Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 495, 2020 г.

Л. В. Розовский

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ОБЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗ ОБЛАСТИ НОРМАЛЬНОГО ПРИТЯЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО ЗАКОНА

§1. Введение

Рассмотрим независимые случайные величины X, X_1, $X_2, \ldots$ с общей функцией распределения V. Будем предполагать, что V принадлежит области нормального притяжения некоторого устойчивого закона с показателем α, $0 < \alpha \leqslant 2$, что при $\alpha \neq 2$ равносильно условиям

$$1 - V(x) = (c_1 + o\,(1))\, x^{-\alpha}, \;\; V(-x) = (c_2 + o\,(1))\, x^{-\alpha}, \;\; x \to \infty, \quad (1.1)$$

при некоторых неотрицательных постоянных c_1 и c_2, таких что $c_1 + c_2 > 0$.

Следуя [1], при $\alpha \neq 2$ определим функции

$$\begin{aligned} S(x) &= 1 - V(x) + V(-x) - (c_1 + c_2)\, x^{-\alpha}, \\ D(x) &= 1 - V(x) - V(-x) - (c_1 - c_2)\, x^{-\alpha}, \;\; x > 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Будем считать, что

$$\int_1^\infty |D(y)|\, dy < \infty \;\; (\alpha = 1) \;\; \text{и} \;\; \mathbf{Var}(X) = 1 \;\; (\alpha = 2). \quad (1.3)$$

Положим

$$\mu_n = \begin{cases} n\,\mathbf{E}X, & 1 < \alpha \leqslant 2, \\ 0, & 0 < \alpha < 1, \\ n\,(\mu + (c_1 - c_2)\,\log n), & 0 < \alpha < 1, \end{cases}$$

Ключевые слова: скорость сходимости, точная асимптотика, полная сходимость.

Работа поддержана грантом РФФИ No. 19-01-00356.

где

$$\mu = \int_0^1 (1 - V(x) - V(-x))\,dx + \int_1^\infty D(x)\,dx - (c_1 - c_2)\,\gamma, \tag{1.4}$$

γ – постоянная Эйлера. Тогда $Y_n = (S_n - \mu_n)/n^{1/\alpha}$ $(S_n = X_1 + \cdots + X_n)$ сходится при $n \to \infty$ по распределению к устойчивому закону, распределение G которого имеет характеристическую функцию ψ "стандартного" вида:

$$-\log\psi(t) = t^2/2, \quad \alpha = 2,$$

и (при $0 < \alpha < 2$)

$$-\log\psi(t) = \lambda\,|t|^\alpha \begin{cases} 1 - i\,\beta\,\mathrm{sgn(t)}\ \mathrm{tg}(\alpha\pi/2), & \alpha \neq 1, \\ 1 + i\,\beta\,\mathrm{sgn(t)}\,\dfrac{2}{\pi}\ \log|t|, & \alpha = 1, \end{cases} \tag{1.5}$$

где $\lambda = \dfrac{(c_1 + c_2)\,\pi}{2\,\Gamma(\alpha)\ \sin(\alpha\pi/2)}$, $\quad \beta = \dfrac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}$.

Всюду в дальнейшем предполагается, что случайная величина Y имеет распределение G, а G_n обозначает функцию распределения $Y_n = (S_n - \mu_n)/n^{1/\alpha}$.

Одной из целей работы является уточнение и широкое обобщение результатов из [2]. Для удобства приведем их ниже. Положим

$$\begin{aligned} &\rho_\theta = \sum_{n\geqslant 1} n^{\theta-2}\,\mathbf{P}(Y_n = 0) \\ \text{и}\quad &\gamma_{\theta-2} = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^N n^{\theta-2} - \frac{N^{\theta-1}}{\theta-1}\right), \qquad \gamma_{-1} = \gamma. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Теорема A ([2, теоремы 2.1(b), 2.2(b)]). *Пусть* $1 \leqslant p < \alpha < 2$.
(1) *Если* $\int_{-\infty}^{\infty} |y|^{\alpha-1}\,|V(y) - G(y)|\,dy < \infty$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\,\mathbf{P}\left(|Y_n| \geqslant \varepsilon\, n^{1/p-1/\alpha}\right) + \frac{\alpha p}{\alpha-p}\ \log\varepsilon\right) = \frac{\alpha p}{\alpha-p}\,\mathbf{E}\log|Y| + \gamma - \rho_1;$$

(2) *Если* $p<r<\alpha$, $\alpha r/p<2$ *и* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|y|^{(\alpha r/p)-1}\,|V(y)-G(y)|\,dy<\infty$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\biggl(\sum_{n\geqslant 1} n^{(r/p)-2}\,\mathbf{P}\Bigl(|Y_n|\geqslant\varepsilon\, n^{1/p-1/\alpha}\Bigr)$$
$$-\frac{p}{r-p}\,\varepsilon^{-\alpha(r-p)/(\alpha-p)}\,\mathbf{E}|Y|^{\alpha(r-p)/(\alpha-p)}\biggr)=\gamma_{(r/p)-2}-\rho_{(r/p)}.$$

Теорема B ([2, теоремы 2.1(a), 2.2(a)]). *Пусть* $1\leqslant p<\alpha=2$.

