Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 495, 2020 г.

Т. Д. Мосеева, А. С. Тарасов, Д. Н. Запорожец

СЛУЧАЙНЫЕ СЕЧЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

§1. Введение

Пусть $d \in \mathbb{N}$ и $k \in \{1, \dots, d-1\}$. Обозначим $G_{d,k}$ (соответственно, $A_{d,k}$) множество всех линейных (соответственно, аффинных) k-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^d$ с мерой Хаара, инвариантной относительно поворотов (соответственно, поворотов и параллельных переносов) и нормализованной следующим образом:

$$\nu_{d,k}\left(\{L \in G_{d,k}\}\right) = 1,$$

соответственно,

$$\mu_{d,k}\left(\left\{E \in A_{d,k} : E \cap \mathbb{B}^d \neq \varnothing\right\}\right) = \kappa_{d-k},$$

где $\mathbb{B}^k$ обозначает k-мерный единичный шар и $\kappa_k := |\mathbb{B}^k|$. Символом $|\cdot|$ мы обозначаем меру Лебега соответствующей размерности.

При $k = 1$ элементами $A_{d,k}$ и $G_{d,k}$ являются прямые. Формула Крофтона утверждает, что для любого выпуклого тела (выпуклого компакта с непустой внутренностью) K верно следующее:

$$\int\limits_{A_{d,1}} |K \cap E|^{d+1}\, \nu_{d,1}(\mathrm{d}E) = \frac{d(d+1)}{2d\kappa_d}|K|^2.$$

Этот результат был получен Крофтоном [4] для $d = 2$ и затем обобщён Хадвигером [6] для всех d. Менее известно следующее обобщение,

---

Ключевые слова: формула Крофтона, среднее расстояние, сферическая формула Бляшке–Петканчина, сферическая интегральная геометрия, сферическое выпуклое тело, случайная хорда.

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Работа первого автора выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-15-2019-1619.

Работа второго и третьего авторов поддержана грантом РФФИ-ННИО 20-51-12004.

независимо полученное в [3, (21)] и [5, (34)]: для $p > -d$,

$$\int\limits_{A_{d,1}} |K \cap E|^{d+p+1}\, \mu_{d,1}(\mathrm{d}E) = \frac{(d+p)(d+p+1)}{2d\kappa_d} \int\limits_{K^2} |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1|^p \, \mathrm{d}\mathbf{x}_0 \, \mathrm{d}\mathbf{x}_1.$$

На языке теории вероятностей мы имеем следующее соотношение между моментами двух случайных величин:

$$\mathbf{E}\, \sigma^{d+p+1} = \frac{(d+p)(d+p+1)}{2\kappa_{d-1}} \cdot \frac{|K|^2}{|\partial K|} \mathbf{E}\, \Delta^p,$$

где $\sigma = \sigma(K)$ обозначает длину пересечения K со случайной прямой, равномерно распределённой среди прямых из $A_{d,1}$, пересекающих K, а $\Delta = \Delta(K)$ обозначает расстояние между двумя независимыми и равномерно распределёнными случайными точками в K. Величина $|\partial K|$ обозначает площадь поверхности K (т.е. $(d-1)$-мерную меру Лебега).

Поскольку ограниченная случайная величина полностью задаётся своими моментами, мы можем сделать вывод, что распределение Δ определяется распределением σ (что априори не очевидно). Явное выражение этой взаимосвязи было получено в [1] для $d = 2$ и в [7] для любого d:

$$f_\Delta(t) = \frac{t^{d-1}}{|K|} \left(d\kappa_d - \kappa_{d-1} \frac{|\partial K|}{|K|} \int\limits_0^t (1 - F_\sigma(s))\, \mathrm{d}s \right), \tag{1}$$

где f_Δ – плотность распределения Δ, а F_σ – функция распределения σ. В доказательстве авторы использовали полярные координаты для $d = 2$ и аффинную формулу Бляшке–Петканчина [8, теорема 7.2.7] в общем случае.

Цель данной статьи – получить *сферический* аналог (1). В следующем параграфе мы приведём некоторые базовые понятия и факты из сферической интегральной геометрии, а затем сформулируем основной результат.

§2. Основной результат

Перейдём к сферической геометрии. Поскольку мы не будем возвращаться к евклидову случаю, мы сохраним некоторые обозначения для сферических аналогов.

