Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 495, 2020 г.

Т. Д. Мосеева

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА ВЗВЕШЕННОГО ГАУССОВСКОГО СИМПЛЕКСА

§1. Введение и основной результат

Рассмотрим стандартный гауссовский вектор X в $\mathbb{R}^k$. По определению, его длина имеет χ-распределение с k степенями свободы:

$$|X| \stackrel{d}{=} \chi_k.$$

У данного равенства по распределению есть красивое обобщение на случай нескольких векторов. А именно, рассмотрим $X_0, X_1, \ldots, X_l$ – независимые гауссовские векторы в $\mathbb{R}^d$ ($l \leqslant d$). Применив формулу для объема симплекса «высота × площадь основания» и воспользовавшись сферической симметричностью многомерного гауссовского распределения, можно показать, что объем l-мерного гауссовского симплекса с нулем распределен следующим образом:

$$|\mathrm{conv}(0, X_1, \ldots, X_l)| \stackrel{d}{=} \frac{1}{l!}\chi_{d-l+1}\cdots\chi_d, \tag{1}$$

где через $|\cdot|$ обозначен l-мерный объем (за деталями отправляем читателя к [1, глава 7] или [3]). Из равенства выше незамедлительно следует, что для любых $\sigma_1, \ldots, \sigma_l > 0$,

$$|\mathrm{conv}(0, \sigma_1 X_1, \ldots, \sigma_l X_l)| \stackrel{d}{=} \sigma_1 \cdots \sigma_l \frac{1}{l!}\chi_{d-l+1}\cdots\chi_d.$$

Если же мы удаляем из набора вершин симплекса начало координат, ситуация усложняется. Используя формулу Бляшке–Петканчина (см. утверждение 1), Майлз показал [7], что

$$\mathbf{E}\,|\mathrm{conv}(X_0, \ldots, X_l)|^p = \left[\frac{2^{l/2}\sqrt{l+1}}{l!}\right]^p \prod_{i=d-l+1}^{d} \frac{\Gamma((i+p)/2)}{\Gamma(i/2)}. \tag{2}$$

Ключевые слова: случайный симплекс, гауссовский симплекс, выпуклая оболочка, объем, формула Бляшке–Петканчина.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение No. 075-15-2019-1619.

Из данного результата, используя равенство

$$\mathbf{E}\,\chi_k^p = 2^{p/2}\frac{\Gamma((k+p)/2)}{\Gamma(k/2)},$$

Майлз заключил (без доказательства), что из метода моментов следует равенство

$$|\mathrm{conv}(X_0,\dots,X_l)| \overset{d}{=} \frac{\sqrt{l+1}}{l!}\chi_{d-l+1}\cdots\chi_d,$$

см. также [2, теорема 2.5].

Заметим, что в данном случае взвешенный случай не следует из случая равных весов. А именно, в исследовании, посвященном выпуклой оболочке нескольких случайных блужданий, Жюльен Рандон-Фюрлинг и Дмитрий Запорожец [6, теорема 6.1] в качестве вспомогательного утверждения получили следующее равенство:

$$\mathbb{E}|\mathrm{conv}(\sigma_0X_0,\dots,\sigma_lX_l)|^p = \left[\frac{2^{l/2}\sigma_0\cdots\sigma_l}{l!}\sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2}+\cdots+\frac{1}{\sigma_l^2}}\right]^p\prod_{i=d-l+1}^{d}\frac{\Gamma((i+p)/2)}{\Gamma(i/2)}. \qquad (3)$$

Несмотря на то, что равенство (2) было уже известно, доказательство утверждения выше получилось довольно объемным и использовало обобщение теоремы Судакова–Цирельсона [4, предложение 4.1]. Авторы также предположили [6, замечание 6.2], что из полученного ими результата с помощью метода моментов можно получить распределение объема взвешенного гауссовского симплекса, но, в силу того, что для основного результата требовалось лишь равенство моментов, доказательство равенства распределений не было приведено. Также авторы предположили, что можно избежать применения метода моментов и получить равенство распределений напрямую.

В данной работе мы получим явный вид распределения взвешенного гауссовского симплекса без использования метода моментов, основываясь на интуитивно понятных геометрических рассуждениях. Основной результат отражен в следующей теореме.