(1) *Если* $\mathbf{E}X^2\log(1+|X|)<\infty$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\biggl(\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\,\mathbf{P}\left(|Y_n|\geqslant\varepsilon\, n^{1/p-1/2}\right)+\frac{2p}{2-p}\,\log\varepsilon\biggr)$$
$$=\frac{2-2p}{2-p}\,\gamma-\frac{p}{2-p}\,\log 2-\rho_1.$$

(2) *Если* $p<r<2$, $2r/p<3$, *и* $\mathbf{E}|X|^{2r/p}<\infty$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\biggl(\sum_{n\geqslant 1} n^{(r/p)-2}\,\mathbf{P}\Bigl(|Y_n|\geqslant\varepsilon\, n^{1/p-1/2}\Bigr)$$
$$-\frac{p}{r-p}\,\varepsilon^{-2(r-p)/(2-p)}\,\mathbf{E}|Y|^{2(r-p)/(2-p)}\biggr)=\gamma_{(r/p)-2}-\rho_{(r/p)}.$$

Замечание 1.1. В формулировке теоремы 2.2 из [2] пропущены условия $\alpha r/p<2$ и $2r/p<3$, которые необходимы для того, чтобы стало возможным пользоваться [2, замечание 2.2].

Проблематика, которой посвящена наша заметка, имеет долгую историю (см. библиографию в [2] и [3]). При этом, в основном, изучался случай $\alpha=2$, т.е. аппроксимация нормальным распределением (например, [4–7]). Доказательства, как правило, проводились по общей схеме. Нам удалось несколько ее усовершенствовать (и упростить технически), что собственно и явилось основной побудительной причиной написания настоящей заметки. Отметим, что случай $\alpha\leqslant 1$ в контексте настоящей работы обнаружить в литературе нам не удалось.

Приведем полученные результаты, уделив наибольшее внимание показателю $\alpha\in(1,2]$, поскольку именно в этом диапазоне для получения результатов нам не потребуется делать чрезмерно обременительных предположений.

Будем рассматривать по отдельности случаи $1 < \alpha < 2$, $\alpha = 1$, $0 < \alpha < 1$ и, наконец, $\alpha = 2$. Положим $\bar G(x) = 1 - G(x)$.

§2. Результаты

Теорема 1 ($1 < \alpha < 2$)**.** *Пусть положительная дифференцируемая функция $g(y)$ растет к ∞ на $(0, \infty)$ и пусть $g'(y) \asymp u(y)$, $y \to \infty$, где функция $u(y)$ удовлетворяет условиям:*

$y^\delta\, u(y)$ монотонна при некотором δ и всех достаточно больших y;

$$\lim_{y\to\infty} u(y) = 0; \qquad \int_1^\infty u(x)\, x^{1-2/\alpha}\; dx < \infty. \tag{2.1}$$

Предположим, что

$$\int_{|y|>1} \nu_\alpha(|y|)\, |V(y) - G(y)|\, dy < \infty, \tag{2.2}$$

где $\nu_\alpha(y) = \int_1^\infty x^{1-2/\alpha}\, u(x)\, \min(y, x^{1/\alpha})\, dx$.

Пусть непрерывная функция $f(t)$, $f(0) = 0$, $f(\infty) = \infty$, строго возрастает на $[0, \infty)$, функция $f^{-1}(t)$ – обратная к $f(t)$.

Тогда при любом $b \in \mathcal{R}$, если

$$\int_1^\infty \bar G(f(t))\, dt < \infty, \tag{2.3}$$

то

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \left(\sum_{n\geqslant 1} g'(n)\, \mathbf{P}\,(Y_n \geqslant b + f(\varepsilon\, g(n))) - \varepsilon^{-1}\; \mathbf{E} f^{-1}((Y-b)^+) \right) = \bar G(b)\, \gamma_g - V_g(b); \tag{2.4}$$

если

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t}\, dt + \int_1^\infty \bar G(f(t))\, \frac{dt}{t} \; < \infty, \tag{2.5}$$

то

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \left(\sum_{n\geqslant 1} g'(n)\, \mathbf{P} \left(Y_n \geqslant b + f(\varepsilon\, e^{g(n)})\right) + \bar G(b)\, \log\varepsilon \right) = \bar G(b)\, \gamma_g - V_g(b) + \mathbf{E} \log f^{-1}(Y-b)\, I[Y - b > 0]. \tag{2.6}$$

Здесь $V_g(b) = \sum\limits_{n\geqslant 1} g'(n)\,\big(\mathbf{P}(Y_n \leqslant b) - G(b)\big)$.