Пусть $\mathbb{S}^{d-1}$ обозначает $(d-1)$-мерную единичную сферу и пусть ω_d обозначает её площадь: $\omega_d := |\mathbb{S}^{d-1}| = d\kappa_d$.

Рассмотрим некоторое сферическое выпуклое тело $K \subset \mathbb{S}^{d-1}$. Оно может быть представлено как $K = \mathbb{S}^{d-1} \cap C$, где C – это не содержащий прямых замкнутый выпуклый конус в $\mathbb{R}^d$.

Обозначим $\Delta = \Delta(K)$ сферическое расстояние между двумя независимыми и равномерно распределёнными случайными точками в K. Формально Δ определяется как угол между двумя независимыми случайными прямыми, равномерно распределёнными среди прямых из $G_{d,1}$, пересекающих K.

Также определим $\sigma = \sigma(K)$ как сферическую длину (1-мерную меру Лебега) пересечения K со случайной двумерной плоскостью, равномерно распределённой среди плоскостей из $G_{d,2}$, пересекающих K.

Наш основной результат – это сферическая версия (1).

Теорема 1. *Для любого сферического выпуклого тела $K \subset \mathbb{S}^{d-1}$ плотность распределения $\Delta(K)$ выражается через функцию распределения $\sigma(K)$ следующим образом:*

$$f_\Delta(t) = \frac{\sin^{d-2} t}{|K|} \left(w_{d-1} - \frac{w_d}{2\pi} \kappa_{d-1} \frac{|\partial K|}{|K|} \int\limits_0^t (1 - F_\sigma(s)) \, \mathrm{d}s \right).$$

Доказательство приведено в следующем параграфе. В качестве приложения найдём плотность распределения расстояния между двумя случайными точками в сферическом сегменте.

Следствие 1. *Пусть K – сферический сегмент сферического радиуса $r < \frac{\pi}{2}$. Тогда*

$$f_\Delta(t) = \omega_{d-1} \frac{\sin^{d-2} t}{|K|} \left(1 - \frac{w_d}{2\pi} \kappa_{d-1} \frac{1}{|K|} \int\limits_0^t \left(1 - \frac{\cos^2 r}{\cos^2 \frac{s}{2}} \right)^{\frac{d-2}{2}} \mathrm{d}s \right).$$

Доказательство. Пусть $L \in G_{d,2}$. Легко понять, что сферическая длина $K \cap L$ меньше s тогда и только тогда, когда $L \cap K_s = \varnothing$, где K_s – сферический сегмент с тем же центром, что и K и со сферическим радиусом $\arccos\left(\cos r / \cos \frac{s}{2}\right)$. Таким образом, ввиду (4) (см. ниже), имеем

$$1 - F_\sigma(s) = \frac{\mu_{d,2}\{L \cap K_s \neq \varnothing\}}{\mu_{d,2}\{L \cap K \neq \varnothing\}} = \frac{|\partial K_s|}{|\partial K|},$$

и, применяя теорему 1 совместно с

$$|\partial K_s| = \omega_{d-1}\left(\sin\arccos\left(\frac{\cos r}{\cos\frac{s}{2}}\right)\right)^{d-2} = \omega_{d-1}\left(1-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{t}{2}}\right)^{\frac{d-2}{2}},$$

мы получаем требуемое. □

В случае чётного d, f_Δ для сферического сегмента может быть выражена через элементарные тригонометрические функции.

Следствие 2. *Если $d = 2m+2$, то в условиях следствия 1 мы получаем*

$$f_\Delta(t) = \omega_{d-1}\frac{\sin^{d-2} t}{|K|} - \frac{\omega_d\omega_{d-1}\kappa_{d-1}}{\pi}\frac{\sin^{d-2} t}{|K|^2}\tan\frac{t}{2}$$
$$\times\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}(\cos r)^{2(m-k)}\left(1+\sum_{l=1}^{m-k-1}\frac{(2l-1)!!}{(2l)!!}\frac{1}{\cos^{2l}\frac{t}{2}}\right).$$

Доказательство. Из бинома Ньютона получаем

$$\int_0^t\left(1-\frac{\cos^2 r}{\cos^2\frac{s}{2}}\right)^{\frac{d-2}{2}}\mathrm{d}s = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}(\cos r)^{2(m-k)}\int_0^t\frac{1}{(\cos\frac{s}{2})^{2(m-k)}}\,\mathrm{d}s.$$

