Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 495, 2020 г.

Л. Б. Клебанов

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ Ю. В. ЛИННИКА О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

§1. Введение

Цель предлагаемой работы – указать простые применения одной теоремы Юрия Владимировича Линника [4] и результата Б. Рамачандрана и Р. Рао [5] к доказательству как известных так и новых фактов о необходимых условиях сходимости в некоторых предельных теоремах. Отметим, что близкий по духу результат был получен в одном специальном случае Н. Н. Вахания [6]. Сформулируем сначала указанные выше теоремы в нужной нам форме.

Теорема 1.1 (Ю. В. Линник)**.** *Пусть $\varphi(t)$ – четная характеристическая функция, аналитическая в некоторой окрестности точки $t = 0$. Допустим, что $f(t)$ также четная характеристическая функция некоторого распределения вероятностей. Допустим, что*

$$f(t_j) = \varphi(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $\{t_j,\ j = 1, 2, \dots\}$ – некоторая последовательность положительных точек, монотонно стремящая к нулю. Тогда $f(t) = \varphi(t)$ при всех вещественных t.

Следующий результат доказывается как и теорема Ю. В. Линника (см. [1]).

Теорема 1.2. *Пусть теперь $\psi(s)$ – преобразование Лапласа распределения некоторой неотрицательной случайной величины. Допустим, что $\psi(s)$ аналитична в некоторой окрестности точки $s = 0$. Предположим, что $\mathcal{L}(s)$ – преобразование Лапласа распределения некоторой неотрицательной случайной величины. Допустим, что*

$$\mathcal{L}(s_j) = \psi(s_j), \quad j = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

Ключевые слова: теорема Линника, существование моментов, необходимые условия сходимости, усиленно монотонные операторы.

Работа была частично финансирована Грантовым Агентством Чешской Республики (Grant GAČR 19-04412S).

где $\{s_j,\ j=1,2,\dots\}$ *– некоторая последовательность положительных точек, монотонно стремящая к нулю. Тогда* $\mathcal{L}(s)=\psi(s)$ *при всех положительных* s.

И, наконец, нам потребуется следующий вариант результата Б. Рамачандрана и Р. Рао. Сформулируем его в виде теоремы.

Теорема 1.3. *Пусть* $f(t)$ *– четная характеристическая функция некоторого вероятностного распределения. Соответствующее* $f(t)$ *распределение имеет конечный второй момент тогда и только тогда, когда функция* $\bigl(1-f(t)\bigr)/t^2$ *ограничена в некоторой окрестности точки* $t=0$ *с выколотым началом. При этом либо существует конечный предел*

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-f(t)}{t^2}, \tag{3}$$

равный половине второго момента соответствующего $f(t)$ *распределения, либо этот этот предел равен бесконечности.*

Доказательство. Пусть $F(x)$ – функция распределения, соответствующая характеристической функции $f(t)$. В силу четности $f(t)$ имеем

$$\frac{1-f(t)}{t^2}=\frac{1}{2t^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bigl(1-\cos(tx)\bigr)dF(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigl(\frac{\sin(tx/2)}{tx/2}\Bigr)^2x^2dF(x).$$

Если распределение $F(x)$ имеет конечный второй момент, то x^2 – интегрируемая мажоранта подынтегральной функции и предельный переход при $t\to 0$ под знаком интеграла возможен. Поэтому величина $\bigl(1-f(t)\bigr)/t^2$ ограничена и

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-f(t)}{t^2}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2dF(x).$$

Наоборот, пусть теперь второй момент не существует. Тогда

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigl(\frac{\sin(tx/2)}{tx/2}\Bigr)^2x^2dF(x)$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_{-A}^{A}\Bigl(\frac{\sin(tx/2)}{tx/2}\Bigr)^2x^2dF(x)\xrightarrow[t\to 0]{}\frac{1}{2}\int\limits_{-A}^{A}x^2dF(x)$$

для любого положительного A. Поскольку второй момент не существует, то интеграл в правой части неограниченно растет с ростом A. Последнее означает, что $\bigl(1 - f(t)\bigr)/t^2$ не ограничена. $\square$

Если функция $f(t)$ дифференцируема $2k$ (k – целое положительное число) раз, т.е. имеет конечный момент μ_{2k} порядка $2k$, тогда $(-1)^k f^{(2k)}/\mu_{2k}$ представляет собой новую характеристическую функцию, к которой можно применить теорему 1.3 и получить условие существования момента порядка $2k+2$.

