Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 495, 2020 г.

С. М. Новиков

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

§1. Введение

Так как понятие независимости случайных элементов играет очень важную роль в теории вероятностей, также естественно рассматривать асимптотическую независимость (**AI**). Говорят, что две последовательности (X_n), (Y_n) случайных элементов одного вероятностного пространства асимптотически независимы, если совместные распределения $P_{(X_n,Y_n)}$ сближаются с $P_{X_n} \times P_{Y_n}$ в некотором смысле при n, стремящемся к бесконечности. Асимптотическая независимость имеет многочисленные связи с другими понятиями и задачами теории вероятностей, см., к примеру, [9].

Пусть (X_n) и (Y_n) – две последовательности случайных элементов измеримых пространств $(E_1, \mathcal{E}_1)$ и $(E_2, \mathcal{E}_2)$, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$. Естественно рассматривать пару (X_n, Y_n) как элемент $(E_1 \times E_2,\ \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$.

В [9] изучались следующие 5 определений **AI**:

AI-0: *Для любых ограниченных* **равномерно непрерывных** *функций*
$f : E_1 \to \mathbb{R}$, $g : E_2 \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}f(X_n)\, g(Y_n) - \mathbb{E}f(X_n)\, \mathbb{E}g(Y_n) \to 0$$

при $n \to \infty$.

AI-1: *Для любой ограниченной* **равномерно непрерывной** *функции*
$h : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$,

$$\int h(x, y) P_{(X_n,Y_n)}(dx, dy) - \int h(x, y)(P_{X_n} \times P_{Y_n})(dx, dy) \to 0$$

Ключевые слова: асимптотическая независимость, слабая зависимость.

Автор благодарен Ю. А. Давыдову за интересные обсуждения и внимание к данной работе.

Работа выполнена при поддержке программы социальных инвестиций “Родные города” ПАО “Газпром нефть”.

при $n \to \infty$.

AI-2: Для любых $A \in \mathcal{E}_1$, $B \in \mathcal{E}_2$,

$$|P_{(X_n,Y_n)}(A \times B) - P_{X_n}(A)\, P_{Y_n}(B)| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{1}$$

AI-3: $\sup_{A\in\mathcal{E}_1, B\in\mathcal{E}_2} |P_{(X_n,Y_n)}(A \times B) - P_{X_n}(A)\, P_{Y_n}(B)| \to 0$, $n \to \infty$.

AI-4: $\quad \|P_{(X_n,Y_n)} - P_{X_n} \times P_{Y_n}\|_{\mathrm{var}} \to 0, \quad n \to \infty.$

Здесь и ниже $\| \cdot \|_{\mathrm{var}}$ – полная вариация меры.

Мы рассматриваем **AI-0** и **AI-1** только в том случае, когда E_1 и E_2 – польские (полные сепарабельные метрические) пространства с метриками d_1, d_2 соответственно, и $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ – борелевские σ-алгебры пространств E_1 и E_2. Наделим пространство $E_1 \times E_2$ одной из метрик

$$d((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2)$$

или

$$r((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = \max\{d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2)\}.$$

Эти метрики эквивалентны: $r \leqslant d \leqslant 2r$. Таким образом, не важно, какую из них использовать в определениях **AI-0** и **AI-1**.

Вспомним определение метрики Леви–Прохорова:

$$\pi(\mu, \nu) = \inf\{\varepsilon : \mu(A^\varepsilon) \leqslant \nu(A) + \varepsilon \ \text{ для всех замкнутых } A\}. \tag{2}$$

(можно ограничиться одним неравенством, не меняя μ и ν местами, см. [4, Theorem 11.3.1].) В силу [3, Theorem 1] верен следующий факт:

$$\begin{gathered}\textbf{AI-1} \text{ эквивалентно}\\ \pi(P_{(X_n,Y_n)},\ P_{X_n} \times P_{Y_n}) \ \to 0, \quad n \to \infty.\end{gathered} \tag{3}$$

Несложно видеть, что следующие импликации имеют место:

AI-4 $\Rightarrow$ **AI-3** $\Rightarrow$ **AI-2** $\Rightarrow$ **AI-0**; **AI-4** $\Rightarrow$ **AI-1** $\Rightarrow$ **AI-0**.

С другой стороны, в [9] показано, что

AI-1 $\not\Rightarrow$ **AI-2**, **AI-2** $\not\Rightarrow$ **AI-3**, **AI-3** $\not\Rightarrow$ **AI-4**, **AI-3** $\not\Rightarrow$ **AI-1**.

В данной работе мы углубляем изучение этих определений. Так же, как в [9], мы начинаем с новых общих результатов об **AI** (в частности, о случае плотных последовательностей). Однако затем мы обращаем внимание на случай, когда X_n, Y_n имеют более специальный вид. К примеру, интересно изучить **AI**, когда X_n, Y_n принадлежат конкретному пространству, поэтому мы рассматриваем пространство последовательностей, то есть, $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^\infty$. Наконец, так как между

AI-0–**AI-4** не так много нетривиальных импликаций, имеет смысл попытаться найти дополнительные импликации между **AI-0**–**AI-4** в случае, когда совместные распределения принадлежат некоторому классу. Так как класс гауссовских распределений является одним из самых важных в теории вероятностей, мы делаем это, когда $P_{(X_n,Y_n)}$ гауссовские для всех n.

Работа состоит из семи разделов. Первый раздел – введение. Раздел 2 включает в себя некоторые результаты о равномерности сходимости в **AI-0**, **AI-1**. В разделе 3 обсуждается сохранение **AI-0**–**AI-4** под действием преобразований. В разделе 4 уделяется внимание случаю, когда лишь **одна** (вместо обеих в [9]) из P_{X_n} и P_{Y_n} плотна. В разделе 5 изучается асимптотическая независимость в пространстве последовательностей $\mathbb{R}^\infty$. Раздел 6 посвящен случаю, когда совместные распределения $P_{(X_n,Y_n)}$ гауссовские. Наконец, в заключении представлены некоторые открытые вопросы, связанные с асимптотической независимостью.

§2. Равномерная сходимость в **AI-0** и **AI-1**

Для метрического пространства M обозначим через $\mathrm{BL}_1(M)$ пространство вещественнозначных функций f на M, таких что $|f(x)| \leqslant 1$ для любого $x \in M$ и $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$ для любых $x, y \in M$.

Из [3, Corollary 5] легко видеть, что если **AI-1** выполнено, то соответствующая сходимость равномерна по $h \in \mathrm{BL}_1(E_1 \times E_2)$, то есть,

$$\sup_{h\in \mathrm{BL}_1(E_1\times E_2)} \left| \int h(x,y)(P_{(X_n,Y_n)} - P_{X_n} \times P_{Y_n})(dx,dy) \right| \to 0,\ n\to\infty.$$

Наша цель – показать, что аналогичный факт верен и для **AI-0**. Докажем сперва следующее

Предложение 1. *Предположим, что (R_n) – последовательность вещественных мер на $E_1 \times E_2$ и существует константа $C > 0$, такая что для любого n*

$$\|R_n\|_{\mathrm{var}} \leqslant C.$$

Предположим также, что для любых ограниченных вещественнозначных ***липшицевых*** *функций f и g на E_1 и E_2 соответственно*

$$\int\limits_{E_1\times E_2} f(x)\, g(y)\, R_n(dx,dy) \to 0, \quad n\to\infty. \tag{4}$$

Тогда

$$\sup_{f\in \mathrm{BL}_1(E_1), g\in \mathrm{BL}_1(E_2)} \left| \int\limits_{E_1\times E_2} f(x)\, g(y)\, R_n(dx,dy) \right| \to 0, \quad n\to\infty.$$

Доказательство предложения 1. Будем использовать следующую переформулировку [3, Corollary 5]:

Утверждение 1. *Предположим, что (H,ρ) – польское пространство, (L_n) – последовательность вещественнозначных мер H и существует константа $C>0$, такая что для всех n $\|L_n\|_{\mathrm{var}} \leqslant C$. Предположим также, что для любой ограниченной вещественнозначной **липшицевой** функции f на H*

$$\int\limits_H f(x) L_n(dx) \to 0, \quad n\to\infty. \tag{5}$$

Тогда $\sup\limits_{f\in \mathrm{BL}_1(H)} \left|\int\limits_H f(x)L_n(dx)\right| \to 0, \quad n\to\infty.$

Доказательство утверждения 1. Ясно, что существуют неотрицательные меры $(L_n)_+$ и $(L_n)_-$, такие что

$$L_n = (L_n)_+ - (L_n)_-, \qquad \|(L_n)_+\|_{\mathrm{var}}, \|(L_n)_-\|_{\mathrm{var}} \leqslant C.$$

Отметим, что

$$\begin{aligned}\|(L_n)_+\|_{\mathrm{var}} - \|(L_n)_-\|_{\mathrm{var}} &= \int\limits_H 1\ (L_n)_+(dx) - \int\limits_H 1\ (L_n)_-(dx)\\ &= \int\limits_H 1\ L_n(dx) \to 0, \quad n\to\infty.\end{aligned}$$

Наконец, возьмем произвольную точку x в H и подставим

$$P_n = \frac{(L_n)_+ + (C - \|(L_n)_+\|_{\mathrm{var}})\delta_x}{C}, \ Q_n = \frac{(L_n)_- + (C - \|(L_n)_-\|_{\mathrm{var}})\delta_x}{C}$$

в [3, Corollary 5] для завершения доказательства.