Обозначим I_{2k} неопределённый интеграл $(\cos t)^{-2k}$. Применяя дважды интегрирование по частям, имеем

$$(2k-1)I_{2k}(t) = \tan t\frac{1}{(\cos t)^{2k-2}} + (2k-2)I_{2k-2}(t).$$

Поскольку $I_2(t) = \tan t$, по индукции можно показать, что

$$I_{2k}(t) = \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\tan t\left(1+\sum_{l=1}^{k-1}\frac{(2l-1)!!}{(2l)!!}\frac{1}{\cos^{2l} t}\right).$$

Следовательно,

$$\int_0^t\left(1-\frac{\cos^2 r}{\cos^2\frac{s}{2}}\right)^{\frac{d-2}{2}}\mathrm{d}s$$
$$=2\tan\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}(\cos r)^{2(m-k)}\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}\left(1+\sum_{l=1}^{m-k-1}\frac{(2l-1)!!}{(2l)!!}\frac{1}{\cos^{2l}\frac{t}{2}}\right).$$

□

§3. Доказательство теоремы 1

Главным инструментом доказательства является следующая сферическая версия формулы Бляшке–Петканчина: для любой неотрицательной борелевской функции $f : (\mathbb{S}^{d-1})^k \to \mathbb{R}$ выполнено

$$\int\limits_{(\mathbb{S}^{d-1})^k} f(x_1, \dots, x_k)\lambda(\mathrm{d}x_1)\cdots\lambda(\mathrm{d}x_k) \tag{2}$$

$$= (k!)^{d-k} b_{d,k} \int\limits_{G_{d,k}} \int\limits_{(E\cap\mathbb{S}^{d-1})^k} f(x_1, \dots, x_k)|\operatorname{conv}(0, x_1, \dots, x_k)|^{d-k}$$

$$\times\, \lambda_L(\mathrm{d}x_1)\cdots\lambda_E(\mathrm{d}x_k)\mu_{d,k}(\mathrm{d}L),$$

где λ, λ_E – сферические меры Лебега на $\mathbb{S}^{d-1}, \mathbb{S}^{d-1} \cap L$ размерности $d-1, k-1$ соответственно, $|\operatorname{conv}(0, x_1, \dots, x_k)|$ обозначает *евклидов* объём выпуклой оболочки $0, x_1, \dots, x_k$ и

$$b_{d,k} := \frac{\omega_{d-k+1}\cdots\omega_d}{\omega_1\cdots\omega_k}.$$

Данная формула является частным случаем более общего результата из [2].

Пусть F_Δ обозначает функцию распределения $\Delta(K)$. По определению, мы имеем

$$F_\sigma(t) = \frac{\int_{G_{d,2}} \mathbb{1}[L\cap K \neq \{0\}]\mathbb{1}[\alpha(K\cap L) < t]\mu_{d,2}(\mathrm{d}L)}{\mu_{d,2}\{L \in G_{d,2} \mid L\cap K \neq \varnothing\}},$$

$$1 - F_\Delta(t) = \frac{1}{|K|^2} \int\limits_{(S^{d-1})^2} \mathbb{1}[x_1, x_2 \in K]\mathbb{1}[\alpha(x_1, x_2) \geqslant t]\lambda(\mathrm{d}x_1)\lambda(\mathrm{d}x_2),$$

где $\alpha(x_1, x_2)$ и $\alpha(K\cap L)$ обозначают сферическое расстояние между точками x_1, x_2 и сферическую длину $K \cap L$.

Сначала рассмотрим F_Δ. Из (2) следует

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{(S^{d-1})^2} \mathbb{1}[x_1, x_2 \in K]\mathbb{1}[\alpha(x_1, x_2) \geqslant t]\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \\
&= 2^{d-2} b_{d,2} \int\limits_{G_{d,2}} \int\limits_{(S^{d-1}\cap L)^2} \mathbb{1}[x_1, x_2 \in K, \alpha(x_1, x_2) \geqslant t] |\mathrm{conv}(0, x_1, x_2)|^{d-2} \\
&\qquad\qquad \times \lambda_L(\mathrm{d}x_1)\lambda_L(\mathrm{d}x_2)\mu_{d,2}(\mathrm{d}L) \\
&= 2^{d-2} b_{d,2} \int\limits_{\alpha(K\cap L)\geqslant t} \int\limits_{(K\cap L)^2} \mathbb{1}[\alpha(x_1, x_2 \geqslant t)] |\mathrm{conv}(0, x_1, x_2)|^{d-2} \\
&\qquad\qquad \times \lambda_L(\mathrm{d}x_1)\lambda_L(\mathrm{d}x_2)\mu_{d,2}(\mathrm{d}L).
\end{aligned}$$

