Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 495, 2020 г.

И. А. Рагозин

НОВЫЕ КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРЕТО I ТИПА, ОСНОВАННЫЕ НА НЕКОТОРОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ

§1. Введение

Целью данной работы является построение и асимптотическое исследование новых критериев согласия для классического распределения Парето, основанных на некоторой характеризации. Классическое распределение Парето или распределение Парето I типа $P(I)(1, \lambda)$ имеет следующую ф.р. (функцию распределения) G:

$$G(x) = 1 - x^{-\lambda}, \quad x \geqslant 1, \quad \lambda > 0.$$

В 2017 году Ахсануллах и Анис [1] доказали следующую характеризацию для экспоненциального закона распределения:

Пусть X_1, X_2, X *– н.о.р.с.в. (независимые одинаково распределенные случайные величины) с непрерывной функцией распределения* F*, такой что* $F(0) = 0$*,* $F(x) > 0$ *для всех* $x > 0$*, бесконечно дифференцируема и* $f(x)$ *– соответствующая плотность. Тогда* $\max(X_1, X_2)$ *и* $\min(X_1, X_2) + X$ *одинаково распределены тогда и только тогда, когда*

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0, \quad \lambda > 0.$$

Теперь заметим, что если X – экспоненциально распределенная случайная величина с произвольным параметром λ, то новая случайная величина $\exp(X)$ имеет классическое распределение Парето или распределение Парето I типа с соответствующими параметрами $P(I)(1, \lambda)$ [2]. Так как экспонента – монотонная функция, то утверждение, что $\max(X_1, X_2)$ и $\min(X_1, X_2) + X$ одинаково распределены, эквивалентно следующему:

$$\exp(\max(X_1, X_2)) \stackrel{d}{=} \min(\exp(X_1), \exp(X_2)) \cdot \exp(X).$$

Ключевые слова: характеризация распределений, распределение Парето I типа, U-статистики, асимптотическая эффективность, большие уклонения, информация Кульбака–Лейблера.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ-ННИО 20-51-12004.

Обозначив $Y_i = \exp(X_i)$, получим новую характеризацию для распределения Парето I типа:

Пусть Y_1, Y_2, Y *– н.о.р.с.в. с непрерывной функцией распределения* G*, такой что* $G(1) = 0$*,* $G(x) > 0$ *для всех* $x > 1$*, бесконечно дифференцируема и* $g(x)$ *– соответствующая плотность.* $\max(Y_1, Y_2)$ *и* $\min(Y_1, Y_2) \cdot Y$ *одинаково распределены тогда и только тогда, когда*

$$G(x) = 1 - x^{-\lambda}, \quad x \geqslant 1, \quad \lambda > 0.$$

При помощи теории U-статистик будут построены новые критерии согласия, основанные на полученной характеризации, для проверки сложной гипотезы о принадлежности к классу распределений Парето I типа с произвольным параметром формы λ, затем на основе понятия бахадуровской эффективности будет выполнено асимптотическое сравнение с сопутствующим нахождением предельного распределения и логарифмической асимптотики вероятности больших уклонений.

Автор благодарен ушедшему из жизни Я. Ю. Никитину за постановку данной задачи и за многочисленные ценные советы по ходу исследования.

§2. Построение статистик

Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ – независимые одинаково распределенные наблюдения с функцией распределения G. Используя характеризацию из Введения, будем проверять сложную гипотезу согласия H_0, согласно которой G есть ф.р. закона распределения Парето I типа против альтернативы H_1, заключающейся в том, что гипотеза H_0 не выполняется.