Замечание 2.1. Условие (2.3) накладывает существенно различные ограничения на функцию f в зависимости от того, отлична ли постоянная c_1 из условия (1.1) от нуля или нет. Так, если $c_1 > 0$, то (2.3) равносильно

$$\int\limits_1^\infty \big(f(t)\big)^{-\alpha}\,dt < \infty, \tag{2.7}$$

а в случае $c_1 = 0$, т.е. при $\beta = -1$ (см. (1.5)), оно равносильно заметно более слабому предположению

$$\int\limits_1^\infty \omega^{-1/2}(t)\,e^{-a\,\omega(t)}\,dt < \infty, \tag{2.8}$$

где $\omega(t) = (f(t))^{\alpha/(\alpha-1)}$, $\quad a = |\alpha - 1|\,(\alpha^\alpha\,\lambda)^{-1/(\alpha-1)}$ (см. [8, (2.5.4) и (2.5.21)]).

Аналогично, второе условие в (2.5) можно равносильно заменить на $\int\limits_1^\infty \big(f(t)\big)^{-\alpha}\,\dfrac{dt}{t} < \infty$ при $c_1 > 0$ и на

$$\int\limits_1^\infty \omega^{-1/2}(t)\,e^{-a\,\omega(t)}\,\frac{dt}{t} < \infty, \tag{2.9}$$

если $c_1 = 0$.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *при любом* $b \in \mathcal{R}$:
если выполнено условие (2.7), *то*

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\sum_{n\geqslant 1} g'(n)\,\mathbf{P}\left(|Y_n - b| \geqslant f(\varepsilon\,g(n))\right) - \varepsilon^{-1}\,\mathbf{E} f^{-1}(|Y - b|)\right) = \gamma_g - \widetilde{V}_g(b);$$

если выполнено условие $\int\limits_0^\infty \min\big(f(t),\ \big(f(t)\big)^{-\alpha}\big)\,\dfrac{dt}{t}\ < \infty$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\sum_{n\geqslant 1} g'(n)\,\mathbf{P}\left(|Y_n - b| \geqslant f(\varepsilon\,e^{g(n)})\right) + \log\varepsilon\right)$$
$$= \gamma_g - \widetilde{V}_g(b) + \mathbf{E}\log f^{-1}(|Y - b|),$$

где $\widetilde{V}_g(b) = \sum\limits_{n\geqslant 1} g'(n)\,\mathbf{P}(Y_n = b)$.

Займемся условием (2.2), точнее фигурирующей в нем функцией $\nu_\alpha(y)$.

Замечание 2.2. Пусть $1 \leqslant \alpha < 2$, $u(y) = y^{(q/\alpha)-2}\, l(y)$, где постоянная $q \in [\alpha,\, 2]$, а функция $l(y)$ медленно меняется на бесконечности, причем

$$I = \int\limits_1^\infty \frac{l(y)}{y}\,dy \begin{cases} < \infty & \text{при} \quad q = 2, \\ = \infty & \text{при} \quad q = \alpha \end{cases} \tag{2.10}$$

(при сделанных предположениях все условия теоремы 1 относительно функций g и u выполняются). Тогда (2.2) равносильно

$$\int\limits_{|y|>1} |y|^{q-1}\,\widetilde{l}(|y|^\alpha)\,|V(y) - G(y)|\,dy < \infty, \tag{2.11}$$

где $\widetilde{l}(x) = \begin{cases} l(x) & \text{при} \quad \alpha \leqslant q < 2, \\ \int\limits_x^\infty \dfrac{l(y)}{y}\,dy & \text{при} \quad q = 2. \end{cases}$

Видим, что теорема $A(1)$ вытекает из второго утверждения следствия 1, если в нем положить $b = 0$, $g(y) = \dfrac{\alpha - p}{\alpha\, p}\log y$, $u(y) = 1/y$, $f(t) = t$ и воспользоваться замечанием 2.2 при $q = \alpha$ и $l(x) = 1$; теорема $A(2)$ следует из первого утверждения следствия 1 при $b = 0$, $g(y) = y^{(r/p)-1}$, $u(y) = y^{(r/p)-2}$, $f(t) = t^c$, $c = \dfrac{\alpha - p}{\alpha\,(r - p)}$, и замечания 2.2 при $q = \alpha\, r/p$ и $l(x) = 1$.

Перейдем к случаю $\alpha \leqslant 1$.

Теорема 2 ($\alpha = 1$)**.** *Теорема* 1 *и следствие* 1 *сохраняют справедливость в случае* $\alpha = 1$ *при дополнительном предположении* (1.3) *и замене интеграла в условии* (2.1) *на* $\int\limits_1^\infty u(x)\,\dfrac{\log^2 x}{x}\,dx$, *а замечание* 2.1 *– при замене в нем* (2.8) *и* (2.9) *условиями*

$$\int\limits_1^\infty \exp\bigl(-\nu(t)/2 - e^{\nu(t)-1}\bigr)\,dt < \infty \quad \text{и} \quad \int\limits_1^\infty \exp\bigl(-\nu(t)/2 - e^{\nu(t)-1}\bigr)\,\frac{dt}{t} < \infty,$$

соответственно (*см.* [8, (2.5.22)] $\Bigl($*здесь* $\nu(t) = f(t)\,\dfrac{2}{\pi\,(c_1 + c_2)}\Bigr)$.