Ввиду того, что $|\mathrm{conv}(0, x_1, x_2)| = \frac{1}{2}\sin(\alpha(x_1, x_2))$, имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{(K\cap L)^2} \mathbb{1}[\alpha(x_1, x_2 \geqslant t)] |\mathrm{conv}(0, x_1, x_2)|^{d-2} \lambda_L(\mathrm{d}x_1)\lambda_L(\mathrm{d}x_2) \\
&= \int\limits_0^{\alpha(K\cap L)} \int\limits_0^{\alpha(K\cap L)} \mathbb{1}[|\phi_1 - \phi_2| \geqslant t] \left(\frac{1}{2}\sin(|\phi_1 - \phi_2|)\right)^{d-2} \mathrm{d}\phi_1\,\mathrm{d}\phi_2 \\
&= \frac{1}{2^{d-3}} \int\limits_t^{\alpha(K\cap L)} \int\limits_0^{\phi_1 - t} \sin^{d-2}(\phi_1 - \phi_2)\,\mathrm{d}\phi_2\,\mathrm{d}\phi_1 \\
&= \frac{1}{2^{d-3}} \int\limits_t^{\alpha(K\cap L)} \int\limits_t^{\phi_1} \sin^{d-2}\phi_2\,\mathrm{d}\phi_2\,\mathrm{d}\phi_1.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$1 - F_\Delta(t) = \frac{2b_{d,2}}{|K|^2} \int\limits_{\alpha(K\cap L)\geqslant t} \int\limits_t^{\alpha(E)} \int\limits_t^{\phi_1} \sin^{d-2}\phi_2\,\mathrm{d}\phi_2\,\mathrm{d}\phi_1.$$

Рассмотрим отдельно внутренний двойной интеграл. Для натурального $n \geqslant 1$ выполняется

$$\begin{aligned}\sin^n t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{e^{it}}{2i}\right)^k \left(\frac{-e^{-it}}{2i}\right)^{n-k} \\ &= \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} e^{it(2k-n)},\end{aligned}$$

откуда получаем неопределённый интеграл функции $\sin^{d-2} t$,

$$F(t) := \begin{cases} \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}} \Big[(-1)^m \binom{2m}{m} t + \sum\limits_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{2m}{k} \frac{1}{2m-2k} \sin((2m-2k)t) \Big], \\ d-2 = 2m, \\ \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m}} \Big[\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{2m+1}{k} \frac{1}{2m+1-2k} \cos((2m+1-2k)t) \Big], \\ d-2 = 2m+1, \end{cases}$$

а затем неопределённый интеграл функции $F(t)$:

$$G(t) = \begin{cases} \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m-1}} \Big[(-1)^m \binom{2m}{m} \frac{t^2}{2} + \sum\limits_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{2m}{k} \frac{1}{(2m-2k)^2} \cos((2m-2k)t) \Big], \\ d-2 = 2m, \\ \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m}} \Big[\sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{2m+1}{k} \frac{1}{(2m+1-2k)^2} \sin((2m+1-2k)t) \Big], \\ d-2 = 2m+1. \end{cases}$$

Из этого в свою очередь следует, что

$$\begin{aligned}\int\limits_t^{\alpha(K\cap L)} \int\limits_t^{\phi_1} \sin^{d-2} \phi_2 \, \mathrm{d}\phi_2 \, \mathrm{d}\phi_1 &= \int\limits_t^{\alpha(K\cap L)} F(\phi_1) \, \mathrm{d}\phi_1 - F(t)(\alpha(K \cap L) - t) \\ &= G(\alpha(K \cap L)) - F(t)\alpha(K \cap L) - G(t) + tF(t),\end{aligned}$$