Теперь предположим, что утверждение теоремы ложно. Тогда существуют $f_n \in \mathrm{BL}_1(E_1)$, $g_n \in \mathrm{BL}_1(E_2)$ и вещественнозначные меры (R_n), удовлетворяющие условию теоремы, такие что (4) выполняется, но

$$\int\limits_{E_1\times E_2} f_n(x) g_n(y) R_n(dx,dy) \nrightarrow 0, \quad n\to\infty. \tag{6}$$

Пусть π_1 и π_2 – естественные проекции с $E_1 \times E_2$ на E_1 и E_2 соответственно: $\pi_1(x, y) = x$; $\pi_2(x, y) = y$. Пусть $\eta_n(dx, dy) = g_n(y) R_n(dx, dy)$ и $\mu_n = \eta_n \pi_1^{-1}$. Тогда из (6) следует

$$\int_{E_1} f_n(x) \mu_n(dx) \not\to 0, \quad n \to \infty,$$

что влечет (в силу утверждения 1 и поскольку $f_n \in \mathrm{BL}_1(E_1)$) существование функции $f \in \mathrm{BL}_1(E_1)$, такой что

$$\int_{E_1} f(x)\, \mu_n(dx) \not\to 0, \quad n \to \infty.$$

Это может быть переформулировано в виде

$$\int_{E_1 \times E_2} f(x)\, g_n(y)\, R_n(dx, dy) \not\to 0, \quad n \to \infty.$$

Пусть $M_n(dx, dy) = f(x)\, R_n(dx, dy)$ и $\nu_n = M_n \pi_2^{-1}$. Тогда

$$\int_{E_2} g_n(y)\, \nu_n(dy) \not\to 0, \quad n \to \infty,$$

и утверждение 1 (поскольку $g_n \in \mathrm{BL}_1(E_2)$) показывает, что существует $g \in \mathrm{BL}_1(E_2)$, такая что

$$\int_{E_2} g(y) \nu_n(dy) \not\to 0, \quad n \to \infty.$$

Но это эквивалентно

$$\int_{E_1 \times E_2} f(x) g(y) R_n(dx, dy) \not\to 0, \quad n \to \infty,$$

что противоречит (4). □

Ясно, что предложение 1 влечет следующий результат:

Теорема 1. *Если* (X_n), (Y_n) *удовлетворяют* **AI-0**, *то*

$$\sup_{f \in \mathrm{BL}_1(E_1),\, g \in \mathrm{BL}_1(E_2)} |\mathbb{E} f(X_n)\, g(Y_n) - \mathbb{E} f(X_n)\, \mathbb{E} g(Y_n)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

§3. **AI** под действием преобразований

В [9] было доказано, что имеет место следующее полезное предложение:

Предложение 2.

1) *Если* (X_n) (Y_n) *удовлетворяют* **AI-0**, *то* $(u(X_n))$, $(v(Y_n))$ *удовлетворяют* **AI-0** *для всех равномерно непрерывных функций* u, v.
2) *Если* (X_n), (Y_n) *удовлетворяют* **AI-1**, *то* $(u(X_n))$, $(v(Y_n))$ *удовлетворяют* **AI-1** *для всех равномерно непрерывных функций* u, v.
3) *Если* (X_n), (Y_n) *удовлетворяют* **AI-2**, *то* $(u(X_n))$, $(v(Y_n))$ *удовлетворяют* **AI-2** *для всех измеримых функций* u, v.
4) *Если* (X_n), (Y_n) *удовлетворяют* **AI-3**, *то* $(u_n(X_n))$, $(v_n(Y_n))$ *удовлетворяют* **AI-3** *для всех измеримых функций* u_n, v_n.
5) *Если* (X_n), (Y_n) *удовлетворяют* **AI-4**, *то* $(u_n(X_n))$, $(v_n(Y_n))$ *удовлетворяют* **AI-4** *для всех измеримых функций* u_n, v_n.

При некоторых специальных условиях также имеем следующий результат об устойчивости **AI-2**:

Предложение 3. *Предположим, что* $(X_n), (Y_n)$ *удовлетворяют* **AI-2**; *пусть* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ – *измеримое пространство, и* $u_n : E_1 \to \Omega_1$ *измеримы для любого* n *(здесь* $X_n \in E_1$, $Y_n \in E_2$ *для любого* n). *Если существуют* ***дизъюнктные*** *измеримые множества* R_n, *такие что*

$$\mathbb{P}\{X_n \in R_n\} \to 1, \ n \to \infty,$$

то $(u_n(X_n)), (Y_n)$ *также удовлетворяют* **AI-2**.

Доказательство. Поскольку R_n дизъюнктны, для любых измеримых множеств $A \subset \Omega_1$, $B \subset E_2$ имеем

$$\begin{aligned}
&|P_{(u_n(X_n),Y_n)}(A \times B) - P_{u_n(X_n)}(A) P_{Y_n}(B)| \\
&\leqslant \left| P_{(X_n,Y_n)}\left((\bigcup_{l=1}^{\infty} (u_l^{-1}(A) \cap R_l)) \times B \right) - P_{X_n}\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} (u_l^{-1}(A) \cap R_l) \right) P_{Y_n}(B) \right| \\
&\qquad + 2(1 - P_{X_n}(R_n)) \to 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Первое слагаемое стремится к нулю, поскольку (X_n), (Y_n) удовлетворяют **AI-2**. Второе слагаемое стремится к нулю в силу изначальных предположений. □

§4. Случай одной плотной последовательности

Теперь рассмотрим случай, когда лишь **одна** из последовательностей распределений X_n и Y_n плотна.

Предложение 4. *Предположим, что* (P_{X_n}) *плотна. Тогда* **AI-0** $\Rightarrow$ **AI-1**.

Доказательство. Фиксируем $1 > \epsilon > 0$. Поскольку (P_{X_n}) плотна, существует компактное подмножество K_ϵ в E_1, такое что для всех n $P_{X_n}(E_1 \backslash K_\epsilon) \leqslant \epsilon$. Поскольку K_ϵ компактно, существует конечная ϵ-сеть $\{x_1, \ldots, x_{n_\epsilon}\}$ в K_ϵ. Пусть $B(x, r)$ – открытый шар с центром в x и радиуса r. Пусть $\{f_1, \ldots, f_N, \ldots, f_M\}$ – разбиение единицы, подчиненное

$$\mathcal{U} = \{B(x_i, \epsilon) \mid 1 \leqslant i \leqslant n_\epsilon\} \cup \{E_1 \backslash K_\epsilon\},$$

состоящее из **1-липшицевых** функций (такое разбиение существует в силу [5, Theorem 1]). Здесь для любого j, такого что $1 \leqslant j \leqslant N$, f_j обнуляется вне $B(s_j, \epsilon)$, где $s_j \in \{x_1, \ldots, x_{n_\epsilon}\}$, и для любого j такого, что $N < j \leqslant M$, f_j обнуляется на K_ϵ.

Теперь возьмем ограниченную равномерно непрерывную функцию h на $E_1 \times E_2$. Пусть

$$\omega_h(\epsilon) = \sup_{u,v\colon d(u,v) \leqslant \epsilon} |h(u) - h(v)|, \quad \|h\|_\infty = \sup_u |h(u)|.$$

Рассмотрим функцию

$$h_\epsilon(x, y) = \sum_{j=1}^{N} f_j(x) h(s_j, y).$$

Отметим, что $\|h_\epsilon\|_\infty \leqslant \|h\|_\infty$, так как $\sum\limits_{i=1}^{N} f_i(x) \leqslant 1$. Поскольку каждая f_i является ограниченной равномерно непрерывной функцией по x, и каждая $h(x_i, y)$ – ограниченная равномерно непрерывная функция по y, **AI-0** влечет

$$\limsup_n \left| \int\limits_{E_1 \times E_2} h_\epsilon \, d(P_{X_n} \times P_{Y_n}) - \int\limits_{E_1 \times E_2} h_\epsilon \, dP_{(X_n, Y_n)} \right| = 0.$$

Но тогда

$$\begin{aligned}
&\limsup_n \left| \int\limits_{E_1\times E_2} h\, d(P_{X_n}\times P_{Y_n}) - \int\limits_{E_1\times E_2} h\, dP_{(X_n,Y_n)} \right| \\
&= \limsup_n \left| \int\limits_{E_1\times E_2} (h-h_\epsilon)\, d(P_{X_n}\times P_{Y_n}) - \int\limits_{E_1\times E_2} (h-h_\epsilon)\, dP_{(X_n,Y_n)} \right| \\
&\leqslant \limsup_n \left| \int\limits_{K_\epsilon\times E_2} (h-h_\epsilon)\, d(P_{X_n}\times P_{Y_n}) - \int\limits_{K_\epsilon\times E_2} (h-h_\epsilon)\, dP_{(X_n,Y_n)} \right| \\
&+ 4\epsilon\|h\|_\infty.
\end{aligned}$$

Для любого $x \in K_\epsilon$ имеем $\sum\limits_{j=1}^{N} f_j(x) = 1$. Отсюда следует

$$|h_\epsilon(x,y) - h(x,y)| \leqslant \sum_{j=1}^{N} f_j(x)|h(s_j,y) - h(x,y)| \leqslant \omega_h(\epsilon)$$

для $x \in K_\epsilon$, поскольку если $f_j(x) > 0$, то $d((x,y),(s_j,y)) \leqslant \epsilon$. Наконец получаем

$$\limsup_n \left| \int\limits_{E_1\times E_2} h\, d(P_{X_n}\times P_{Y_n}) - \int\limits_{E_1\times E_2} h\, dP_{(X_n,Y_n)} \right| \leqslant 4\epsilon\|h\|_\infty + 2\omega_h(\epsilon)$$

для любого $\epsilon > 0$, и **AI-1** доказано. □

Известный факт, что если **обе** (P_{X_n}), (P_{Y_n}) плотны, то слабого условия на характеристические функции достаточно, чтобы **AI-1** выполнялось:

Предложение 5 ([9, Proposition 6]). *Предположим, что* (P_{X_n}) *и* (P_{Y_n}) ***обе*** *плотны. Следующие условия эквивалентны:*

1) **AI-1**.