Напомним, что замечание 2.2 при $\alpha = 1$ выполняется.

Теорема 3 $(0 < \alpha < 1)$**.** *Теорема* 1 *и следствие* 1 *сохраняют справедливость при* $0 < \alpha < 1$*, если дополнительно предположить, что функции* $S(x)$ *и* $D(x)$ *(см.* (1.2)*) монотонны при всех достаточно больших* x*, интеграл в условии* (2.1) *заменен на*

$$\int_1^\infty u(x)\, x^{-\min\left(1,(1/\alpha)-1\right)}\, dx,$$

а вместо (2.2) *выполняется условие*

$$\int_{|y|>1} \widetilde{\nu}_\alpha(|y|)\, |V(y) - G(y)|\, dy < \infty, \tag{2.12}$$

где $\widetilde{\nu}_\alpha(x) = y^{-1} \int\limits_1^\infty x^{2-(2/\alpha)}\, u(x)\, \min(y,\, x^{1/\alpha})\, dx$.

Отметим, что замечание 2.1 при $0 < \alpha < 1$ выполняется, а замечание 2.2 модифицируется следующим образом:

Замечание 2.3. Пусть $0 < \alpha < 1$, $u(y) = y^{(q/\alpha)-2}\, l(y)$, где $\alpha \leqslant q \leqslant \min(2\alpha,\, 1)$, а функция $l(y)$ медленно меняется на бесконечности, причем (см. (1.10)) $I < \infty$ при $q = \min(2\alpha,\, 1)$ и $I = \infty$ при $q = \alpha$.

Тогда (2.12) равносильно (2.11) при

$$\widetilde{l}(x) = \begin{cases} l(x) & \text{при } \ \alpha \leqslant q < \min(2\alpha,\, 1), \\ \displaystyle\int_x^\infty \frac{l(y)}{y}\, dy & \text{при } \ q = \min(2\alpha,\, 1). \end{cases}$$

Очевидно, теоремы 2 и 3 позволяют распространить утверждения типа теоремы A на ранее не исследованный случай $0 < \alpha \leqslant 1$ и существенно их обобщить.

Теоремы 1–3 доказываются с помощью следующего более общего утверждения.

Введем дополнительные обозначения.

Пусть η, η_n, $n \geqslant 1$, – случайные величины с функциями распределения $F(x)$, $F_n(x)$ и пусть $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, $\bar{F}_n(x) = 1 - F_n(x)$.

Предложение 1. *Пусть положительная и дифференцируемая функция* $g(u)$ *не убывает на* $[1, \infty)$ *и пусть* $g'(u)$ *является функцией* *ограниченной вариации. Мы предполагаем, что*

$$\lim_{u\to\infty} g'(u) = 0, \qquad \sum_{n\geqslant 1} g'(n) \sup_x |F_n(x) - F(x)| < \infty \tag{2.13}$$

и что $F(x)$ непрерывна в нуле.

Пусть функция $f(u)$ не убывает на $(0,\infty)$, $f(0+) = 0$, $f(\infty) = \infty$.

Тогда, если $\int\limits_0^\infty \bar F((t))\,dt = A_f < \infty$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{n\geqslant 1} g'(n)\,\bar F_n(f(\varepsilon\, g(n))) - \varepsilon^{-1} A_f\right) = \bar F(0)\,\gamma_g - \rho$$

и если $\int\limits_0^\infty \bar F(f(t))\,\frac{dt}{t} = \widetilde A_f$ абсолютно сходится, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{n\geqslant 1} g'(n)\,\bar F_n(f(\varepsilon\, e^{g(n)})) + \bar F(0)\,\log\varepsilon\right) = \widetilde A_f + \bar F(0)\,\gamma_g - \rho.$$

Здесь $\rho = \sum\limits_{n\geqslant 1} g'(n)\,\big(F_n(0+) - F(0)\big)$, $\gamma_g = \lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^N g'(n) - g(N)\right) < \infty$.

Обращаем внимание на то, что если $f(t)$ строго возрастает, то $A_f = \mathbf{E} f^{-1}(\eta^+)$ и $\widetilde A_f = \mathbf{E} I[\eta > 0]\,\log f^{-1}(\eta)$. В частности, если $f(y) = y^s$, $s > 0$, то $A_f = \mathbf{E}(\eta^+)^{1/s}$ и $\widetilde A_f = s^{-1}\,\mathbf{E}\log\eta^+$.

Замечание 2.4. Условия, при которых выполняется соотношение (2.13) ($\eta_n = Y_n$, $\eta = Y$), будут получены с помощью результатов работы [1].

В заключение рассмотрим случай $\alpha = 2$. Он несколько выпадает из логики предыдущих результатов, поскольку сейчас мы будем иметь дело с *разнораспределенными* слагаемыми, тем самым до некоторой степени отвечая на вопрос, поставленный в конце работы [3].