Теорема 1. *Зафиксируем некоторое* $l=1,\dots,d$. *Рассмотрим независимые стандартные* d*-мерные гауссовские векторы* $X_0,\dots,X_l$. *Тогда для любых весов* $\sigma_0,\dots,\sigma_l>0$

$$|\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0, \dots, \sigma_l X_l)| \overset{d}{=} \frac{1}{l!}\sigma_0 \cdots \sigma_l \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_l^2}}\chi_{d-l+1} \cdots \chi_d, \tag{4}$$

где $\chi_{d-l+1}, \dots, \chi_d$ *– независимые случайные величины, такие что для каждого* $k = d - l + 1, \dots, d$ *величина* χ_k *имеет* χ*-распределение с* k *степенями свободы.*

Работа организована следующим образом. В разделе 2 мы приведем необходимые нам факты из стохастической геометрии, а затем перейдем к доказательству теоремы 1 в разделе 3.

§2. Вспомогательные результаты

Для доказательства основного результата нам понадобится следующее утверждение ([5], теорема 7.2.7):

Утверждение 1 (Формула Бляшке–Петканчина)**.** *Пусть*

$$h : (\mathbb{R}^d)^{l+1} \to \mathbb{R}$$

– неотрицательная измеримая функция, $l \in \{1, \dots, d\}$*. Тогда*

$$\int\limits_{(\mathbb{R}^d)^{l+1}} f(x_0, \dots, x_l) \mathrm{d}x_0 \cdots \mathrm{d}x_l$$
$$= (l!)^{d-l} b_{d,l} \int\limits_{A_{d,l}} \int\limits_{E^{l+1}} f(x_0, \dots, x_l) |\mathrm{conv}(x_0, \dots, x_l)|^{d-l}$$
$$\times \lambda_E(\mathrm{d}x_0) \cdots \lambda_E(\mathrm{d}x_l) \mu_{d,l}(\mathrm{d}E),$$

где $b_{d,k} = \frac{\omega_{d-k+1} \cdots \omega_d}{\omega_1 \cdots \omega_k}$.

Следующий результат данного раздела, вероятно, хорошо известен, но для удобства читателя мы приводим его с подробным доказательством.

Лемма 1. *Пусть* $\eta_1, \eta_2, \theta_1, \theta_2, \xi_1, \xi_2$ *– положительные с вероятностью* 1 *случайные величины, такие что*

$$\eta_1 \cdot \theta_1 = \xi_1, \tag{5}$$

$$\eta_2 \cdot \theta_2 = \xi_2, \tag{6}$$

и η_i и θ_i независимы для любого $i \in \{1, 2\}$. Предположим, что $\theta_1 \stackrel{d}{=} \theta_2$ и $\xi_1 \stackrel{d}{=} \xi_2$. Тогда $\eta_1 \stackrel{d}{=} \eta_2$.

Доказательство. Прологарифмируем равенства (5) и (6) и получим, что

$$\log \eta_1 + \log \theta_1 = \log \xi_1,$$
$$\log \eta_2 + \log \theta_2 = \log \xi_2.$$

Величины в левой части каждого из равенств независимы, поэтому характеристическая функция их суммы есть произведение характеристических функций. Получаем, что

$$\phi_{\log \eta_1}(t) \cdot \phi_{\log \theta_1}(t) = \phi_{\log \xi_1}(t) = \phi_{\log \xi_2}(t) = \phi_{\log \eta_2}(t) \cdot \phi_{\log \theta_2}(t),$$

где во втором равенстве мы воспользовались тем, что $\xi_1 \stackrel{d}{=} \xi_2$. Пользуясь равенством $\theta_1 \stackrel{d}{=} \theta_2$, получаем, что $\phi_{\log \eta_1}(t) = \phi_{\log \eta_1}(t)$, откуда следует требуемое утверждение.

□

§3. Доказательство теоремы 1

В первую очередь рассмотрим случай $l = d$.

Воспользовавшись формулой объема симплекса, получаем следующее:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0, \dots, \sigma_d X_d)| &= |\mathrm{conv}(0, \sigma_1 X_1 - \sigma_0 X_0, \dots, \sigma_d X_d - \sigma_0 X_0)| \\
&= \frac{1}{d!} \det[\sigma_1 X_1 - \sigma_0 X_0, \dots, \sigma_d X_d - \sigma_0 X_0] \\
&= \frac{1}{d!} \det \begin{pmatrix} \sigma_1 X_1^{(1)} - \sigma_0 X_0^{(1)} & \cdots & \sigma_d X_d^{(1)} - \sigma_0 X_0^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1 X_1^{(d)} - \sigma_0 X_0^{(d)} & \cdots & \sigma_d X_d^{(d)} - \sigma_0 X_0^{(d)} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{d!} \det \begin{pmatrix} \sigma_1 X_1^{(1)} - \sigma_0 X_0^{(1)} & \cdots & \sigma_1 X_1^{(d)} - \sigma_0 X_0^{(d)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_d X_d^{(1)} - \sigma_0 X_0^{(1)} & \cdots & \sigma_d X_d^{(d)} - \sigma_0 X_0^{(d)} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем, что определитель матрицы не меняется при транспонировании.