Обозначим через $G_n(t)$ обычную эмпирическую ф.р., а именно

$$G_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} I\{Y_i < t\}.$$

Рассмотрим следующую U-эмпирическую ф.р., отвечающую левой части выражения в характеризации.

$$LU_n(t) = \left(C_n^2\right)^{-1} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} I\left\{\max(Y_i, Y_j) < t\right\}.$$

Построим U-эмпирическую ф.р. для правой части:

$$RU_n(t) = \left(C_n^3\right)^{-1} \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} I\left\{\min(Y_i, Y_j) \cdot Y_k < t\right\},$$

Введем интегральную статистику:

$$IU_n = \int_1^\infty (LU_n(t) - RU_n(t))\, dG_n(t),$$

и статистику типа Колмогорова:

$$KU_n = \sup_{t \geqslant 1} |LU_n(t) - RU_n(t)|,$$

которые будут поставлены в основу для проверки H_0 против альтернативы H_1. По теореме Гливенко–Кантелли для U-эмпирических функций [3], выражение $LU_n(t) - RU_n(t)$ ввиду рассматриваемой характеризации стремится п.н. к нулю равномерно по t, поэтому IU_n и KU_n при основной гипотезе должны быть малы.

§3. Эффективность по Бахадуру

Одна из целей данной работы – асимптотическое сравнение построенных статистик, так как статистика типа Колмогорова KU_n не является асимптотически нормальной, то понятие бахадуровской эффективности представляется наиболее удобным для сравнения таких статистик, поэтому изложим основные факты теории Бахадура [7, 8].

Пусть есть последовательность наблюдений $s = (X_1, X_2, \dots)$ с общим распределением $\mathbf{P}_\theta$, $\theta \in \Theta$. Будем проверять гипотезу $H_0 : \theta \in \Theta_0 \subset \Theta$ против альтернативы $H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$. Допустим, что для проверки указанной гипотезы используется последовательность статистик $T_n(s) = T_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$, считая критическими их большие значения. Введем следующие обозначения:

$$F_n(t) = \mathbf{P}_{\theta_0}(s : T_n(s) < t), \forall \theta_0 \in \Theta_0,$$
$$L_n(s) = 1 - \inf_{\theta_0 \in \Theta_0} \{F_n(T_n(s))\},$$

где величина $L_n(s)$ называется достигаемым уровнем или P-значением. Теперь определим одно из основных понятий в этой теории – точный бахадуровский наклон $c_T(\theta)$ последовательности $\{T_n\}$ при H_1, определяемый как положительная и конечная функция, описывающая скорость экспоненциального убывания достигаемого уровня последовательности статистик при альтернативе H_1, равная:

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln(L_n(s)) = -\frac{1}{2} c_T(\theta), \quad \mathbf{P}_\theta\text{-п.н.} \quad .$$

Однако, вычислить точный наклон по этой формуле невозможно, и для этого воспользуемся фундаментальной теоремой Бахадура [6, 7], которая утверждает, что точный бахадуровский наклон для последовательности статистик T_n существует и вычисляется следующим образом:

$$c_T(\theta) = 2k(b(\theta)), \quad \forall\theta \in \Theta_1,$$

где функции $k(\,\cdot\,)$, $b(\,\cdot\,)$ и последовательность статистик $\{T_n\}$ удовлетворяют следующим условиям:

(1) $T_n \to\ b(\theta)$ по $\mathbf{P}_\theta$-вероятности, $\theta \in \Theta_1$, где $-\infty < b(\theta) < \infty$, и
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}_\theta(T_n \geqslant a) = -k(a)$ для любого $\theta \in \Theta_0$ и любых a из некоторого открытого интервала I, где функция k непрерывна на I, причем $\{b(\theta), \theta \in \Theta_1\} \subset I$.

Для бахадуровского точного наклона выполнено следующее неравенство:

$$c_T(\theta) \leqslant 2K(\theta),$$

где $K(\theta)$ – информация или “расстояние” Кульбака–Лейблера между альтернативой и семейством распределений Парето I типа с произвольным параметром формы [6, 7]. Поэтому естественно локальную бахадуровскую эффективность последовательности $\{T_n\}$ определить формулой

$$\mathrm{eff}_T = \lim_{\theta\to 0} \frac{c_T(\theta)}{2K(\theta)}. \tag{1}$$

§4. Вычисление информации Кульбака–Лейблера

Начнем с описания альтернатив $f_i(x,\theta)$, $x \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 6$, которые будут рассмотрены в этой работе:

- **Альтернатива сдвига** с плотностью распределения:

$$f_1(x,\theta) = \frac{1+\theta}{(x+\theta)^2}, \quad x \geqslant 1,\ \ \theta \geqslant 0.$$

- **Альтернатива Log-Weibull** с функцией распределения:

$$F_2(x,\theta) = 1 - e^{-(\ln(x))^{\theta+1}}, \quad x \geqslant 1,\ \ \theta \in (0,1).$$

- **Альтернатива Лемана** с функцией распределения:

$$F_3(x,\theta) = F^{1+\theta}(x) = (1 - x^{-1})^{1+\theta}, \quad x \geqslant 1,\ \ \theta > 0.$$

• **Альтернатива связи с распределением Парето типа IV** с функцией распределения:

$$F_4(x,\theta) = P_{IV}\left(1, 1, \frac{1}{1+\theta}, 1\right)(x) = 1 - \frac{1}{1+(x-1)^{1+\theta}}, \quad x \geqslant 1, \ \theta \geqslant 0.$$

• **Синус-альтернатива** с функцией распределения:

$$F_5(x,\theta) = F(x) - \theta \sin(\pi F(X)), \quad x \geqslant 1, \ \theta \in \left[0, \frac{1}{\pi}\right].$$

• **Альтернатива смеси из двух Парето** с функцией распределения:

$$F_6(x,\theta) = (1-\theta)\frac{x-1}{x} + \theta(1 - x^{-\beta}), \quad x \geqslant 1, \ \beta > 1, \ \theta \in (0,1).$$

Заметим, что при $\theta = 0$, все альтернативные плотности переходят в плотность стандартного распределения Парето I типа $P(I)(1,1)$. Теперь определим информацию Кульбака–Лейблера [6] для альтернативной плотности $f(x,\theta)$ в случае сложной нулевой гипотезы H_0.

$$K(\theta) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \int_1^\infty \ln \frac{f(x,\theta)}{\lambda x^{-(\lambda+1)}} f(x,\theta)\, dx.$$

Инфимум достигается при

$$\lambda = \Big(\int_1^\infty \ln(x) f(x,\theta)\, dx \Big)^{-1},$$

и тогда, так как рассматриваемые альтернативы f_i, $i = 1, \ldots, 6$, удовлетворяют условиям регулярности (см. [7], §4), можно получить следующее выражения для информации Кульбака–Лейблера [11]:

$$2K(\theta) \sim \Big\{ \int_1^\infty x^2 f'_\theta(x,0)^2 dx - \Big[\int_1^\infty \ln(x) f'_\theta(x,0)\, dx \Big]^2 \Big\} \cdot \theta^2.$$

Теперь найдем асимптотику $K_i(\theta)$, $i = 1, \ldots, 6$, для наших альтернатив при $\theta \to 0$:

$$
\begin{aligned}
2K_1(\theta) &= \frac{\theta^2}{12} + o(\theta^2),\\
2K_2(\theta) &= \frac{\pi^2}{6} \cdot \theta^2 + o(\theta^2),\\
2K_3(\theta) &= \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^4}{36}\right) \cdot \theta^2 + o(\theta^2),\\
2K_4(\theta) &= \frac{1}{36}(3 + 4\pi^2) \cdot \theta^2 + o(\theta^2),\\
2K_5(\theta) &= \left(\frac{\pi^2}{2} - Si^2(\pi)\right) \cdot \theta^2 + o(\theta^2),\\
2K_6(\theta) &= \frac{(\beta-1)^4}{\beta^2(2\beta-1)} \cdot \theta^2 + o(\theta^2).
\end{aligned}
$$