Пусть теперь $\{X_n\}$ являются последовательностью независимых случайных величин с нулевыми средними, конечными дисперсиями σ_n^2 и функциями распределения V_n. Будем предполагать, что существуют положительные постоянные C_1, C_2, C_3 и случайная величина X с конечной дисперсией, такие что

$$B_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \geqslant C_1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(|X_j| \geqslant x) \leqslant C_2\,\mathbf{P}(|X| \geqslant x)$$

для всех n и $x \geqslant C_3$.

Положим

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, \quad b_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int\limits_{|x|<B_n} x^2\, dV_j(x) - \left(\int\limits_{|x|\geqslant B_n} x\, dV_j(x) \right)^2 \right\}$$

и пусть $\mathcal{N}$ обозначает стандартную нормальную случайную величину, а $\Phi(x)$ ее функцию распределения, $\bar{\Phi}(x) = 1 - \Phi(x)$.

В [9] (см. также [10, с. 163–164]) показано, что тогда

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \sup_x |\mathbf{P}(\frac{S_n}{b_n} < x) - \Phi(x)| < \infty,$$

и если, кроме того, $\mathbf{E}X^2 \log(1 + |X|) < \infty$, то

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \sup_x |\mathbf{P}(\frac{S_n}{B_n} < x) - \Phi(x)| < \infty. \tag{2.14}$$

Если же $\mathbf{E}|X|^{2+\delta} < \infty$ для некоторого положительного $\delta < 1$, то (2.14) имеет место с заменой множителя $\dfrac{1}{n}$ на $n^{-1+\delta/2}$.

Из приведенных фактов и предложения 1 напрямую вытекают нижеследующие результаты, в которых функция f взята из теоремы 1, $b \in \mathcal{R}$ и

$$V_b(\delta, B) = \sum_{n\geqslant 1} n^{-1+\delta/2} \big(\mathbf{P}(S_n \leqslant b\,B) - \Phi(b)\big),$$

$$\widetilde{V}_b(\delta, B) = \sum_{n\geqslant 1} n^{-1+\delta/2}\, \mathbf{P}(S_n = b\,B).$$

Теорема 4 (1)**.** *Пусть выполнено условие*

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{e^{-f^2(t)/2}}{f(t)}\, dt < \infty. \tag{2.15}$$

Тогда (*см.* (1.6))

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\, \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{b_n} \geqslant b + f(\varepsilon \log n) \right) - \varepsilon^{-1}\, \mathbf{E} f^{-1}((\mathcal{N} - b)^+) \right) \\ = \bar{\Phi}(b)\, \gamma - V_b(0, b_n), \tag{2.16}$$

и если, кроме того, $\mathbf{E}X^2 \log(1 + |X|) < \infty$*, то* (2.16) *имеет место с заменой* b_n *на* B_n*.*

Если же $\mathbf{E}|X|^{2+\delta} < \infty$ *для некоторого положительного* $\delta < 1$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\sum_{n\geqslant 1} n^{-1+\delta/2}\,\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{B_n} \geqslant b + f(\varepsilon\, n^{\delta/2})\right) - 2\,\delta^{-1}\,\varepsilon^{-1}\;\mathbf{E} f^{-1}((\mathcal{N}-b)^{+})\right) = \bar\Phi(b)\,\gamma_{(\delta/2)-1} - V_b(\delta, B_n).$$

Следствие 2. *Пусть выполнено условие* (2.15). *Тогда, если* $\mathbf{E}|X|^{2+\delta} < \infty$ *для некоторого положительного* $\delta < 1$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\sum_{n\geqslant 1} n^{-1+\delta/2}\,\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{B_n} - b\right| \geqslant f(\varepsilon\, n^{\delta/2})\right) - 2\,\delta^{-1}\,\varepsilon^{-1}\;\mathbf{E} f^{-1}(|\mathcal{N}-b|)\right) = \gamma_{(\delta/2)-1} - \widetilde{V}_b(\delta, B_n).$$

Теорема B (2) вытекает из следствия 2 при $b=0$, $\delta/2 = (r-p)/p$ и $f(t) = t^{(2-p)/(2r-2p)}$.

Теорема 4(2). *Пусть выполнено условие*

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t}\,dt + \int_1^\infty \frac{e^{-f^2(t)/2}}{t\,f(t)}\,dt < \infty. \tag{2.17}$$

Тогда

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\,\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{b_n} \geqslant b + f(\varepsilon\, n)\right) + \bar\Phi(b)\,\log\varepsilon\right)\\ &\quad = \bar\Phi(b)\,\gamma - V_b(0, b_n) + \mathbf{E}\log f^{-1}(\mathcal{N}-b)\,I[\mathcal{N}-b>0],\end{aligned} \tag{2.18}$$

и если, кроме того, $\mathbf{E}X^2\log(1+|X|) < \infty$, *то* (2.18) *имеет место с заменой* b_n *на* B_n.