2) *Для любых* $\overline{t} \in E_1, \overline{s} \in E_2$, *для характеристических функций выполнено*

$$\phi_{(X_n,Y_n)}(\overline{t},\overline{s}) - \phi_{X_n}(\overline{t})\,\phi_{Y_n}(\overline{s}) \to 0, \quad n\to\infty. \tag{7}$$

С другой стороны, если только **одна** из последовательностей (P_{X_n}), (P_{Y_n}) плотна, то в некоторых случаях **AI-0** и **AI-1** не выполняются даже при значительно более сильном условии на характеристические функции:

Предложение 6. *Пусть* $E_1 = \mathbb{R}$, $E_2 = \mathbb{R}$. *Существуют последовательности* (X_n) *и* (Y_n) *случайных величин, такие что* (P_{X_n}) *плотна, и*

$$\sup_{s,t} |\phi_{(X_n,Y_n)}(t,s) - \phi_{X_n}(t)\,\phi_{Y_n}(s)| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{8}$$

но **AI-0** *не выполняется.*

Доказательство. Фактически мы будем использовать конструкцию из [4, Proposition 11.7.6]. Пусть Z_n – вещественнозначная случайная величина с плотностью $\frac{1}{2|x|\log(n)}$ на $[-n,-1]\cup[1,n]$. Возьмем $(X_n, Y_n) = (\operatorname{sign}(Z_n), Z_n)$. Отметим, что

$$\phi_{X_n}(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \phi_{Y_n}(s) = \int_1^n \frac{e^{isy} + e^{-isy}}{2y \cdot \log(n)}\, dy,$$

и

$$\phi_{(X_n,Y_n)}(s,t) = \int_1^n \frac{e^{it+isy} + e^{-it-isy}}{2y \cdot \log(n)}\, dy.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
&\phi_{(X_n,Y_n)}(s,t) - \phi_{X_n}(s)\,\phi_{Y_n}(t) \\
&= \int_1^n (e^{it+isy} + e^{-it-isy} - e^{it-isy} - e^{-it+isy}) \frac{1}{4y \cdot \log(n)}\, dy \\
&= \int_1^n (e^{it} - e^{-it}) \frac{i \cdot \sin(sy)}{2y \cdot \log(n)}\, dy = \int_s^{ns} (e^{it} - e^{-it}) \frac{i \cdot \sin(z)}{2z \cdot \log(n)}\, dz.
\end{aligned}$$

Но $|e^{it} - e^{-it}| \leqslant 2$ и $\int_0^u \frac{\sin(z)}{z}$ равномерно ограничен по u, таким образом, мы получаем (8). С другой стороны, **AI-0** не выполняется: возьмем $f(x) = g(x) = \min(\max(0,x),1)$, тогда

$$\mathbb{E}f(X_n)\,g(Y_n) - \mathbb{E}f(X_n)\,\mathbb{E}g(Y_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \nrightarrow 0$$

при $n \to \infty$. Очевидно, что (P_{X_n}) плотна, таким образом, предложение 6 доказано. $\square$

§5. Пространство $\mathbb{R}^\infty$

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^\infty$ с метрикой

$$\rho((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

Пусть $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^\infty,\ d_1 = d_2 = \rho$. Обозначим

$$\omega_f(s) = \sup_{d(u,v) \leqslant s} |f(u) - f(v)|.$$

Вспомним, что $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2)$.

Поскольку переход к конечномерным распределениям является стандартным подходом при изучении слабой сходимости на $\mathbb{R}^\infty$, в данном разделе мы предпримем попытку сделать то же самое для асимптотической независимости.

Пусть $\pi_k : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^k$ – проекция на первые k координат, пусть $i_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\infty$ переводит вектор $(x_1, \dots, x_k)$ в последовательность $(x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots)$. Положим $\psi_k = i_k \circ \pi_k$.

Теорема 2. *Последовательности (X_n), (Y_n) удовлетворяют* **AI-1**, *если и только если для любого $k > 0$ $(\pi_k X_n)$, $(\pi_k Y_n)$ удовлетворяют* **AI-1**. *То же выполняется для* **AI-0**.

Доказательство. Пусть $(\pi_k X_n)$, $(\pi_k Y_n)$ удовлетворяют **AI-1** (доказательство для **AI-0** аналогично). Поскольку **AI-0** и **AI-1** сохраняются под действием равномерно непрерывных отображений и отображения i_k равномерно непрерывны при любом k, $(\psi_k X_n)$, $(\psi_k Y_n)$ удовлетворяют **AI-1** и **AI-0** соответственно. Пусть $f : \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ ограничена и равномерно непрерывна (относительно метрики d). Тогда

$$\int f(x, y)\, d(P_{(\psi_k X_n, \psi_k Y_n)} - P_{\psi_k X_n} \times P_{\psi_k Y_n}) \to 0, \quad n \to \infty,$$

что означает, что для любого $k > 0$

$$\limsup_n \Big| \int f(x,y)\, d(P_{(X_n,Y_n)} - P_{X_n} \times P_{Y_n}) \Big|$$
$$= \limsup_n \Big| \int f(x,y)\, d(P_{(X_n,Y_n)} - P_{X_n} \times P_{Y_n} - P_{(\psi_k X_n, \psi_k Y_n)} + P_{\psi_k X_n} \times P_{\psi_k Y_n}) \Big|$$
$$= \limsup_n \Big| \int (f(x,y) - f(\psi_k(x), \psi_k(y)))\, d(P_{(X_n,Y_n)} - P_{X_n} \times P_{Y_n}) \Big|$$
$$\leqslant 2\omega_f(2 \cdot 2^{-k}),$$

поскольку

$$d((x,y),(\psi_k(x),\psi_k(y))) \leqslant d_1(x,\psi_k(x)) + d_2(y,\psi_k(y)) \leqslant 2 \cdot 2^{-k}.$$

Переходя к пределу при k, стремящемся к бесконечности, получаем **AI-1** для (X_n), (Y_n).

В обратную сторону теорема следует из пунктов 1), 2) предложения 2, поскольку π_k равномерно непрерывны для всех k. □

Прямое обобщение предыдущего результата на **AI-2**–**AI-4** ложно:

Предложение 7. *Существуют две последовательности случайных элементов* (X_n), (Y_n), *принимающих значения в* $\mathbb{R}^\infty$, *такие что* $(\pi_k X_n)$, $(\pi_k Y_n)$ *удовлетворяют* **AI-4** *для любого* k, *но* (X_n), (Y_n) *не удовлетворяют* **AI-2**.

Доказательство. Положим $P = \delta_{(1,1,1,\dots)}$ (распределение на $\mathbb{R}^\infty$, сосредоточенное в точке $(1,1,1,\dots)$). Пусть $P_n = P\psi_n^{-1}$. Существуют (X_n), (Y_n), такие что (X_n, Y_n) имеет распределение $Q_n = \frac{P_n \times P_n + P \times P}{2}$. Пусть $A = \{(1,1,1,\dots)\}$ (одноэлементное подмножество $\mathbb{R}^\infty$). Тогда, так как $P_{X_n} = P_{Y_n} = \frac{P+P_n}{2}$,

$$|P_{(X_n,Y_n)}(A \times A) - P_{X_n}(A) P_{Y_n}(A)| = \Big| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Big| = \frac{1}{4} \nrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

То есть, для (X_n), (Y_n) **AI-2** не выполняется. С другой стороны, при $n \geqslant k$ выполняется следующее:

$$P_{(\pi_k X_n, \pi_k Y_n)} = \frac{P_n \pi_k^{-1} \times P_n \pi_k^{-1} + P\pi_k^{-1} \times P\pi_k^{-1}}{2}$$
$$= \frac{P(\pi_k \circ \psi_n)^{-1} \times P(\pi_k \circ \psi_n)^{-1} + P\pi_k^{-1} \times P\pi_k^{-1}}{2} = P\pi_k^{-1} \times P\pi_k^{-1}.$$

Также при $n \geqslant k$ имеем

$$P_{\pi_k X_n} = P_{\pi_k Y_n} = \left(\frac{P_n + P}{2}\right)\pi_k^{-1} = P\pi_k^{-1}.$$

Поэтому последовательности $(\pi_k X_n)$, $(\pi_k Y_n)$ удовлетворяют **AI-4** для любого k. □

Теперь нам понадобится некоторое достаточное условие для **AI-2**, которое имеет интерес само по себе:

Предложение 8. 1) *Если* (1) *выполнено для любых открытых A, B, то* **AI-2** *выполнено.*

2) *Если* (1) *выполнено для любых замкнутых A, B, то* **AI-2** *выполнено.*

Доказательство. Сперва выведем 2) из 1). Предположим, что (1) выполняется для любых замкнутых A, B. Пусть $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ – открытые множества. Тогда (1) выполняется для $A = E_1 \backslash \widetilde{A}$, $B = E_2 \backslash \widetilde{B}$, а также для $A = E_1$, $B = E_2 \backslash \widetilde{B}$. Поэтому

$$\text{(1) выполняется для } A = \widetilde{A},\ B = E_2 \backslash \widetilde{B}. \tag{9}$$

Но (1) также выполняется для $A = E_1 \backslash \widetilde{A}$, $B = E_2$ и для $A = E_1$, $B = E_2$. Поэтому

$$\text{(1) выполняется для } A = \widetilde{A},\ B = E_2. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует, что (1) выполняется для $A = \widetilde{A}$, $B = \widetilde{B}$, что и требовалось.