§5. Интегральная статистика и ее свойства

Статистика IU_n эквивалентна U-статистике степени 4 с центрированным ядром:

$$
\begin{aligned}
\Phi(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = \frac{1}{12}&\Bigg(\sum_{\substack{i,j,k \in (1,2,3,4)\\ i \neq j \neq k}} I\{\max(Y_i, Y_j) < Y_k\}\Bigg)\\
&- \frac{1}{12}\Big(I\{\min(Y_1, Y_2) \cdot Y_3 < Y_4\} + I\{\min(Y_1, Y_2) \cdot Y_4 < Y_3\}\\
&+ I\{\min(Y_2, Y_3) \cdot Y_4 < Y_1\} + I\{\min(Y_2, Y_3) \cdot Y_1 < Y_4\}\\
&+ I\{\min(Y_3, Y_4) \cdot Y_1 < Y_2\} + I\{\min(Y_3, Y_4) \cdot Y_2 < Y_1\}\\
&+ I\{\min(Y_1, Y_3) \cdot Y_2 < Y_4\} + I\{\min(Y_1, Y_3) \cdot Y_4 < Y_2\}\\
&+ I\{\min(Y_1, Y_4) \cdot Y_2 < Y_3\} + I\{\min(Y_1, Y_4) \cdot Y_3 < Y_2\}\\
&+ I\{\min(Y_2, Y_4) \cdot Y_1 < Y_3\} + I\{\min(Y_2, Y_4) \cdot Y_3 < Y_2\}\Big).
\end{aligned}
$$

Найдем проекцию этого ядра:

$$
\Psi(t) = \mathbf{E}\left(\Phi(X, Y, Z, W) | W = t\right) = -\frac{3}{8t^2} + \frac{1}{3t} - \frac{1}{24}.
$$

Также отметим, что $\mathbf{E}\{\Psi(X)\} = 0$. И теперь вычислим дисперсию проекции:

$$\Delta^2 = \mathbf{E}\{\Psi^2(X)\} = \frac{1}{1080}.$$

Таким образом, ядро Φ не вырождено, а тогда по теореме Хёффдинга [3] при $n \to \infty$:

$$\sqrt{n} IU_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, 16\Delta^2\right).$$

Так как ядро Φ не только не вырождено и центрировано, но и ограничено, то мы можем воспользоваться результатами о больших уклонениях U-статистик из работы [4]:

Теорема 1. *При* $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln\left(\mathbf{P}(IU_n > t)\right) = h(t),$$

где h – некоторая непрерывная функция, такая что

$$h(t) \sim -\frac{t^2}{32\Delta^2} \quad \textit{при} \quad t \to 0.$$

Теперь мы можем вычислить локальный бахадуровский наклон нашей последовательности статистик, опираясь на теорему Бахадура [7, 8]. Ясно, что

$$c_{IU}(\theta) \sim \frac{b_{LU}^2(\theta)}{16\Delta^2} \quad \text{при} \quad \theta \to 0.$$

Асимптотика $b_{LU}(\theta)$ уже вычислена для широкого класса невырожденных U-статистик в работе [5]. Условия регулярности, сформулированные в ней, выполняются для рассматриваемых альтернатив и тогда можно выписать следующее соотношение:

$$b_{IU}(\theta) \sim 4 \int_1^\infty \Psi(x) f'_\theta(x, 0) dx \cdot \theta \quad \text{при} \quad \theta \to 0,$$

где $f(x, \theta)$ – альтернативная плотность. Пользуясь этой формулой, получим следующую формулу для локального бахадуровского наклона:

$$c_{IU}(\theta) \sim \frac{\left(\int_1^\infty \Psi(x) f'_\theta(x, 0) dx\right)^2 \theta^2}{\Delta^2} \quad \text{при} \quad \theta \to 0. \tag{2}$$

Теперь вычислим локальную бахадуровскую эффективность для представленных альтернатив.