Если же $\mathbf{E}|X|^{2+\delta} < \infty$ *для некоторого положительного* $\delta < 1$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\sum_{n\geqslant 1} n^{-1+\delta/2}\,\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{B_n} \geqslant b + f(\varepsilon\,\exp(n^{\delta/2}))\right) + \bar\Phi(b)\,\log\varepsilon\right) = \bar\Phi(b)\,\gamma_{(\delta/2)-1} - V_b(\delta, B_n) + 2\,\delta^{-1}\,\mathbf{E}\log f^{-1}(\mathcal{N}-b)\,I[\mathcal{N}-b>0].$$

Следствие 3. *Пусть выолнено условие* (2.17). *Тогда*

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\,\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{b_n} - b\right| \geqslant f(\varepsilon\, n)\right) + \log\varepsilon\right)\\ &\quad = \gamma - \widetilde{V}_b(0, b_n) + \mathbf{E}\log f^{-1}(|\mathcal{N}-b|),\end{aligned} \tag{2.19}$$

и если, кроме того, $\mathbf{E}X^2 \log(1+|X|) < \infty$*, то* (2.19) *имеет место с заменой* b_n *на* B_n.

Теорема B(1) является следствием равенства (2.19) при $b = 0$ и $f(t) = t^{(2-p)/(2p)}$, с учетом того, что $\mathbf{E} \log|\mathcal{N}| = -(\log 2 + \gamma)/2$.

Таким образом, наша ближайшая (и основная) цель – доказать предложение 1.

§3. Доказательство предложения 1.

Пусть положительная функция $b(u,\varepsilon)$, задана на $u \geqslant 1$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, и при каждом u удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon \to 0} b(u,\varepsilon) = 0. \tag{3.1}$$

Лемма 1. *Пусть последовательность* $\Delta_n(x)$, $x \in \mathcal{R}$, *функций ограниченной вариации удовлетворяет условию*

$$\Delta_n(-\infty) = 0, \quad \sum_{n \geqslant 1} r(n) \sup_x |\Delta_n(x)| < \infty, \tag{3.2}$$

где $r(n)$ *– некоторая неотрицательная последовательность. Тогда*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{n \geqslant 1} r(n)\, \Delta_n(b(n,\varepsilon)) = \sum_{n \geqslant 1} r(n)\, \Delta_n(0+). \tag{3.3}$$

Лемма 1 следует из условий (3.1), (3.2) и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости (см. также [6, лемма 2.8]).

Пусть неотрицательная функция ограниченной вариации $r(u)$, $u \geqslant 1$, непрерывна слева на $(1,\infty)$, а также

$$\lim_{u \to \infty} r(u) = 0. \tag{3.4}$$

Заметим, что $\lim\limits_{u \to \infty} r(u) = r(1) + \int\limits_1^\infty dr(u) = C \in [0,\infty)$.

Лемма 2. *Пусть непрерывная положительная функция* $b(u,\varepsilon)$ *не убывает на* $[1,\infty)$ *при каждом* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *и удовлетворяет условию* (3.1), *и пусть функция распределения* $F(x)$ *непрерывна в* 0. *Положим*

$$\bar F(u,\varepsilon) = 1 - F(b(u,\varepsilon)), \quad h(u,\varepsilon) = r(u)\, \bar F(u,\varepsilon). \tag{3.5}$$

Тогда, из условий (3.4) *и*

$$\int_1^\infty h(u,\varepsilon)\, du < \infty, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \tag{3.6}$$

следует

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{n\geqslant 1} h(n,\varepsilon) - \int\limits_1^\infty h(u,\varepsilon)\,du\right) = \bar F(0)\,U_\infty, \tag{3.7}$$

где $\bar F(0) = 1 - F(0)$ *и*

$$U_\infty = \lim_{N\to\infty} U_N = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^N r(n) - \int\limits_1^N r(u)\,du\right) < \infty. \tag{3.8}$$

Доказательство леммы 2. Используя вариант формулы суммирования Эйлера–Маклорена и учитывая (3.4) и (3.6), находим

$$\sum_{n\geqslant 1} h(n,\varepsilon) = \int_1^\infty h(u,\varepsilon)\,du + \frac12\,h(1,\varepsilon) + \Delta_1(\varepsilon) + \Delta_2(\varepsilon), \tag{3.9}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1(\varepsilon) &= \sum_{j\geqslant 1}\int\limits_0^1 \frac{2t-1}{2}\,\bar F(t+j,\varepsilon)\,dr(t+j),\\ \Delta_2(\varepsilon) &= \sum_{j\geqslant 1}\int\limits_0^1 \frac{2t-1}{2}\,r(t+j)\,d\bar F(t+j,\varepsilon). \end{aligned} \tag{3.10}$$

(если функция ограниченной вариации $r_j(u) = r(u+j)$ определена на $[0,1)$ и непрерывна слева на $(0,1)$, то

$$\int\limits_0^{1-} \frac{2u-1}{2}\,dr(u+j) = \frac{r(j)+r(1+j)}{2} + \int\limits_0^1 r(u+j)\,du.)$$

Кроме того (напоминаем, что в условиях леммы 2 функция $F(b(u,\varepsilon))$ при каждом $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ не убывает на интервале $(1,\infty)$)

$$|\Delta_1(\varepsilon)| \leqslant \frac12\int\limits_1^\infty |dr(u)|,\quad |\Delta_2(\varepsilon)| \leqslant \frac12\int\limits_1^\infty r(u)\,dF(b(u,\varepsilon)) \tag{3.11}$$