Теперь докажем 1). Для любого борелевского множества $B \subset E_2$ введем последовательность борелевских мер $(\mu_{n,B})$ на E_1, где

$$\mu_{n,\,B}(A) = P_{(X_n,Y_n)}(A \times B) - P_{X_n}(A)P_{Y_n}(B).$$

Аналогично, для любого борелевского множества $A \subset E_1$ введем последовательность борелевских мер $(\nu_{n,A})$ на E_2, заданных формулой

$$\nu_{n,\,A}(B) = P_{(X_n,Y_n)}(A \times B) - P_{X_n}(A)P_{Y_n}(B).$$

Теперь фиксируем $A \subset E_1$ и применим [12, Theorem 2] к последовательности $(\nu_{n,A})$. Поскольку любая регулярная конечно-аддитивная функция на борелевских множествах, которая равна нулю на открытых множествах, равна нулю и на всех борелевских множествах, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{n,B}(A) = \lim_{n\to\infty} \nu_{n,A}(B) = 0 \tag{11}$$

для любого открытого $A \subset E_1$ и любого борелевского множества $B \subset E_2$. Тогда, аналогично, фиксируя борелевское множество B и применяя [12, Theorem 2] к последовательности $(\mu_{n,B})$, получаем, что (11) выполняется для любых борелевских множеств A, B, что эквивалентно **AI-2**. $\square$

Для пространства с неотрицательной конечной мерой (X, Σ, μ) обозначим его пополнение через (X, Σ^*, μ^*). Известный факт, что если X, Y – польские пространства, $\mathcal{B}_X$, $\mathcal{B}_Y$ – их борелевские сигма-алгебры, и $f : X \to Y$ непрерывно, то для любого $A \in \mathcal{B}_X$ $f(A)$ является аналитическим множеством ([11, Definition 14.1]). В частности, $f(A)$ универсально измеримо, см., к примеру, [11, Theorem 29.7] (то есть, $f(A) \in \mathcal{B}_Y^*$, независимо от того, какая борелевская мера на Y берется). Также отметим, что если μ – борелевская мера на X, то $f^{-1}(f(A))$ μ^*-измеримо, и

$$(\mu f^{-1})^*(f(A)) = (\mu^* f^{-1})(f(A)). \tag{12}$$

Если сходимость в **AI-2**–**AI-4** для $\pi_k X_n$, $\pi_k Y_n$ равномерна по k, то X_n, Y_n также удовлетворяют **AI-2**–**AI-4**:

Предложение 9. 1) *Если для любых борелевских множеств A, B*

$$\sup_k |P^*_{(\pi_k X_n, \pi_k Y_n)}(\pi_k(A) \times \pi_k(B)) - P^*_{\pi_k X_n}(\pi_k(A)) P^*_{\pi_k Y_n}(\pi_k(B))| \to 0,$$

то для (X_n), (Y_n) выполняется **AI-2**.

2) *Если*

$$\sup_{k,A,B} |\mathbb{P}\{\pi_k X_n \in A,\ \pi_k Y_n \in B\} - \mathbb{P}\{\pi_k X_n \in A\}\mathbb{P}\{\pi_k Y_n \in B\}| \to 0,$$

то для (X_n), (Y_n) выполняется **AI-3**.

3) *Если*

$$\sup_k \|P_{(\pi_k X_n, \pi_k Y_n)} - P_{\pi_k X_n} \times P_{\pi_k Y_n}\|_{\mathrm{var}} \to 0, \quad n \to \infty,$$

то для (X_n), (Y_n) выполняется **AI-4**.

Доказательство. В силу (12) условие из 1) может быть переформулировано в виде

$$\sup_k \Big| P^*_{(X_n, Y_n)}(\pi_k^{-1}(\pi_k(A)) \times \pi_k^{-1}(\pi_k(B))) \\ - P^*_{X_n}(\pi_k^{-1}(\pi_k(A)))\, P^*_{Y_n}(\pi_k^{-1}(\pi_k(B))) \Big| \to 0. \tag{13}$$

Если A и B оба **замкнутые**, то

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \pi_k^{-1}(\pi_k(A)), \quad B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \pi_k^{-1}(\pi_k(B)),$$

и (1) выполнено, так как последовательности $\pi_k^{-1}(\pi_k(A))$ и $\pi_k^{-1}(\pi_k(B))$ являются убывающими. Поэтому, (X_n), (Y_n) удовлетворяют **AI-2** в силу предложения 8.

Докажем 2). Фиксируем $\epsilon > 0$. Тогда существует $N(\epsilon)$, такое что для любых цилиндрических множеств C, D и при любом $n \geqslant N(\epsilon)$ выполняется

$$\Big|\mathbb{P}\{X_n \in C,\ Y_n \in D\} - \mathbb{P}\{X_n \in C\}\,\mathbb{P}\{Y_n \in D\}\Big| \leqslant \epsilon. \tag{14}$$

Поскольку цилиндрические множества образуют алгебру, которая порождает борелевскую сигма-алгебру на $\mathbb{R}^\infty$, монотонный класс, порожденный цилиндрическими множествами, также совпадает с данной сигма-алгеброй. Тогда (14) выполняется для любых измеримых C, D, откуда следует **AI-3**.

Теперь докажем 3). Фиксируем $\epsilon > 0$. Тогда существует $N(\epsilon)$, такое что для любого $k > 0$ и измеримого $C \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ для любого $n \geqslant N(\epsilon)$ имеем

$$\Big|P_{(X_n,Y_n)}((\pi_k \otimes \pi_k)^{-1}(C)) - P_{X_n} \times P_{Y_n}((\pi_k \otimes \pi_k)^{-1}(C))\Big| \leqslant \epsilon. \tag{15}$$

Введем отображение $\xi : \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$, заданное формулой

$$\xi((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots).$$

Ясно, что ξ – гомеоморфизм, в частности, изоморфизм между $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ и $\mathbb{R}^\infty$, рассматриваемыми как измеримые пространства. Поскольку монотонный класс, порожденный цилиндрическими множествами, совпадает с борелевской сигма-алгеброй пространства $\mathbb{R}^\infty$ и так как для любого цилиндрического множества $D \subset \mathbb{R}^\infty$ существуют $k > 0$ и измеримое множество $C \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$, такие что $\xi^{-1}(D) = (\pi_k \otimes \pi_k)^{-1}(C)$, монотонный класс, порожденный множествами вида $(\pi_k \otimes \pi_k)^{-1}(C)$, совпадает с борелевской сигма-алгеброй пространства $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$. Следовательно, (15) влечет **AI-4**. □

§6. Гауссовский случай

Случай, когда совместные распределения $P_{(X_n,Y_n)}$ конечномерные гауссовские и последовательности (P_{X_n}), (P_{Y_n}) **обе** плотны, был рассмотрен в [9, Proposition 7].

В данном разделе мы рассматриваем в деталях случай, когда $X_n \in \mathbb{R}^k$, $Y_n \in \mathbb{R}^m$, и $P_{(X_n,Y_n)}$ гауссовские для всех n, но, возможно, **ни одна** из (P_{X_n}), (P_{Y_n}) не плотна.

Отметим, что **AI-1** не влечет **AI-2** даже в данном случае: пусть X – одномерная гауссовская случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией. Тогда последовательности (X_n), (Y_n), где $X_n = \frac{X}{n}$, $Y_n = \frac{-X}{n}$, удовлетворяют **AI-1**, поскольку $(X_n, Y_n) \Rightarrow \delta_{(0,0)}$, и $X_n, Y_n \Rightarrow \delta_0$.

Но (X_n), (Y_n) не удовлетворяют **AI-2**, так как

$$\mathbb{P}\{X_n > 0, Y_n > 0\} - \mathbb{P}\{X_n > 0\}\,\mathbb{P}\{Y_n > 0\} = -\frac{1}{4} \nrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Теперь докажем несколько критериев сближения двух последовательностей **конечномерных центрированных гауссовских** распределений. Пусть I_d – единичная матрица размера $d \times d$. Обозначим через $\mathcal{N}(a, K)$ распределение гауссовского случайного вектора со средним a и матрицей ковариации K.

Лемма 1. *Пусть $P_n = \mathcal{N}(0, K_n)$, $Q_n = \mathcal{N}(0, L_n)$ – гауссовские распределения на $\mathbb{R}^d$. Если*

$$\sup_x \left| \frac{\langle K_n x, x\rangle}{\langle L_n x, x\rangle} - 1 \right| \to 0, \quad n \to \infty,$$

то $\|P_n - Q_n\|_{\mathrm{var}} \to 0$. (Мы считаем, что $\frac{0}{0} = 1$.)