Заметим, что столбцы полученной матрицы – независимые гауссовские векторы. Обозначим k-й столбец этой матрицы через Y_k.

Легко понять, что $\mathbf{E}\, Y_k = 0$. Вычислим ковариационную матрицу Y_k:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(Y_k^i, Y_k^j) &= \operatorname{cov}(\sigma_i X_i^{(k)} - \sigma_0 X_0^{(k)}, \sigma_j X_j^{(k)} - \sigma_0 X_0^{(k)}) \\
&= \sigma_i\sigma_j \operatorname{cov}(X_i^{(k)}, X_j^{(k)}) - \sigma_i\sigma_0 \underbrace{\operatorname{cov}(X_i^{(k)}, X_0^{(k)})}_{=0} \\
&\quad - \sigma_j\sigma_0 \underbrace{\operatorname{cov}(X_0^{(k)}, X_j^{(k)})}_{=0} + \sigma_0^2 \operatorname{cov}(X_0^{(k)}, X_0^{(k)}) \\
&= \sigma_i\sigma_j \operatorname{cov}(X_i^{(k)}, X_j^{(k)}) + \sigma_0^2 = \sigma_i\sigma_j\delta_{ij} + \sigma_0^2,
\end{aligned}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Таким образом,

$$\operatorname{cov}(Y_k) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + \sigma_0^2 & \sigma_0^2 & \cdots & \sigma_0^2 \\ \sigma_0^2 & \sigma_2^2 + \sigma_0^2 & \cdots & \sigma_0^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_0^2 & \sigma_0^2 & \cdots & \sigma_d^2 + \sigma_0^2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что ковариационная матрица Y_k не зависит от k, обозначим эту матрицу $\mathbf{M}$. Тогда мы можем сказать, что $Y_k = \mathbf{A}\overline{X_k}$, где $\overline{X_k}$ – независимые стандартные гауссовские векторы, а матрица $\mathbf{A}$ такова, что $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{M}$.

Заключаем, что

$$\begin{aligned}
|\operatorname{conv}(\sigma_0 X_0, \ldots, \sigma_d X_d)| &= \frac{1}{d!} \det[\mathbf{A}\overline{X_1}, \ldots, \mathbf{A}\overline{X_d}] \\
&= \frac{1}{d!} \det \mathbf{A} \det[\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_d}]. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Сначала вычислим определитель $\mathbf{A}$. Ввиду того, что $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{M}$, получаем равенство $\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{M})^{\frac{1}{2}}$.

Имеем:

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{M} &= \det \left(\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_d^2 \end{pmatrix} + \sigma_0^2 \cdot I \right) \\
&= \sigma_1^2 \cdots \sigma_d^2 + \sum_{k=1}^{d} \frac{\sigma_1^2 \cdots \sigma_d^2}{\sigma_k^2} \cdot \sigma_0^2 = \sigma_0^2 \sigma_1^2 \cdots \sigma_d^2 \sum_{k=0}^{d} \frac{1}{\sigma_k^2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\det \mathbf{A} = \sqrt{\det \mathbf{M}} = \sigma_0 \cdots \sigma_d \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_d^2}}$.

Осталось понять, как распределен $\det[\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_d}]$, то есть объем параллелепипеда, образованного векторами $\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_d}$. Обозначим этот параллелепипед через P.

Тогда

$$|P| = d! \cdot |\mathrm{conv}(0, \overline{X_1}, \ldots, \overline{X_d})|.$$

В силу (1), $|\mathrm{conv}(0, \overline{X_1}, \ldots, \overline{X_d})| \stackrel{d}{=} \frac{1}{d!}\chi_1 \cdots \chi_d$, следовательно,

$$\det[\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_d}] \stackrel{d}{=} \chi_1 \cdots \chi_d. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), приходим к равенству

$$|\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0, \ldots, \sigma_d X_d)| \stackrel{d}{=} \frac{1}{d!}\sigma_0 \cdots \sigma_d \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_d^2}}\chi_1 \cdots \chi_d, \tag{9}$$

где случайные величины $\chi_1, \ldots, \chi_d$ независимы и величина χ_k имеет χ-распределение с k степенями свободы для каждого $k = 1, \ldots, d$.