и (см. (3.1))

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h(1,\varepsilon) = r(1)\,\bar F(0). \tag{3.12}$$

Из (3.11) и (3.1) по теореме мажорируемой сходимости и снова по формуле Эйлера–Маклорена получим

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta_1(\varepsilon) &= \sum_{j\geqslant 1}\int\limits_0^1 \lim_{\varepsilon\to 0} p(t+j,\varepsilon)\,\frac{2t-1}{2}\,dr(t+j)\\ &= \bar F(0)\,(-\frac{1}{2}\,r(1)\,+U_\infty).\end{aligned}\tag{3.13}$$

Кроме того,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta_2(\varepsilon)=0.\tag{3.14}$$

Действительно, для любого фиксированного $N>1$

$$\Bigg(\int\limits_{n_0}^{N}+\int\limits_{N}^{\infty}\Bigg)\, r(u)\,dF(b(u,\varepsilon))\leqslant c_1(N)\,\mathbf{P}(\eta\in(b(1,\varepsilon),b(N,\varepsilon))\big]+c_2(N),$$

где $c_1(N)=\sup\limits_{u\in[1,N]} r(u)$, $c_2(N)=\sup\limits_{u\geqslant N} g(u)$, откуда согласно (3.11), (3.1), (3.4), с учетом того, что N может быть сколь угодно большим, следует (3.14) (напоминаем, что $F(x)$ непрерывна в 0).

Лемма 2 доказана. □

Из лемм 1 и 2 вытекает (см. (3.8))

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\sum_{n\geqslant 1} r(n)\,\bar F_n(b(n,\varepsilon))-\int\limits_1^\infty r(u)\,\bar F(b(u,\varepsilon))\,du\Bigg)\\ &\quad=\bar F(0)\,U_\infty-\sum_{n\geqslant 1} r(n)\,\big(F_n(0+)-F(0)\big)<\infty.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Пусть теперь $r(y)=g'(y)$. Тогда (см. обозначения в предложении 1), положив $b(u,\varepsilon)=f(\varepsilon\, g(u))$, получим

$$\begin{aligned}\int\limits_1^\infty g'(u)\,\bar F(b(u,\varepsilon))\,du &= \int\limits_1^\infty \bar F(f(\varepsilon\, g(u)))\,dg(u)=\varepsilon^{-1}\int\limits_{\varepsilon\, g(1)}^\infty \bar F(f(t))\,dt\\ &=\varepsilon^{-1}\int\limits_0^\infty \bar F(f(t))\,dt-\varepsilon^{-1}\int\limits_0^{\varepsilon\, g(1)}\bar F(f(t))\,dt\\ &=\varepsilon^{-1}A_f-g(1)\,\bar F(0)+o\,(1),\ \ \varepsilon\searrow 0.\end{aligned}\tag{3.16}$$

И, если $b(u,\varepsilon) = f(\varepsilon\, e^{g(u)})$, то (обозначив $\varepsilon\, e^{g(1)}$ через δ)

$$\int_1^\infty \bar F(f(\varepsilon\, e^{g(u)}))\, dg(y) = \int_\delta^\infty \bar F(f(t))\, d\log t$$

$$= \int_1^\infty \bar F(f(t))\, d\log t + \int_\delta^1 (\bar F(f(t)) - \bar F(0))\, d\log t - \bar F(0)\,\log\delta \tag{3.17}$$

$$= \widetilde{A}_f - \bar F(0)\,\log\varepsilon - \bar F(0)\, g(1) + o\,(1),\ \ \varepsilon \searrow 0.$$

Предложение 1 следует из (3.15)–(3.17).

§4. Доказательство теорем

Теоремы 4(1) и 4(2) нами уже доказаны. Займемся проверкой теорем 1–3.

Нижеследующие вспомогательные утверждения представляют определенный самостоятельный интерес. Используются обозначения, введенные в п.1.

Положим $\Delta_n = \sup_x |G_n(x) - G(x)|$.

Предложение 2 $(1 < \alpha < 2)$**.** *Пусть неотрицательная функция* $\tau(x)$ *удовлетворяет условиям*:

$$\tau(x)\, x^\delta \ \textit{монотонна при некотором}\ \delta\ \textit{и всех}\ x \geqslant x_0 \tag{4.1}$$

и

$$\int_1^\infty \tau(x)\, x^{\alpha-3}\, dx < \infty. \tag{4.2}$$

Положим $\nu_\alpha(y) = \int_1^\infty \tau(x)\, x^{\alpha-3}\, \min\,(y,\, x)\, dx,\ \ y \geqslant 1$. *Тогда, если*

$$\int_{|y|>1} \nu_\alpha(|y|)\, |V(y) - G(y)|\, dy < \infty, \tag{4.3}$$

то

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\tau(n^{1/\alpha})}{n}\, \Delta_n < \infty. \tag{4.4}$$

Заметим, что (4.4) становится тривиальным, если

$$\int\limits_1^\infty \tau(x)\, x^{-1}\, dx < \infty.$$

Доказательство. Пусть $1 < \alpha < 2$. Из [1, теорема 1] следует, что равномерно по $a \in (1/2, 3/2)$

$$\Delta_n \leqslant C\, n \left(m^{-2} \int\limits_0^{a\,m} x|S(x)|\, dx + m^{-3} \int\limits_0^{a\,m} x^2 |D(x)|\, dx \right.$$
$$\left. + m^{-1} \int\limits_{a\,m}^\infty (|S(x)| + |D(x)|)\, dx + m^{-2} \right),$$

где $m = n^{1/\alpha}$, а C не зависит от n.