Доказательство. Сперва покажем, что K_n, L_n можно считать невырожденными. Действительно, пусть

$$P_{n,\epsilon} = \mathcal{N}(0, K_n + \epsilon I_d),\ Q_{n,\epsilon} = \mathcal{N}(0, L_n + \epsilon I_d).$$

Тогда $P_{n,\epsilon} \Rightarrow P_n$, $Q_{n,\epsilon} \Rightarrow Q_n$, если $\epsilon \to +0$, поэтому

$$\|P_n - Q_n\|_{\mathrm{var}} \leqslant \liminf_{\epsilon \to 0} \|P_{n,\epsilon} - Q_{n,\epsilon}\|_{\mathrm{var}}$$

в силу полунепрерывности снизу полной вариации относительно слабой сходимости. Отсюда следует, что существует последовательность

$\epsilon_n > 0$, таких что для любого n

$$\|P_n - Q_n\|_{\mathrm{var}} - \|P_{n,\epsilon_n} - Q_{n,\epsilon_n}\|_{\mathrm{var}} \leqslant 2^{-n}. \tag{16}$$

Отметим, что условия леммы влекут

$$\sup_{|x|\leqslant 1} \left| \frac{\langle (K_n + \epsilon_n I_d)x, x\rangle}{\langle (L_n + \epsilon_n I_d)x, x\rangle} - 1 \right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Следовательно, в силу (16), достаточно доказать лемму для матриц $K_n + \epsilon_n I_d$ и $L_n + \epsilon_n I_d$, которые уже положительно определены и невырождены.

Используя невырожденность матриц K_n, L_n и тот факт, что положительно определенная вещественная матрица имеет положительно определенный квадратный корень, получаем (подставляя $x = L_n^{-\frac{1}{2}} y$):

$$\sup_y \left| \frac{\langle L_n^{-\frac{1}{2}} K_n L_n^{-\frac{1}{2}} y, y\rangle}{\langle y, y\rangle} - 1 \right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Обозначим $C_n = L_n^{-\frac{1}{2}} K_n L_n^{-\frac{1}{2}}$, тогда C_n также положительно определена. Следовательно, существуют ортогональная матрица O_n и положительно определенная диагональная матрица D_n, такие что $C_n = O_n^{-1} D_n O_n$.

Поскольку

$$\sup_y \left| \frac{\langle C_n y, y\rangle}{\langle y, y\rangle} - 1 \right| \to 0, \quad n \to \infty,$$

также выполнено

$$\sup_y \left| \frac{\langle D_n y, y\rangle}{\langle y, y\rangle} - 1 \right| \to 0, \quad n \to \infty,$$

откуда значения на диагоналях матриц D_n стремятся к 1, и тогда

$$\mathrm{tr}(C_n - I_d) = \mathrm{tr}(D_n - I_d) \to 0, \det(C_n) = \det(D_n) \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Из [6, Proposition 1] получаем

$$\begin{aligned} \|P_n - Q_n\|_{\mathrm{var}} &\leqslant \sqrt{\mathrm{tr}(L_n^{-1} K_n - I_d) - \log\,\det(K_n L_n^{-1})} \\ &= \sqrt{\mathrm{tr}(D_n - I_d) - \log\,\det(D_n)} \to 0, \quad n \to \infty, \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Лемма 2. *Пусть* $P_n = \mathcal{N}(0, K_n)$, $Q_n = \mathcal{N}(0, L_n)$ *– гауссовские распределения на* $\mathbb{R}^d$. *Если*

$$\sup_{|x|\leqslant 1} |\phi_{P_n}(x) - \phi_{Q_n}(x)| \to 0, \quad n \to \infty,$$

а также существует $\epsilon > 0$, *такое что матрицы* $K_n + L_n - \epsilon I_d$ *неотрицательно определены при всех* n, *то*

$$\|P_n - Q_n\|_{\mathrm{var}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $x \neq 0$. Пусть

$$y = \frac{\sqrt{\epsilon}\, x}{\sqrt{\langle K_n x, x\rangle + \langle L_n x, x\rangle}}.$$

Поскольку по условию леммы $\langle K_n x, x\rangle + \langle L_n x, x\rangle \geqslant \epsilon\langle x, x\rangle$, имеем $|y| \leqslant 1$. Но тогда

$$\sup_{x\neq 0} \left|\exp\left\{-\frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{\langle K_n x, x\rangle}{\langle K_n x, x\rangle + \langle L_n x, x\rangle}\right\} - \exp\left\{-\frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{\langle L_n x, x\rangle}{\langle K_n x, x\rangle + \langle L_n x, x\rangle}\right\}\right|$$

$$\leqslant \sup_{|y|\leqslant 1}\left|\exp\left\{-\frac{\langle K_n y, y\rangle}{2}\right\} - \exp\left\{-\frac{\langle L_n y, y\rangle}{2}\right\}\right| = \sup_{|y|\leqslant 1} |\phi_{P_n}(y) - \phi_{Q_n}(y)| \to 0$$

при $n \to \infty$. Поскольку

$$\frac{\langle K_n x, x\rangle}{\langle K_n x, x\rangle + \langle L_n x, x\rangle} \leqslant 1, \ \frac{\langle L_n x, x\rangle}{\langle K_n x, x\rangle + \langle L_n x, x\rangle} \leqslant 1,$$

имеем

$$\sup_x \left|\frac{\langle K_n x, x\rangle}{\langle L_n x, x\rangle} - 1\right| \to 0, \quad n \to \infty,$$

поэтому лемма 2 следует из леммы 1. □

Лемма 3. *Пусть* $P_n = \mathcal{N}(0, K_n)$, $Q_n = \mathcal{N}(0, L_n)$ *– гауссовские распределения на* $\mathbb{R}^d$. *Если*

$$\sup_{|x|\leqslant 1} |\phi_{P_n}(x) - \phi_{Q_n}(x)| \to 0, \quad n \to \infty,$$

то $\pi(P_n, Q_n) \to 0$, *где* π *– метрика Леви–Прохорова.*

Доказательство. Сперва покажем, что

$$\sup_{\mu} \pi(\mu, \mu * \mathcal{N}(0, \epsilon I_d)) \to 0, \quad \epsilon \to +0, \tag{17}$$

где супремум берется по всем вероятностным мерам μ на $\mathbb{R}^d$. Действительно, если это неверно, то существуют $\epsilon_n \to 0, \mu_n, \delta > 0$, такие что

$\pi(\mu_n, \mu_n * \mathcal{N}(0, \epsilon_n I_d)) > \delta$. Рассмотрим последовательность пар независимых случайных векторов (X_n, Y_n), где

$$P_{X_n} = \mu_n, \quad P_{Y_n} = \mathcal{N}(0, \epsilon_n I_d).$$

Тогда $|X_n - (X_n + Y_n)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, но

$$\pi(P_{X_n}, P_{X_n+Y_n}) = \pi(\mu_n, \mu_n * \mathcal{N}(0, \epsilon_n I_d)) > \delta.$$

Получаем противоречие.

Отметим, что для любого $\epsilon > 0$ выполняется

$$\sup_{|x|\leqslant 1} |\phi_{P_{n,\epsilon}}(x) - \phi_{Q_{n,\epsilon}}(x)| \leqslant \sup_{|x|\leqslant 1} |\phi_{P_n}(x) - \phi_{Q_n}(x)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Кроме того, матрицы $(K_n + \epsilon I_d) - \epsilon I_d$, $(L_n + \epsilon I_d) - \epsilon I_d$ неотрицательно определены, поэтому можно применить лемму 2 к $P_{n,\epsilon}$ и $Q_{n,\epsilon}$ и получить
$\|P_{n,\epsilon} - Q_{n,\epsilon}\|_{\mathrm{var}} \to 0, \quad n \to \infty$, что влечет

$$\pi(P_{n,\epsilon}, Q_{n,\epsilon}) \to 0, \quad \epsilon \to +0. \tag{18}$$

Для завершения доказательства скомбинируем (17) и (18). □

Из полученных лемм несложно вывести следующие результаты об асимптотической независимости случайных векторов (X_n), (Y_n), где $X_n \in \mathbb{R}^k$, $Y_n \in \mathbb{R}^m$, и (X_n, Y_n) гауссовский;
$P_{X_n} = \mathcal{N}(a_n, A_n)$, $P_{Y_n} = \mathcal{N}(b_n, B_n)$:

Теорема 3. *Если (X_n), (Y_n) удовлетворяют* **AI-0***, и существует $\epsilon > 0$, такое что матрицы $A_n - \epsilon I_k$ и $B_n - \epsilon I_m$ неотрицательно определены для любого n, то (X_n), (Y_n) удовлетворяют* **AI-4**.

Доказательство. Если X_n, Y_n центрированные, то, поскольку функции $f_s(x) = e^{is\cdot x}$ и $g_t(y) = e^{it\cdot y}$ липшицевы с константой 1 и не превосходят 1 по модулю при $|s|, |t| \leqslant 1$, в силу **AI-0**, используя теорему 1, получаем

$$\sup_{|(s,t)|\leqslant 1} |\phi_{(X_n,Y_n)}(s,t) - \phi_{X_n}(s)\,\phi_{Y_n}(t)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Подставим $P_n = P_{(X_n,Y_n)}$ и $Q_n = P_{X_n} \times P_{Y_n}$ в лемму 2, чтобы завершить доказательство.