• **Альтернатива сдвига.**
Используя формулу (2), получим, что бахадуровский наклон равен

$$c_{1,IU}(\theta) \sim \frac{\left(\int\limits_1^\infty \Psi(x) f'_{1,\theta}(x,0)dx\right)^2 \cdot \theta^2}{\Delta^2} = \frac{5}{96} \cdot \theta^2 \quad \text{при } \theta \to 0.$$

Тогда, подставляя полученные значение в формулу (1), получим, что локальная бахадуровская эффективность равна

$$\mathrm{eff}_{IU}(f_1) = \lim_{\theta\to 0} \frac{c_{1,IU}(\theta)}{2K_1(\theta)} = \frac{5}{8} = 0.625.$$

Вычисления локальных бахадуровских наклонов и эффективностей для альтернатив f_2, f_3,f_4 и f_5 аналогичны, поэтому получим:

• **Альтернатива Log-Weibull.**

$$\mathrm{eff}_{IU}(f_2) = \lim_{\theta\to 0} \frac{c_{2,IU}(\theta)}{2K_2(\theta)} \approx 0.750.$$

• **Альтернатива Лемана**

$$\mathrm{eff}_{IU}(f_3) = \lim_{\theta\to 0} \frac{c_{3,IU}(\theta)}{2K_3(\theta)} \approx 0.804.$$

• **Альтернатива связи с распределением Парето типа IV**

$$\mathrm{eff}_{IU}(f_4) = \lim_{\theta\to 0} \frac{c_{4,IU}(\theta)}{2K_4(\theta)} \approx 0.894.$$

• **Синус-альтернатива**

$$\mathrm{eff}_{IU}(f_5) = \lim_{\theta\to 0} \frac{c_{5,IU}(\theta)}{2K_5(\theta)} \approx 0.505.$$

Для альтернативы f_6 выражение для локальной бахадуровской эффективности зависит от параметра β, поэтому их рассмотрим подробнее.
• **Альтернатива смеси из двух Парето.**

$$\mathrm{eff}_{IU}(f_6, \beta) = \frac{15\beta^2(2\beta - 1)}{2(\beta+1)^2(\beta+2)^2}.$$

Вычислим для $\beta = 4, \ldots, 7$:

$$\begin{aligned}
\beta = 4, &\quad \mathrm{eff}_{IU}(f_6, 4) = \frac{14}{15} \approx 0.933;\\
\beta = 5, &\quad \mathrm{eff}_{IU}(f_6, 5) = \frac{375}{392} \approx 0.957;\\
\beta = 6, &\quad \mathrm{eff}_{IU}(f_6, 6) = \frac{1485}{1568} \approx 0.947;\\
\beta = 7, &\quad \mathrm{eff}_{IU}(f_6, 7) = \frac{3185}{3456} \approx 0.922.
\end{aligned}$$

§6. Статистика типа Колмогорова и ее свойства

Статистику KU_n можно рассматривать как супремум по t модуля семейства U–статистик с ядрами:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(X, Y, Z; t) = \frac{1}{3}\Big(&I\{\max(X, Y) < t\} + I\{\max(X, Z) < t\}\\
&+ I\{\max(Y, Z) < t\}\Big) - \frac{1}{3}\big(I\{\min(X, Y) \cdot Z < t\}\\
&+ I\{\min(X, Z) \cdot Y < t\} + I\{\min(Y, Z) \cdot X < t\}\Big).
\end{aligned}$$

Однако предельное распределение для таких статистик неизвестно, но возможно найти логарифмическую асимптотику вероятности больших уклонений.

Для этого сначала вычислим проекцию ядра:

$$\begin{aligned}
\Psi_1(s, t) &= \mathbf{E}\{\Phi_1(X, Y, Z; t) | Z = s\}\\
&= \frac{1}{3}\left(\mathbf{P}(\max(X, Y) < t) - \mathbf{P}(\min(X, Y) \cdot s < t)\right)\\
&\quad + \frac{2}{3}\left(\mathbf{P}(\max(X, s) < t) - \mathbf{P}(\min(X, s) \cdot Y < t)\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\left(1 - \frac{1}{t}\right)^2 + I\{s < t\}\left(1 - \frac{2}{s} + \frac{s^2}{t^2}\right)\right)\\
&\quad + \frac{2}{3}\left(\frac{\ln(\min(s, t))}{t} + \frac{1}{\min(s, t)} - 1\right).
\end{aligned}$$