Перейдем к рассмотрению случая $l < d$. Рассмотрим аффинное подпространство

$$V_l := \mathrm{aff}(\sigma_0 X_0, \ldots, \sigma_l X_l).$$

С вероятностью, равной 1, V_l имеет размерность l. Обозначим за O_{V_l} ортогональную проекцию начала координат на V_l. Рассмотрим линейное подпространство

$$W_l := V_l - O_{V_l}.$$

Лемма. *Распределение W_l равномерно на множестве l-мерных линейных подпространств относительно заданной на нем меры Хаара и не зависит от* $|\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0, \ldots, \sigma_l X_l)|$.

Доказательство. Обозначим множество l-мерных линейных подпространств через $G_{d,l}$. Пусть $f : G_{d,l} \to \mathbb{R}^1$, $g : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ – неотрицательные ограниченные измеримые функции.

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\,[f(W_l)g\,(|\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0,\dots,\sigma_l X_l)|)]\\
&= \int\limits_{(\mathbb{R}^d)^{l+1}} f(\mathrm{aff}(\sigma_0 x_0,\dots,\sigma_l x_l) - O_{V_l}) g(|\mathrm{conv}(\sigma_0 x_0,\dots,\sigma_l x_l)|)((2\pi)^{-d/2})^{l+1}\\
&\qquad\qquad\qquad\times e^{-\frac{|x_0^2|}{2}}\cdots e^{-\frac{|x_l|^2}{2}}\mathrm{d}x_0\cdots\mathrm{d}x_l\\
&= \frac{1}{\prod_{i=0}^{l}\sigma_i}((2\pi)^{-d/2})^{l+1}\int\limits_{(\mathbb{R}^d)^{l+1}} f(\mathrm{aff}(y_0,\dots,y_l) - O_{V_l}) g(|\mathrm{conv}(y_0,\dots,y_l)|)\\
&\qquad\qquad\qquad\times e^{-\frac{|y_0|^2}{2\sigma_0^2}}\cdots e^{-\frac{|y_l|^2}{2\sigma_l^2}}\mathrm{d}y_0\cdots\mathrm{d}y_l.
\end{aligned}
$$

Применяя утверждение 1, получаем:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\,[f(W_l)g\,(|\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0,\dots,\sigma_l X_l)|)] = \underbrace{(l!)^{d-l} b_{d,l}\frac{1}{\prod_{i=0}^{l}\sigma_i}((2\pi)^{-d/2})^{l+1}}_{=C}\\
&\times\int\limits_{A_{d,l}}\int\limits_{E^{l+1}} f(\mathrm{aff}(y_0,\dots,y_l) - O_{V_l}) g(|\mathrm{conv}(y_0,\dots,y_l)|) e^{-\left(\frac{|y_0|^2}{2\sigma_0^2}+\dots+\frac{|y_l|^2}{2\sigma_l^2}\right)}\\
&\qquad\qquad\times|\mathrm{conv}(y_0,\dots,y_l)|^{d-l}\prod_{i=0}^{l}\lambda_E(\mathrm{d}y_i)\mu_{d,l}(\mathrm{d}E)\\
&\quad = C\int\limits_{G_{d,l}} f(L)\int\limits_{L^\perp}\int\limits_{(L+a)^{l+1}} g(|\mathrm{conv}(y_0,\dots,y_l)|)\\
&\quad\times e^{-\left(\frac{|y_0|^2}{2\sigma_0^2}+\dots+\frac{|y_l|^2}{2\sigma_l^2}\right)}|\mathrm{conv}(y_0,\dots,y_l)|^{d-l}\prod_{i=0}^{l}\lambda_{L+a}(\mathrm{d}y_i)\,\mathrm{d}a\,\nu_{d,l}(\mathrm{d}L).
\end{aligned}
$$