Теперь предположим, что X_n, Y_n не центрированы. Обозначим $\widetilde{X}_n = X_n - \mathbb{E}X_n$, $\widetilde{Y}_n = Y_n - \mathbb{E}Y_n$, тогда из **AI-0** для (X_n), (Y_n), используя теорему 1, получаем

$$\sup_{f\in \mathrm{BL}_1(\mathbb{R}^k),g\in \mathrm{BL}_1(\mathbb{R}^m)} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^m} f(x)g(y)dP_{(X_n,Y_n)} - \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(x)dP_{X_n} \int\limits_{\mathbb{R}^m} g(y)dP_{Y_n}\Big| \to 0,$$

что эквивалентно

$$\sup_{f\in \mathrm{BL}_1(\mathbb{R}^k),g\in \mathrm{BL}_1(\mathbb{R}^m)} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^m} f(x)g(y)dP_{(\widetilde{X}_n,\widetilde{Y}_n)} - \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(x)dP_{\widetilde{X}_n} \int\limits_{\mathbb{R}^m} g(y)dP_{\widetilde{Y}_n}\Big| \to 0.$$

Следовательно, $(\widetilde{X_n})$ и $(\widetilde{Y_n})$ также удовлетворяют **AI-0**. Тогда, как доказано выше, они удовлетворяют **AI-4**, но тогда, очевидно, (X_n), (Y_n) также удовлетворяют **AI-4**. □

Теорема 4. *Пусть $X_n \in \mathbb{R}^k$, $Y_n \in \mathbb{R}^m$, предположим, что (X_n, Y_n) гауссовский для всех n, и (X_n), (Y_n) удовлетворяют* **AI-0**. *Тогда (X_n), (Y_n) удовлетворяют* **AI-1**.

Доказательство. Аналогично теореме 3, если (X_n), (Y_n) центрированы, можно воспользоваться (3), леммой 3 и получить требуемый результат. Если (X_n), (Y_n) не центрированы, то, аналогично теореме 3, получаем, что $(\widetilde{X}_n), (\widetilde{Y}_n)$ удовлетворяют **AI-1**, то есть,

$$\pi(P_{(\widetilde{X}_n,\widetilde{Y}_n)}, P_{\widetilde{X}_n} \times P_{\widetilde{Y}_n}) \to 0, \quad n \to \infty,$$

но очевидно, что метрика Леви–Прохорова инвариантна относительно параллельных переносов, поэтому

$$\pi(P_{(X_n,Y_n)}, P_{X_n} \times P_{Y_n}) \to 0, \quad n \to \infty,$$

и отсюда (X_n), (Y_n) также удовлетворяют **AI-1**. □

Теорема 5. *Пусть $X_n \in \mathbb{R}^k$, $Y_n \in \mathbb{R}^m$, предположим, что вектор (X_n, Y_n) гауссовский при любом n, и (X_n), (Y_n) удовлетворяют* **AI-3**. *Тогда (X_n), (Y_n) удовлетворяют* **AI-4**.

Доказательство. Очевидно, что **AI-3** или **AI-4** выполняются для (X_n), (Y_n), если и только если **AI-3** или **AI-4** соответственно выполняются для $(\widetilde{X}_n), (\widetilde{Y}_n)$. Следовательно, можно считать (X_n), (Y_n) центрированными. Так как функции $f_s(x) = e^{is\cdot x}$ и $g_t(y) = e^{it\cdot y}$ равномерно ограничены, **AI-3** влечет, что

$$\sup_{s,t} \left|\phi_{P_{(X_n,Y_n)}}(s,t) - \phi_{P_{X_n}\times P_{Y_n}}(s,t)\right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Пусть K_n, L_n – матрицы ковариации для $P_{(X_n,Y_n)}$ и $P_{X_n}\times P_{Y_n}$. Тогда
$$\sup_x \left|\exp\left\{-\frac{\langle K_n x, x\rangle}{2}\right\} - \exp\left\{-\frac{\langle L_n x, x\rangle}{2}\right\}\right| \to 0, \quad n\to\infty.$$
Следовательно,
$$\sup_x \left|\exp\left\{-\frac{\langle K_n x, x\rangle}{2\langle K_n x, x\rangle+2\langle L_n x, x\rangle}\right\} - \exp\left\{-\frac{\langle L_n x, x\rangle}{2\langle K_n x, x\rangle+2\langle L_n x, x\rangle}\right\}\right| \to 0$$
при $n\to\infty$. Поскольку
$$\frac{\langle K_n x, x\rangle}{2\langle K_n x, x\rangle+2\langle L_n x, x\rangle} \leqslant \frac{1}{2},\ \frac{\langle L_n x, x\rangle}{2\langle K_n x, x\rangle+2\langle L_n x, x\rangle} \leqslant \frac{1}{2},$$
получаем
$$\sup_x \left|\frac{\langle K_n x, x\rangle}{\langle L_n x, x\rangle} - 1\right| \to 0, \quad n\to\infty,$$
и теорема 5 следует из леммы 1. $\square$

Также отметим, что условие **AI-4** может быть переформулировано более явно: пусть
$$\rho(P_1,P_2) = \sqrt{\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{\frac{dP_1}{dQ}} - \sqrt{\frac{dP_2}{dQ}}\right)^2 dQ}$$
– расстояние Хеллингера между вероятностными мерами P_1, P_2. Здесь Q – любая вероятностная мера, такая что P_1, P_2 абсолютно непрерывны относительно Q. Известный факт, что ρ не зависит от Q, и
$$2\rho^2(P_1,P_2) \leqslant \|P_1 - P_2\|_{\mathrm{var}} \leqslant \sqrt{8}\,\rho(P_1,P_2)$$
(см., например, [7], раздел III, параграф 9). В то же время, в гауссовском случае существует явная формула для расстояния Хеллингера (см., к примеру, [8], где расстояние Хеллингера обозначается как $D^{\mathrm{He}} = \sqrt{2}\,\rho$ и выражается в терминах K_r^* на с. 51, и явная формула для K_r^* приводится на с. 46). Таким образом, получаем
$$\rho(\mathcal{N}(0,K_n),\ \mathcal{N}(0,L_n)) = 1 - \frac{\det(K_n)^{\frac14}\det(L_n)^{\frac14}}{\det(\frac{K_n+L_n}{2})^{\frac12}}.$$
Следовательно, обозначая через K_n матрицу ковариации $P_{(X_n,Y_n)}$, а через L_n – матрицу ковариации $P_{X_n}\times P_{Y_n}$, получаем

Теорема 6. *Если K_n, L_n невырождены, то (X_n), (Y_n) удовлетворяют* **AI-4**, *если и только если*

$$1 - \frac{\det(K_n)^{\frac{1}{4}} \det(L_n)^{\frac{1}{4}}}{\det(\frac{K_n+L_n}{2})^{\frac{1}{2}}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Наконец, комбинируя результаты двух последних разделов, получаем:

Следствие 1. *Пусть (X_n), (Y_n) – две последовательности случайных элементов в $\mathbb{R}^\infty$, удовлетворяющие* **AI-0**, *такие что (X_n, Y_n) гауссовские. Тогда (X_n), (Y_n) удовлетворяют* **AI-1**.

Доказательство. Поскольку **AI-0** сохраняется под действием равномерно непрерывных отображений, то для любого k последовательности $(\pi_k X_n)$, $(\pi_k Y_n)$ удовлетворяют **AI-0**. В силу теоремы 4 они также удовлетворяют **AI-1** (поскольку $(\pi_k X_n, \pi_k Y_n)$ гауссовский). Тогда в силу теоремы 2 (X_n), (Y_n) также удовлетворяют **AI-1**. □

6.1. AI-2 влечет AI-3 в гауссовском случае. Теперь мы собираемся изучить взаимоотношение между **AI-2** и **AI-3**, когда $X_n \in \mathbb{R}^k$, $Y_n \in \mathbb{R}^m$ и (X_n, Y_n) гауссовский для любого n. Для конечномерного случайного вектора Z обозначим $M(Z) = \sqrt{\mathbb{E}|Z - \mathbb{E}Z|^2}$; обозначим матрицу ковариации Z через $\operatorname{cov}(Z)$. Мы будем использовать следующее

Утверждение 2. *Для любого $\epsilon > 0$ существуют $c_1(\epsilon) > 0$, $c_2(\epsilon) > 0$, такие что для любого l и для любого гауссовского вектора Z со значениями в $\mathbb{R}^l$ имеем*

$$\mathbb{P}\{|Z - \mathbb{E}Z| \in [c_1 \cdot M(Z),\ c_2 \cdot M(Z)]\} \geqslant 1 - \epsilon. \tag{19}$$

Доказательство. Воспользуемся преобразованием Лапласа, стандартным методом при изучении малых отклонений гауссовских векторов, см., к примеру, [10, раздел 11.6].