Теперь найдем функцию дисперсии этого семейства ядер и ее супремум:

$$\Delta_1^2(t) = \mathbf{E}\{\Psi_1^2(X,t)\} = \frac{4(t-1)^3}{27t^4},$$
$$\Delta_1^2 = \sup_{t\geqslant 1} \Delta_1^2(t) = \frac{1}{64} \quad \text{при } t = 4.$$

Следовательно семейство ядер не вырождено, а также ограничено и центрировано в силу рассматриваемой характеризации, тогда можно применить теорему о больших уклонения при справедливости гипотезы H_0 для U-эмпирических статистик типа Колмогорова [9].

Теорема 2. *При* $z > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}\left\{KU_n > z\right\} = k(z),$$

где k *– некоторая непрерывная функция, такая что*

$$k(z) \sim -\frac{z^2}{18\Delta_1^2} \quad \textit{при } z \to 0.$$

Опираясь на теорему 2, можно получить следующее выражение для локального бахадуровского наклона для статистики типа Колмогорова аналогично формуле (2) [10]:

$$c_{KU}(\theta) \sim \frac{\sup\limits_{t\geqslant 1}\left(\int\limits_1^\infty \Psi_1(x;t) f'_\theta(x,0)\,dx\right)^2}{\Delta_1^2}\cdot\theta^2 \quad \text{при } \theta\to 0. \tag{3}$$

Вычислим теперь для этой статистики локальные бахадуровские эффективности для рассматриваемых альтернатив.

• Альтернатива сдвига.

Используя формулу (3), вычислим бахадуровский наклон для первой альтернативы:

$$c_{1,KU}(\theta) \sim \frac{\sup\limits_{t\geqslant 1}\left(\int\limits_1^\infty \Psi_1(x;t) f'_{1,\theta}(x,0)\,dx\right)^2}{\Delta_1^2}\cdot\theta^2$$
$$= \frac{\sup\limits_{t\geqslant 1}\left(\frac{t^2-2t\ln(t)-1}{3t^3}\right)^2}{\Delta_1^2}\cdot\theta^2 \approx 0.0284\cdot\theta^2 \quad \text{при } \theta\to 0,$$

супремум равен 0.000445 и достигается в точке $t \approx 5.116$. Тогда локальная бахадуровская эффективность равна

$$\mathrm{eff}_{KU}(f_1) = \lim_{\theta \to 0} \frac{c_{1,KU}(\theta)}{2K_1(\theta)} \approx 0.342.$$

Вычисления локальных бахадуровских наклонов и эффективностей для альтернатив f_2, f_3, f_4 и f_5 аналогичны, поэтому перечислим их ниже:

• **Альтернатива Log-Weibull.**

$$\mathrm{eff}_{KU}(f_2) = \lim_{\theta \to 0} \frac{c_{2,KU}(\theta)}{2K_2(\theta)} \approx 0.277;$$

• **Альтернатива Лемана**

$$\mathrm{eff}_{KU}(f_3) = \lim_{\theta \to 0} \frac{c_{3,KU}(\theta)}{2K_3(\theta)} \approx 0.268;$$

• **Альтернатива связи с распределением Парето типа IV**

$$\mathrm{eff}_{KU}(f_4) = \lim_{\theta \to 0} \frac{c_{4,KU}(\theta)}{2K_4(\theta)} \approx 0.329;$$

• **Синус-альтернатива**

$$\mathrm{eff}_{KU}(f_5) = \lim_{\theta \to 0} \frac{c_{5,KU}(\theta)}{2K_5(\theta)} \approx 0.394;$$