Принимая во внимание условие (4.1) и заменяя суммы интегралами, отсюда несложно получить, что (4.4) равносильно условиям (4.2) и

$$\int\limits_1^\infty \big(u_0(x)\, x|S(x)| + u_1(x)\, x^2|D(x)| + u_{-1}(x)\,(|S(x)| + |D(x)|)\big)\, dx < \infty, \tag{4.5}$$

где $u_k(y) = \int\limits_y^\infty \tau(x)\, x^{\alpha-3-k}\, dx,\ k = 0,\ 1$, и $u_{-1}(y) = \int\limits_1^y \tau(x)\, x^{\alpha-2}\, dx$.

Учитывая, что $u_1(y) \leqslant u_0(y)/y$, найдем (см. рассуждения, следующие после теоремы 1 из [1]), что (4.5) вытекает из (4.3). Предложение 2 проверено. □

Предложение 3 ($\alpha = 1$). *Пусть неотрицательная функция* $\tau(x)$ *удовлетворяет условиям* (4.1) *и* $\int\limits_1^\infty \tau(x)\, x^{-2} \log^2 x\, dx < \infty$, *а также выполнены условия* (1.3) *и* (4.3) ($\alpha = 1$). *Тогда имеет место* (4.4) ($\alpha = 1$).

Предложение 4 ($0 < \alpha < 1$). *Пусть функции* $S(x)$ *и* $D(x)$ *монотонны при всех достаточно больших* x, *неотрицательная функция* $\tau(x)$ *удовлетворяет условиям* (4.1) *и* $\int\limits_1^\infty \tau(x)\, x^{-\min(1+\alpha, 2-\alpha)}\, dx < \infty$, *а* *также* (4.3) *при* $\nu_\alpha(y) = y^{-1} \int\limits_1^\infty \tau(x)\, x^{\alpha-2} \min(y,\, x)\, dx$. *Тогда имеет место* (4.4).

Предложения 3 и 4 доказываются аналогично предложению 2 с использованием [1, теоремы 2 и 3].

Теоремы 1–3 являются достаточно простыми следствиями предложений 1–4.

Замечания 2.2 и 2.3 несложно проверяются с использованием стандартных свойств медленно меняющихся функций.

Список литературы

1. P. Hall, *Two-sided bounds on the rate of convergence to a stable law.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **57** (1981), 349–364.
2. A. Gut, J. Steinebach, *Convergence rates in precise asymptotics II.* — Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. **39** (2013), 95–110.
3. A. Gut, J. Steinebach, *Precise asymptotics – a general approach* — Acta Math. Hung. **138**, No. 4 (2013), 365–385.
4. L. T. Kong, *Convergence rate in precise asymptotics for the law of the iterated logarithm.* — Lith. Math. J. **56**, No. 3 (2016), 318–324.
5. L. T. Kong, H. S. Dai, *Convergence rate in precise asymptotics for Davis law of large numbers.* — Statist. Probab. Lett. **119**, No. 10 (2016), 295–300.
6. Y. Zhang, *A note on the convergence rates in precise asymptotics.* — J. Ineq. Appl. **15** (2019).
7. Л. В. Розовский, *Некоторые предельные теоремы для больших уклонений сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения нормального закона.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **294** (2002), 165–193.
   L. V. Rozovsky, *Some limit theorems for large deviations of sums of independent random variables with a common distribution function from the domain of attraction of the normal law.* — J. Math. Sci. **127** (2005), 1767–1783.
8. В. М. Золотарев, *Одномерные устойчивые распределения.* М.: Наука, 1983, 304 с.
9. Ф. Н. Галстян, *О скорости сходимости в центральной предельной теореме.* — В сб.: "Теория вероятностей и математическая статистика Изд-во Киев. унив., No. 5 (1971), 14–26.
10. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* М.: Наука, 1972, 416 с.

Rozovsky L. V. Some limit theorems for large deviations of sums of independent random variables with a common distribution function from the domain of normal attraction of a stable distribution.

We examine certain questions, related to the convergence rate in the so-called “precise asymptotics”, when a limiting law is stable (including the normal one). In particular, the results obtained in Gut and Steinebach, (Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. 39:95–110, 2013) are generalized and refined.

Санкт-Петербургский государственный
химико-фармацевтический университет
ул. Проф. Попова 14, Санкт-Петербург, 197376, Россия
E-mail: L_Rozovsky@mail.ru

Поступило 17 июля 2020 г.