Отметим, что $\mathbb{P}\{|Z - \mathbb{E}Z| > c_2 M(Z)\} \leqslant \frac{M(Z)^2}{c_2^2 M(Z)^2} = \frac{1}{c_2^2}$. Известный факт, что существуют гауссовские вектора $e_1, \ldots, e_l$, константы $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ и н.о.р. стандартные гауссовские величины $Z_1, \ldots, Z_l$, такие что распределение $Z - \mathbb{E}Z$ совпадает с распределением $\sum\limits_{i=1}^{l} (\alpha_i Z_i) e_i$. Но тогда

$$\mathbb{E}e^{-\gamma|Z-\mathbb{E}Z|^2} = \prod_{j=1}^{l}(1+2\gamma\alpha_j^2)^{-\frac{1}{2}} \leqslant (1+2\gamma\sum_{j=1}^{l}\alpha_j^2)^{-\frac{1}{2}} = (1+2\gamma M(Z)^2)^{-\frac{1}{2}},$$

при $\gamma > 0$. Это влечет

$$\mathbb{P}\{|Z-\mathbb{E}Z| < c_1M(Z)\}\cdot e^{-\gamma c_1^2 M(Z)^2} \leqslant (1+2\gamma M(Z)^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Подставим $\gamma = \frac{1}{c_1M(Z)^2}$:

$$\mathbb{P}\{|Z-\mathbb{E}Z| < c_1M(Z)\} \leqslant e^{c_1}(1+\frac{2}{c_1})^{-\frac{1}{2}}$$

Теперь ясно, что существуют константы $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, удовлетворяющие (19). □

Нам понадобятся две леммы:

Лемма 4. *Рассмотрим последовательность гауссовских векторов $Z_n \in \mathbb{R}^d$. Предположим, что $\sup\limits_n M(Z_n) = \infty$. Тогда существуют бесконечная последовательность (Z_{n_l}) и последовательность ограниченных* ***дизъюнктных*** *борелевских множеств R_l, такие что для любого l*

$$\mathbb{P}\{Z_{n_l} \in R_l\} \geqslant 1 - 2^{-l}.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для любых $n_1 < \dots < n_l$ и для любых ограниченных $R_1,\dots,R_l$ существует $n_{l+1} > n_l$ и ограниченное борелевское множество R_{l+1}, которое не пересекает $R_1,\dots,R_l$, такое что $\mathbb{P}\{Z_{n_{l+1}} \in R_{l+1}\} \geqslant 1 - 2^{-l-1}$.

Поскольку $R_1,\dots,R_l$ ограничены, существует открытый шар $B(0,r)$, который содержит каждое из $R_1,\dots,R_l$. Поскольку $\sup\limits_n M(Z_n) = \infty$, существует $n_{l+1} > n_l$ такое, что $r < c_1(2^{-l-2})M(Z_{n_{l+1}})$.

Но тогда можно взять

$$R_{l+1} = B\left(\mathbb{E}Z_{n_{l+1}}, c_2(2^{-l-2})M(Z_{n_{l+1}})+1\right) \setminus \{B\left(\mathbb{E}Z_{n_{l+1}}, c_1(2^{-l-2})M(Z_{n_{l+1}})\right) \cup B(0,r)\}.$$

Действительно, R_{l+1} не пересекает $R_1, \dots, R_l$, так как оно не пересекает $B(0, r)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{Z_{n_{l+1}} \in R_{l+1}\} \\
&\quad \geqslant \mathbb{P}\{|Z_{n_{l+1}} - \mathbb{E}Z_{n_{l+1}}| \in [c_1(2^{-l-2})M(Z_{n_{l+1}}),\ c_2(2^{-l-2})M(Z_{n_{l+1}})]\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \mathbb{P}\{Z_{n_{l+1}} \in B(0, r)\} \\
&\geqslant 1 - 2^{-l-2} - \mathbb{P}\{Z_{n_{l+1}} \in B(0, r)\} \geqslant 1 - 2^{-l-2} - \mathbb{P}\{Z_{n_{l+1}} \in B(\mathbb{E}Z_{n_{l+1}}, r)\} \\
&\geqslant \mathbb{P}\{|Z_{n_{l+1}} - \mathbb{E}Z_{n_{l+1}}| \in [c_1(2^{-l-2})M(Z_{n_{l+1}}), c_2(2^{-l-2})M(Z_{n_{l+1}})]\} - 2^{-l-2} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \geqslant 1 - 2^{-l-1}.
\end{aligned}$$

Здесь третье неравенство это частный случай [10, Corollary 7.1], четвертое неравенство следует из $r < c_1(2^{-l-2})M(Z_{n_{l+1}})$. □

Лемма 5. *Рассмотрим последовательность гауссовских векторов* $Z_n \in \mathbb{R}^d$. *Предположим, что* $\inf_n M(Z_n) = 0$, *но для любого* n $M(Z_n) > 0$. *Тогда существуют бесконечная подпоследовательность* (Z_{n_l}) *и последовательность ограниченных* ***дизъюнктных*** *борелевских множеств* R_l, *такие что для любого* l

$$\mathbb{P}\{Z_{n_l} \in R_l\} \geqslant 1 - 2^{-l}.$$

Доказательство. Переходя к подпоследовательности, можно предполагать, что $M(Z_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Обозначим $T_1 = \sup_n M(Z_n)$. В силу леммы 4, можно считать $T_1 < \infty$. Обозначим $T_2 = \sup_n |\mathbb{E}Z_n|$.

Рассмотрим сперва случай, когда $T_2 = \infty$. Тогда можно взять подпоследовательность (Z_{n_l}), такую что

$$|\mathbb{E}Z_{n_i} - \mathbb{E}Z_{n_j}| > 2\max(c_2(2^{-i}), c_2(2^{-j}))T_1$$

при $i \neq j$, и можно взять $R_l = B(\mathbb{E}Z_{n_l}, c_2(2^{-l})T_1)$. Ясно, что R_l дизъюнктны, и $\mathbb{P}\{Z_{n_l} \in R_l\} \geqslant 1 - 2^{-l}$ в силу утверждения 2.

Теперь можно считать $T_2 < \infty$. Тогда, поскольку все $\mathbb{E}Z_n$ лежат в одном и том же компактном множестве, переходя к подпоследовательности, не ограничивая общности, можно считать, что существует $a \in \mathbb{R}^d$, такой что $\mathbb{E}Z_n \to a$ при n, стремящемся к бесконечности. Достаточно доказать, что для любых $n_1 < \dots < n_l$ и любых ограниченных непересекающихся множеств $R_1, \dots, R_l$, таких что существует открытый шар $B(a, r)$, который не пересекает $R_1, \dots, R_l$, можно найти $n_{l+1} > n_l$, $r' \in (0, r)$ и ограниченное борелевское множество R_{l+1},

которое не пересекает $R_1, \dots, R_l$ и $B(a, r')$, такое что
$\mathbb{P}\{Z_{n_{l+1}} \in R_{l+1}\} \geqslant 1 - 2^{-l-1}$.

Поскольку $\mathbb{E}Z_n \to a$, $M(Z_n) \to 0$ при $n \to \infty$, существует n_{l+1}, такое что

$$r > 2c_2(2^{-l-2})M(Z_{n_{l+1}}) + |\mathbb{E}Z_{n_{l+1}} - a|. \tag{20}$$

Поскольку $\mathbb{P}\{Z_{n_{l+1}} = a\} = 0$ при $M(Z_{n_{l+1}}) > 0$, существует открытый шар $B(a, r')$, такой что

$$\mathbb{P}\{Z_{n_{l+1}} \in B(a, r')\} \leqslant 2^{-l-2};\ \ r' < r.$$

Но тогда можно взять

$$R_{l+1} = B(\mathbb{E}Z_{n_{l+1}}, 2c_2(2^{-l-2})M(Z_{n_{l+1}})) \backslash B(a, r').$$

В самом деле, $B(\mathbb{E}Z_{n_{l+1}}, 2c_2(2^{-l-2})M(Z_{n_{l+1}})) \subset B(a, r)$ в силу (20), поэтому R_{l+1} не пересекает $R_1, \dots, R_l$. Поскольку $r' < r$, $B(a, r')$ не пересекает $R_1, \dots, R_l$. Также, очевидно, $B(a, r')$ не пересекает R_{l+1}. С другой стороны,

$$\mathbb{P}\{Z_{n_{l+1}} \in R_{l+1}\} \geqslant (1 - 2^{-l-2}) - 2^{-l-2} = 1 - 2^{-l-1}$$

в силу утверждения 2 и по определению r'. □

Теперь мы готовы доказать следующую теорему:

Теорема 7. *Предположим, что $X_n \in \mathbb{R}^k$, $Y_n \in \mathbb{R}^m$, (X_n, Y_n) гауссовский для любого n, и (X_n), (Y_n) удовлетворяют* **AI-2**. *Тогда (X_n), (Y_n) также удовлетворяют* **AI-3**.

Доказательство. Будем доказывать по индукции по $k+m$. Отметим, что при $k = 0$ или $m = 0$ результат очевиден и достаточно проверить шаг индукции при $k > 0$, $m > 0$.