• **Альтернатива смеси из двух Парето.**

Вычислим для $\beta = 3, \ldots, 6$

$$\begin{aligned}
\beta &= 3, \quad \mathrm{eff}_{KU}(f_6, 3) \approx 0.396;\\
\beta &= 4, \quad \mathrm{eff}_{KU}(f_6, 4) \approx 0.397;\\
\beta &= 5, \quad \mathrm{eff}_{KU}(f_6, 5) \approx 0.377;\\
\beta &= 6, \quad \mathrm{eff}_{KU}(f_6, 6) \approx 0.355.
\end{aligned}$$

§8. Заключение

В данной работе построены новые критерии согласия для семейства распределений Парето I типа с произвольным параметром формы λ, основанный на характеризации, полученной из характеризации экспоненциального распределения, что позволяет проверять сложную гипотезу согласия. Были вычислены логарифмическая асимптотика вероятностей больших уклонений при нулевой гипотезе и локальная бахадуровская эффективность для ряда подходящих альтернатив. Для

Таблица 1. Локальные бахадуровские эффективности для IU_n и KU_n.

Альтернатива	IU_n	KU_n
f_1	0.625	0.342
f_2	0.750	0.277
f_3	0.804	0.268
f_4	0.894	0.329
f_5	0.505	0.394
$f_6, \quad \beta = 4$	0.933	0.396
$f_6, \quad \beta = 5$	0.957	0.397

всех рассмотренных альтернатив интегральный критерий оказывается эффективнее статистики типа Колмогорова в бахадуровском смысле, что является типичной ситуацией в асимптотическом сравнении таких критериев. Стоит отметить, что статей, посвященных критериям согласия для семейства распределений Парето I типа, довольно мало, поэтому новые критерии выглядят привлекательно с учетом большого количества рассмотренных альтернатив.

Список литературы

1. M. Ahsanullah, M. Z. Anis, *Some characterizations of exponential distribution.* — Inter. J. Statist. Probab. **6(5)** (2017), 132—139.
2. B. C. Arnorld, *Pareto Distributions. Second edition*, CRC Press, Boca Raton, 2014.
3. В. С. Королюк, Ю. В. Боровских, *Теория U-статистик.* Наукова думка, 1989.
4. Ya. Yu. Nikitin, E. V. Ponikarov, *Rough large deviation asymptotics of Chernoff type for von Mises functionals and U-statistics.* — Proc. St. Petersburg Math. Soc. **7** (1999), 124–167.
5. Ya. Yu. Nikitin, I. Peaucelle, *Efficiency and local optimality of distribution-free tests based on U and V-statistics.* — Metron **LXII** (2004), 185–200.

6. Я. Ю. Никитин, *Асимптотическая эффективность непараметрических статистических критериев.* М.: Наука, 1995.
7. R. R. Bahadur, *Some Limit Theorems in Statistics.* Philadelphia: SIAM, 1971.
8. R. R. Bahadur, *Stochastic comparison of tests.* — Ann. Math. Statist. **31** (1960), 276–295.
9. Ya. Yu. Nikitin, *Large deviations of U-empirical Kolmogorov–Smirnov tests, and their efficiency.* — J. Nonpar. Statist. **22** (2010), 649–668.
10. Ya. Yu. Nikitin, K. Yu. Volkova, *Efficiency of exponentiality tests based on a special property of exponential distribution.* — Math. Methods Statist. **25**, No. 1 (2016), 54–66.
11. M. Obradović, M. Jovanović, B. Milošević, *Goodness-of-fit tests for Pareto distribution based on a characterization and their asymptotics.* — J. Theor. Appl. Statist. **49**, No. 5 (2015), 1026–1041.

Ragozin I. A. New goodness-of-fit tests for Pareto I type distribution, based on a characterization.

In this paper we construct two new goodness-of-fit tests for Pareto I type distribution family with an arbitrary shape-parameter λ, based on a new characterization. We describe their limit distributions, calculate the local Bahadur efficiencies under close alternatives and provide asymptotic comparison of our test statistics.

Национальный
исследовательский университет
"Высшая школа экономики" (НИУ ВШЭ),
ул. Союза Печатников, 16,
Ст. Петербург, Россия
E-mail: ragza@yandex.ru

Поступило 5 октября 2020 г.