Рассмотрим l-мерное линейное подпространство

$$U := \mathrm{lin}(e_1,\dots,e_l).$$

Зафиксируем некоторое $L \in G_{d,l}$. Обозначим через $\mathbf{Q}$ такую ортогональную матрицу, что $L = \mathbf{Q}U$. Получаем следующее:

$$\int\limits_{L^\perp} \int\limits_{(L+a)^{l+1}} g(|\mathrm{conv}(y_0, \dots, y_l)|) e^{-\left(\frac{|y_0|^2}{2\sigma_0^2} + \dots + \frac{|y_l|^2}{2\sigma_l^2}\right)} \times |\mathrm{conv}(y_0, \dots, y_l)|^{d-l} \prod_{i=0}^{l} \lambda_{L+a}(\mathrm{d}y_i) \mathrm{d}a$$

$$= \int\limits_{U^\perp} \int\limits_{(U+a)^{l+1}} g(|\mathrm{conv}(\mathbf{Q}y_0, \dots, \mathbf{Q}y_l)|) e^{-\left(\frac{|\mathbf{Q}y_0|^2}{2\sigma_0^2} + \dots + \frac{|\mathbf{Q}y_l|^2}{2\sigma_l^2}\right)} \times |\mathrm{conv}(\mathbf{Q}y_0, \dots, \mathbf{Q}y_l)|^{d-l} \prod_{i=0}^{l} \lambda_{U+a}(\mathrm{d}y_i)\, \mathrm{d}a$$

$$= \int\limits_{U^\perp} \int\limits_{(U+a)^{l+1}} g(|\mathrm{conv}(y_0, \dots, y_l)|) e^{-\left(\frac{|y_0|^2}{2\sigma_0^2} + \dots + \frac{|y_l|^2}{2\sigma_l^2}\right)} \times |\mathrm{conv}(y_0, \dots, y_l)|^{d-l} \prod_{i=0}^{l} \lambda_{U+a}(\mathrm{d}y_i)\, \mathrm{d}a.$$

Заметим, что полученное выражение не зависит от L, обозначим его через $\mathcal{J}(g)$.

Таким образом,

$$\mathbf{E}\, [f(W_l) g\left(|\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0, \dots, \sigma_l X_l)|\right)] = C\mathcal{J}(g) \int\limits_{G_{d,l}} f(L) \nu_{d,l}(\mathrm{d}L).$$

Подставляя $f = 1$ и $g = 1$, получаем, что

$$1 = C\mathcal{J}(1).$$

Пусть A – произвольное измеримое подмножество $G_{d,l}$. Рассмотрим $f = \mathbb{1}_A, g = 1$. Тогда

$$\mathbb{P}[W_l \in A] = C\mathcal{J}(1) \int_A \nu_{d,l}(\mathrm{d}L) = \int_A \nu_{d,l}(\mathrm{d}L),$$

следовательно, W распределено равномерно на $G_{d,l}$.

Подставляя $f = 1, g = \mathbb{1}_B$ для измеримого $B \subset \mathbb{R}$, имеем

$$\mathbb{P}[|\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0, \dots, \sigma_l X_l)| \in B] = C\mathcal{J}(\mathbb{1}_{\mathbb{B}}).$$

Подстановка $f = \mathbb{1}_A$ и $g = \mathbb{1}_B$ завершает доказательство. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть P_l – ортогональная проекция $\mathbb{R}^d$ на первые l координат, P_l^W – ограничение этой проекции на W_l. Тогда

$$\begin{aligned}|\mathrm{conv}(\sigma_0 P_l X_0, \dots, \sigma_l P_l X_l)| &= |\mathrm{conv}(\sigma_0 P_l X_0 - P_l O_{V_l}, \dots, \sigma_l P_l X_l - P_l O_{V_l})| \\ &= \mathrm{conv}(P_l^W(\sigma_0 X_0 - O_{V_l}), \dots, P_l^W(\sigma_0 X_0 - O_{V_l})| \\ &= |\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0 - O_{V_l}, \dots, \sigma_l X_l - O_{V_l})| \cdot |\det(P_l^W)| \\ &= |\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0, \dots, \sigma_l X_l)| \cdot |\det(P_l^W)|.\end{aligned}$$

Как отмечалось выше, ортогональная проекция стандартного гауссовского вектора на подпространство размерности l имеет в этом пространстве стандартное гауссовское распределение, отсюда, используя (9), получаем следующее:

$$|\mathrm{conv}(\sigma_0 P_l X_0, \dots, \sigma_l P_l X_l)| \overset{d}{=} \frac{1}{l!}\sigma_0 \cdots \sigma_l \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_l^2}}\chi_1 \cdots \chi_l, \quad (10)$$

где $\chi_1, \dots, \chi_l$ – независимые χ-распределенные случайные величины.