Предположим, что **AI-3** не выполняется. Переходя к подпоследовательности, без ограничения общности можно считать, что $\epsilon > 0$ и существуют борелевские множества $A_n \subset \mathbb{R}^k$, $B_n \in \mathbb{R}^m$, такие что

$$|P_{(X_n, Y_n)}(A_n \times B_n) - P_{X_n}(A_n)P_{Y_n}(B_n)| \geqslant \epsilon. \tag{21}$$

Более того, переходя к подпоследовательности, можно предполагать, что носители P_{X_n} имеют одну и ту же размерность $k' \leqslant k$ для любого n.

i) Рассмотрим сперва случай, когда $\sup\limits_n M(X_n) = \infty$. Тогда можно использовать лемму 4 с $Z_n = X_n$, а затем – предложение 3.

i.1) Если $k' < k$, то существуют обратимые линейные операторы F_n, такие что носители $F_n(X_n)$ лежат в одном и том же k'-мерном линейном подпространстве для всех n. По предложению 3, переходя к подпоследовательности, можно предполагать, что последовательности $(F_n(X_n))$, (Y_n) также удовлетворяют **AI-2**; но, поскольку $(F_n(X_n), Y_n)$ гауссовский для всех n и носители $F_n(X_n)$ лежат в одном и том же k'-мерном линейном подпространстве, последовательности $(F_n(X_n))$, (Y_n) удовлетворяют **AI-3** по предположению индукции. Но тогда $(F_n^{-1}(F_n(X_n)))$, (Y_n) также удовлетворяют **AI-3**, что противоречит (21).

i.2) Если $k' = k$, то существуют обратимые линейные операторы F_n, такие что $P_{F_n(X_n)} = \mathcal{N}(0, I_k)$. Аналогично предыдущему случаю, можно считать, что $(F_n(X_n))$, (Y_n) удовлетворяют **AI-2**.

ii) Теперь рассмотрим случай, когда $\sup\limits_n M(X_n) < \infty$, но не существует $\delta > 0$, такого что $\operatorname{cov}(X_n) - \delta I_k$ положительно определена для всех достаточно больших n. Тогда, переходя к подпоследовательности, можно считать, что существует последовательность векторов $v_n \in \mathbb{R}^k$, такая что $|v_n| = 1$ для любого n и

$$\operatorname{Var}(\langle X_n, v_n\rangle) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Более того, поскольку все v_n лежат в компактном множестве, переходя к подпоследовательности, можно предполагать, что $v_n \to v$, $n \to \infty$. Но тогда

$$\operatorname{Var}(\langle X_n, v\rangle) \leqslant 2(\operatorname{Var}(\langle X_n, v_n\rangle) + \operatorname{Var}(\langle X_n, v - v_n\rangle)) \to 0, \quad n \to \infty,$$

поскольку $\sup\limits_n M(X_n) < \infty$.

ii.1) Если существуют бесконечно много n, таких что $\langle X_n, v\rangle = 0$ почти наверное, то, переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что $\langle X_n, v\rangle = 0$ почти наверное для всех n, то есть, носители X_n лежат в одном и том же $(k-1)$-мерном подпространстве. Следовательно, (X_n), (Y_n) удовлетворяют **AI-3** по предположению индукции, что противоречит (21).

ii.2) Если существует лишь конечное число n таких, что $\langle X_n, v\rangle = 0$ почти наверное, то, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\langle X_n, v\rangle \to 0$, $n \to \infty$, но $\operatorname{Var}(\langle X_n, v\rangle) > 0$ для всех n. По лемме 5, переходя к подпоследовательности, можно считать, что существует последовательность дизъюнктных борелевских множеств $\widetilde{R}_l$, такая что $\mathbb{P}\{\langle X_l, v\rangle \in \widetilde{R}_l\} \geqslant 1 - 2^{-l}$, но тогда $\mathbb{P}\{X_l \in R_l\} \geqslant 1 - 2^{-l}$, где $R_l = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \langle x, v\rangle \in \widetilde{R}_l\}$. Следовательно, аналогично i), можно рассматривать только случай $k' = k$, и, более того, существуют обратимые линейные операторы F_n, такие что $P_{F_n(X_n)} = \mathcal{N}(0, I_k)$ и $(F_n(X_n))$, (Y_n) удовлетворяют **AI-2**.

Отметим, что если один из случаев i.2), ii.2) имеет место или ни один из случаев i), ii) не выполняется, то существуют обратимые линейные операторы F_n и $\delta > 0$, такое что $\operatorname{cov}(F_n(X_n)) - \delta I_k$ положительно определены, и $(F_n(X_n))$, (Y_n) удовлетворяют **AI-2** (если i) и ii) не имеют места, можно взять $F_n = I_k$ для любого n).

Если $(F_n(X_n))$, (Y_n) удовлетворяют **AI-3**, то (X_n), (Y_n) также удовлетворяют **AI-3**, что противоречит (21).

Если $(F_n(X_n))$, (Y_n) не удовлетворяют **AI-3**, то, аналогично, переходя к подпоследовательностям, можно полагать, что существуют обратимые линейные операторы G_n и $\delta' > 0$, такие что для любого n $\operatorname{cov}(G_n(Y_n)) - \delta' I_m$ положительно определены, и $(F_n(X_n))$, $(G_n(Y_n))$ удовлетворяют **AI-2**. Следовательно, $(F_n(X_n))$, $(G_n(Y_n))$ удовлетворяют **AI-0**, и можно применить теорему 3, чтобы получить, что $(F_n(X_n))$, $(G_n(Y_n))$ удовлетворяют **AI-3**. Но тогда (X_n), (Y_n) также удовлетворяют **AI-3**, что противоречит (21). □

§7. Заключение

I. Ясно, что условия **AI-0**–**AI-4** могут быть естественно модифицированы для взаимной асимптотической независимости нескольких (более, чем 2) случайных последовательностей. В то же время, аналоги всех основных представленных результатов останутся верны.

II. Ниже мы формулируем некоторые открытые вопросы и предлагаем некоторые направления исследования асимптотической независимости.

1. Интересно рассмотреть условия для **AI** вида

$$\int\limits_{E_1} f\,dP_{X_n} \int\limits_{E_2} g\,dP_{Y_n} - \int\limits_{E_1\times E_2} (f \times g)\,dP_{(X_n, Y_n)} \to 0$$

для всех f, g, принадлежащих некоторым классам функций $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$.

2. Найти достаточные условия для **AI** следующего типа:

Если $(f(X_n))$, $(g(Y_n))$ являются **AI** для всех f, g принадлежащих некоторым классам функций $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, то (X_n), (Y_n) являются **AI**.

3. Интересно рассмотреть условия **AI** для случайных элементов конкретных пространств (таких, как: пространство $C[0,1]$, пространство конфигураций и так далее…).

В ближайшем будущем мы также планируем исследовать следующие вопросы:

4. Возможно ли расширить результаты об эквивалентности некоторых **AI** на некоторый более общий случай, чем гауссовский?

5. Всегда ли **AI-0** влечет **AI-1**, если (X_n, Y_n) гауссовский, но не конечномерный? К примеру, если $X_n, Y_n \in H$, где H – бесконечномерное гильбертово пространство? Кажется, что это неверно, но на данный момент контрпример не был обнаружен.

6. Известный факт, что метрика

$$d_{\mathrm{BL}}(P,Q) = \sup_{h \in \mathrm{BL}_1(E_1 \times E_2)} \left| \int h(x,y)\, P(dx,dy) - \int h(x,y)\, Q(dx,dy) \right|$$

на пространстве вероятностных мер на $E_1 \times E_2$ эквивалентна метрике Леви–Прохорова.

Есть ли аналогичные эквивалентности, если рассмотреть метрику

$$d'_{\mathrm{BL}}(P,Q) = \sup_{\substack{f \in \mathrm{BL}_1(E_1),\\ g \in \mathrm{BL}_1(E_2)}} \left| \int f(x)\, g(y)\, dP - \int f(x)\, g(y)\, dQ \right| ?$$

К примеру, является ли следующая модификация метрики Леви–Прохорова (где инфимум берется по **замкнутым** множествам $A \subset E_1$, $B \subset E_2$) эквивалентной d'_{BL}

$$\pi'(\mu,\nu) = \inf\{\varepsilon : \mu(A^\varepsilon \times B^\varepsilon) \leqslant \nu(A^\varepsilon \times B^\varepsilon) + \varepsilon, \nu(A^\varepsilon \times B^\varepsilon) \leqslant \mu(A^\varepsilon \times B^\varepsilon) + \varepsilon\}?$$

Кажется, что метрика π' не сильнее метрики d'_{BL} (по тем же причинам, что и в случае π и d_{BL}), но доказательство обратного неравенства опирается на теорему Штрассена (к примеру, [4, Theorem 11.6.2]), и неясно, как сформулировать и доказать аналогичный факт для π' вместо π.

Список литературы

1. P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley, New York, 1968, xii+253 pp.
2. N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators.* Vol 1. General Theory. Interscience Publichers, New York, London, 1958, 874 pp.

3. Y. Davydov, V. Rotar', *On asymptotic proximity of distributions.* — J. Theor. Probab., **22**, No. 1 (2009), 82–98.
4. R. M. Dudley, *Real Analysis and Probability*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2002, 568 pp.
5. Z. Frolik, *Existence of l_∞-partitions of unity.* — Rend. Semin. Mat., Torino **42**, No. 1 (1984) 9–14.
6. L. Devroye, A. Mehrabian, T. Reddad, *The total variation distance between high-dimensional Gaussians*, https://arxiv.org/abs/1810.08693, 2019.
7. А. Н. Ширяев, *Вероятность*. В 2 кн. - 3-е изд., перераб. и доп. - М.: МЦНМО, 2004, кн.1 - 512 с.
8. Leandro Pardo, *Statistical Inference Based on Divergence Measures*, volume 185 of *Statistics*: *Textbooks and Monographs*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.
9. Y. Davydov, S. Novikov, *Remarks on asymptotic independence*, https://arxiv.org/abs/1910.04243, 2019.
10. М. А. Лифшиц, *Лекции по гауссовским процессам: Учебное пособие*, СПб.: Издательство "Лань 2016, 192 с.
11. A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory.* Berlin, New York; Springer, 1995, 402 pp.
12. J. K. Brooks, R. V. Chacon, *Continuity and compactness of easures*, Adv. in Math, **37**, No. 1 (1980), 16–26.

Novikov S. M. New results on asymptotic independence of random elements.

In this paper we continue the study of asymptotic independence of random elements, which was started in [9]. In the first part we prove some new general facts about asymptotic independence. In the second part we consider the case where the random elements belong to the space of sequences and the case where the joint distributions are Gaussian.

Санкт-Петербургский
государственный университет
E-mail: svyatoslav4@mail.ru

Поступило 8 сентября 2020 г.