и, наконец, мы получаем

$$1 - F_\Delta(t) = \frac{2b_{d,2}}{|K|^2}\Bigg[\int\limits_{\alpha(K\cap L)\geqslant t} \left(G(\alpha(K\cap L))\right)\mu_{d,2}(\mathrm{d}L) - F(t)$$

$$\times \int\limits_{\alpha(K\cap L)\geqslant t} \alpha(K\cap L)\mu_{d,2}(\mathrm{d}L) + (tF(t) - G(t)) \int\limits_{\alpha(K\cap L)\geqslant t} \mu_{d,2}(\mathrm{d}L)\Bigg] \quad (3)$$

$$=: \frac{2b_{d,2}}{|K|^2}\left[I_1(t) - F(t)I_2(t) + (tF(t) - G(t))\, I_3(t)\right].$$

Из сферической формулы Крофтона [8, Section 6.5] следует

$$\mu_{d,2}\{L \in G_{d,2} \mid L\cap K \neq \varnothing\} = \frac{|\partial K|}{\omega_{d-1}}, \quad (4)$$

что в силу определения F_σ влечет

$$I_3(t) = \frac{|\partial K|}{\omega_{d-1}}\left(1 - F_\sigma(t)\right). \quad (5)$$

Для того, чтобы посчитать $I_1(t)$ и $I_2(t)$, нам необходима следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $R : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ *– непрерывная функция. Тогда*

$$\int\limits_{\alpha(K\cap L)<t} R(\alpha(K\cap L))\mu_{d,2}(\mathrm{d}L) = \frac{|\partial K|}{\omega_{d-1}} \int\limits_0^t R(s)\mathrm{d}F_\sigma(s). \quad (6)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$H(t) = \int\limits_{\alpha(K\cap L)<t} R(\alpha(K\cap L))\mu_{d,2}(\mathrm{d}L).$$

Известно, что

$$\frac{H(t+\Delta t) - H(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t\leqslant\alpha(K\cap L)<t+\Delta t} R(\alpha(K\cap L))\mu_{d,2}(\mathrm{d}L)$$

$$= R(\theta)\mu_{d,2}\{L \in G_{d,2} \mid L\cap K \neq \varnothing\}\frac{(F_\sigma(t+\Delta t) - F_\sigma(t))}{\Delta t}$$

для некоторого $\theta \in [t, t+\Delta t]$.

Устремляя Δt к 0 и пользуясь непрерывностью R, а также дифференцируемостью почти всюду функции F_σ вместе с (4), мы получаем

$$\mathrm{d}H(t) = \frac{|\partial K|}{\omega_{d-1}} R(t)\mathrm{d}F_\sigma(t),$$

и, поскольку $H(0) = 0$, то

$$H(t) = \frac{|\partial K|}{\omega_{d-1}} \int\limits_0^t R(s)\mathrm{d}F_\sigma(s),$$

что завершает доказательство леммы. $\square$

Продолжим доказательство теоремы. Подстановка $x = 0$ в (3) даёт

$$\begin{aligned} \int\limits_{L\cap K\neq\varnothing} (G(\alpha(K\cap L)))\,\mu_{d,2}(\mathrm{d}L) &= \frac{|K|^2}{2b_{d,2}} \\ &+ F(0) \int\limits_{L\cap K\neq\varnothing} \alpha(K\cap L)\mu_{d,2}(\mathrm{d}L) + G(0)\frac{|\partial K|}{\omega_{d-1}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Вновь используя сферическую формулу Крофтона [8, Section 6.5], получаем

$$\int\limits_{L\cap K\neq\varnothing} \alpha(K\cap L)\mu_{d,2}(\mathrm{d}L) = \frac{2\pi}{\omega_d}|K|. \tag{8}$$

Применяя (6), (7) и (8), имеем

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \int\limits_{L\cap K\neq\varnothing} (G(\alpha(K\cap L)))\,\mu_{d,2}(\mathrm{d}L) - \frac{|\partial K|}{\omega_{d-1}} \int_0^t G(s)\mathrm{d}F_\sigma(s) \\ &= \frac{|K|^2}{2b_{d,2}} + F(0)\frac{2\pi}{\omega_d}|K| + G(0)\frac{|\partial K|}{\omega_{d-1}} \\ &\quad - \frac{|\partial K|}{\omega_{d-1}} \left[G(t)F_\sigma(t) - \int_0^t F(s)F_\sigma(s)\,\mathrm{d}s \right] \end{aligned} \tag{9}$$

