–53.
11. А. Н. Бородин, *Предельное поведение сложного пуассоновского процесса с переключениями между несколькими значениями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **486** (2019), 44–62.
12. X. Mao, C. Yuan, *Stohastic Differential Equations with Markovian Switching.* London: Imperial College Press, 2006.

Smorodina N. V., Faddeev M. M. A limit theorem for regime-switching diffusion processes.

We consider an approximation of a regime-switching diffusion process by a family of regime-switching jump Markov processes and prove the corresponding limit theorem.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия;
С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: smorodina@pdmi.ras.ru

С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: m.faddeev@spbu.ru

Поступило 7 октября 2020 г.