Таким образом,

$$|\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0, \dots, \sigma_l X_l)| \cdot |\det(P_l^W)| \overset{d}{=} \frac{1}{l!}\sigma_0 \cdots \sigma_l \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_l^2}}\chi_1 \cdots \chi_l, \quad (11)$$

причем величины $|\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0, \dots, \sigma_l X_l)|$ и $|\det(P_l^W)|$ независимы.

Рассмотрим линейное подпространство $W := \mathrm{lin}(0, Y_1, \dots, Y_l)$, где Y_i – независимые стандартные гауссовские векторы в $\mathbb{R}^d$. С вероятностью, равной 1, W – l-мерное линейное пространство. В силу независимости и сферической инвариантности Y_i, W будет равномерно распределено на линейном l-мерном грассманиане.

Тогда

$$|\mathrm{conv}(0, Y_1, \dots, Y_l) \cdot |\det(P_l^W)| = |\mathrm{conv}(0, P_l Y_1, \dots, P_l Y_l)|, \quad (12)$$

где $|\det(P_l^W)|$ не зависит от $|\mathrm{conv}(0, Y_1, \dots, Y_l)|$.

В силу (1),

$$|\mathrm{conv}(0, Y_1, \dots, Y_l)| \overset{d}{=} \frac{1}{l!}\chi_{d-l+1} \cdots \chi_d, \quad (13)$$

где χ_i – независимые χ-распределенные случайные величины.

Аналогично, пользуясь тем, что $P_l Y_i$ – независимые стандартные гауссовские векторы в $\mathbb{R}^l$, получаем:

$$|\mathrm{conv}(0, P_l Y_1, \ldots, P_l Y_l)| \overset{d}{=} \frac{1}{l!}\chi_1 \cdots \chi_l. \tag{14}$$

Комбинируя (12), (13) и (14), имеем:

$$\frac{1}{l!}\chi_{d-l+1} \cdots \chi_d \cdot |\det(P_l^W)| \overset{d}{=} \frac{1}{l!}\chi_1 \cdots \chi_l. \tag{15}$$

Домножив (15) на $\sigma_0 \cdots \sigma_l \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_l^2}}$, получаем следующее равенство по распределению:

$$\frac{1}{l!}\sigma_0 \cdots \sigma_l \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_l^2}}\chi_{d-l+1} \cdots \chi_d \cdot |\det(P_l^W)| \overset{d}{=} \frac{1}{l!}\sigma_0 \cdots \sigma_l \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_l^2}}\chi_1 \cdots \chi_l. \tag{16}$$

Применяя лемму 1 к равенствам (11) и (16), имеем:

$$|\mathrm{conv}(\sigma_0 X_0, \ldots, \sigma_l X_l)| \overset{d}{=} \frac{1}{l!}\sigma_0 \cdots \sigma_l \sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_l^2}}\, \chi_{d-l+1} \cdots \chi_d,$$

что завершает доказательство.

Благодарность. Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Список литературы

1. T. W. Anderson, *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis.* Wiley Series in Probability and Statistics, 2003.
2. J. Grote, Z. Kabluchko. Ch. Thäle, *Limit theorems for random simplices in high dimensions.* ALEA Lat. Amer. J. Probab. Math. Statist. **16**, No. 1 (2019), 141–177.
3. H. H. Nguyen, V. Vu, *Random matrices: law of the determinant.* — Ann. Probab. **42**, No. 1 (2014), 146–167.
4. G. Paouris, P. Pivovarov, *Small-ball probabilities for the volume of random convex sets.* — Discrete Comput. Geom. **49**, No. 3 (2013), 601–646.
5. R. Schneider, W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry.* Probability and its Applications (New York). Berlin: Springer, 2008.
6. J. Randon-Furling, D. Zaporozhets, *Convex hulls of several multidimensional Gaussian random walks.* — arXiv preprint arXiv:2007.02768 (2020).

7. R. E. Miles, *Isotropic random simplices.* — Adv. Appl. Probab. **3**, No. 2 (1971), 353–382.

Moseeva T. D. Distribution of the volume of weighted Gaussian simplex.

Let $X_0, \dots, X_l$ be independent standard Gaussian vectors in $\mathbb{R}^d$ such that $l \leqslant d$. We derive an explicit formula for the distribution of the volume of weighted Gaussian simplex without the origin—l-dimensional simplex $\operatorname{conv}(\sigma_0 X_0, \dots, \sigma_l X_l)$ $(\sigma_0, \dots, \sigma_l > 0)$.

Международный
математический институт
им. Леонарда Эйлера, Россия
E-mail: polezina@yandex.ru

Поступило 15 октября 2020 г.