и

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \int\limits_{L\cap K\neq\varnothing} \alpha(K\cap L)\mu_{d,2}(dL) - \frac{|\partial K|}{\omega_{d-1}}\int\limits_0^t s\mathrm{d}F_\sigma(s) \\ &= \frac{2\pi}{\omega_d}|K| - \frac{|\partial K|}{\omega_{d-1}}\left(tF_\sigma(t) - \int_0^t F_\sigma(s)\,\mathrm{d}s\right) \\ &= \frac{2\pi}{\omega_d}|K| - \frac{|\partial K|}{\omega_{d-1}}\left(tF_\sigma(t) - \int_0^t F_\sigma(s)\,\mathrm{d}s\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя (9), (10) и (5) в (3), мы приходим к

$$\begin{aligned} 1 - F_\Delta(t) = \frac{2b_{d,2}}{|K|^2}\Bigg[\frac{|K|^2}{2b_{d,2}} + F(0)\frac{2\pi}{\omega_d}|K| + G(0)\frac{|\partial K|}{\omega_{d-1}} \\ + \frac{|\partial K|}{\omega_{d-1}}\int\limits_0^t F(s)F_\sigma(s)\,\mathrm{d}s - \frac{|\partial K|}{\omega_{d-1}}F(t)\int\limits_0^t F_\sigma(s)\,\mathrm{d}s - F(t)\frac{2\pi}{\omega_d}|K| \\ + \left(tF(t) - G(t)\right)\frac{|\partial K|}{\omega_{d-1}}\Bigg]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} F_\Delta(t) = \frac{2b_{d,2}}{|K|^2}\Bigg[\left(F(t) - F(0)\right)\frac{2\pi}{\omega_d}|K| \\ + \frac{|\partial K|}{\omega_{d-1}}\left(G(t) - tF(t) - G(0) + \int\limits_0^t \left(F(t) - F(s)\right)F_\sigma(s)\,\mathrm{d}s\right)\Bigg]. \end{aligned}$$

Дифференцируя последнее уравнение, получаем

$$\begin{aligned} f_\Delta(t) &= \frac{2b_{d,2}}{|K|^2}\Bigg[F'(t)\frac{2\pi}{\omega_d}|K| \\ &\quad + \frac{|\partial K|}{\omega_{d-1}}\left(G'(t) - F(t) - tF'(t) + F'(t)\int\limits_0^t F_\sigma(s)\,\mathrm{d}s\right)\Bigg] \\ &= \frac{2b_{d,2}}{|K|^2}\left[\sin^{d-2}t\frac{2\pi}{\omega_d}|K| - \frac{|\partial K|}{\omega_{d-1}}\sin^{d-2}t\int\limits_0^t \left(1 - F_\sigma(s)\right)\,\mathrm{d}s\right]. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что
$$b_{d,2} = \frac{\omega_d \omega_{d-1}}{4\pi}.$$

Список литературы

1. N. Aharonyan, V. Ohanyan, *Moments of the distance between two random points.* — Model. Artif. Intell. **10**, No. 2 (2016), 64–70.
2. E. Arbeiter, M. Zäle, *Kinematic relations for Hausdorff moment measures in spherical spaces.* — Math. Nachr. **153** (1991), 333–348.
3. G. D. Chakerian, *Inequalities for the difference body of a convex body.* — Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 879–884.
4. M. Crofton, *Probability.* — In Encyclopaedia Britannica, **19** (1885), 758–788.
5. J. F. C. Kingman, *Random secants of a convex body.* — J. Appl. Probab. **6** (1969), 660–672.
6. H. Hadwiger, *Über zwei quadratische Distanzintegrale für Eikörper.* — Arch. Math. (Basel) **3** (1952), 142–144.
7. Т. Мосеева, *Случайные сечения выпуклых тел.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **486** (2019), 190–199.
8. R. Schneider, W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry.* Springer, 2008.

Moseeva T. D., Tarasov A. S., Zaporozhets D. N. Random sections of spherical convex bodies.

Let $K \subset \mathbb{S}^{d-1}$ be a convex spherical body. Denote by $\Delta(K)$ the distance between two random points in K and denote by $\sigma(K)$ the length of a random chord of K. We explicitly express the distribution of $\Delta(K)$ via the distribution of $\sigma(K)$. From this we find the density of distribution of $\Delta(K)$ when K is a spherical cap.

Международный математический институт
им. Леонарда Эйлера, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: polezina@yandex.ru

Поступило 19 октября 2020 г.

Санкт-Петербургский государственный
университет, Университетская наб. 7/9,
199034 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: science.tarasov@gmail.com

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191011 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: zap1979@gmail.com