Приведем теперь аналог теоремы 1.3 для случая первого момента неотрицательной случайной величины.

Теорема 1.4. *Пусть X – невырожденная неотрицательная случайная величина с преобразованием Лапласа $\mathcal{L}(s)$. Распределение величины X имеет конечное среднее тогда и только тогда, когда функция $\bigl(1-\mathcal{L}(s)\bigr)/s$ ограничена в некотором промежутке вида $(0,\delta)$, $\delta > 0$. При этом либо существует конечный предел*

$$\lim_{s\to 0} \frac{1-\mathcal{L}(s)}{s}, \tag{4}$$

равный среднему значению X, либо этот предел равен бесконечности.

Доказательство. Имеем

$$\frac{1-\mathcal{L}(s)}{s} = \int\limits_0^\infty \frac{1-e^{-sx}}{sx}\, x\, dF(x),$$

где $F(x)$ – функция распределения случайной величины X. Величина $(1-e^{-sx})/(sx)$ ограничена единицей и стремится к ней при $s \to 0$. Если существует конечное среднее $\mathbf{E}\,X$, то возможен предельный переход под знаком интеграла, т.е.

$$\lim_{s\to 0} \frac{1-\mathcal{L}(s)}{s} = \mathbf{E}\,X.$$

Если же среднее не существует, то

$$\liminf_{s\to 0} \frac{1-\mathcal{L}(s)}{s} \geqslant \liminf_{s\to 0} \int\limits_0^A \frac{1-e^{-sx}}{sx}\, x\, dF(x) = \int\limits_0^A x\, dF(x)$$

для любого $A > 0$. Требуемое получается теперь предельным переходом при $A \to \infty$. $\square$

Отметим, что теоремы 1.1 и 1.2 послужили основой метода усиленно монотонных операторов (см. [1]) и, тем самым, применению в теории характеризации вероятностных распределений. В этой работе мы укажем связь этих теорем и теоремы 1.3 с получением необходимых условий сходимости в некоторых предельных теоремах.

§2. Некоторые простые замечания об условиях существования моментов

Как видно из названия этого параграфа, речь пойдет именно об очень простых, но, как кажется, полезных условиях существования некоторых моментов. В основном, речь пойдет о существовании второго момента распределений.

Теорема 2.1. *Пусть X – невырожденная случайная величина с четной характеристической функцией $f(t)$. Величина X имеет конечный второй момент тогда и только тогда, когда существуют характеристическая функция $\varphi(t)$, аналитическая в некоторой окрестности нуля, и число $\delta > 0$, такие что $f(t) \geqslant \varphi(t)$ при всех $t \in [-\delta, \delta]$.*

Доказательство. Допустим сначала, что для характеристической функции $f(t)$ найдется функция $\varphi(t)$ с требуемыми свойствами. Так как $f(t) \geqslant \varphi(t)$ при всех $t \in [0, \delta]$, то $1 - f(t) \leqslant 1 - \varphi(t)$. Так как $\varphi(t)$ аналитична в окрестности нуля, то величина $(1 - \varphi(t))/t^2$ ограничена. Следовательно, и величина $(1 - f(t))/t^2$ ограничена в некоторой окрестности точки $t = 0$. По теореме 1.3 X имеет конечный второй момент.

Допустим теперь, что X имеет конечный второй момент. Изменяя, если нужно, масштаб, можно считать что этот момент равен единице. Тогда $1 - f(t) = -t^2/2 + o(t^2)$ при $t \to 0$. В этом случае ясно, что $f(t) \geqslant \exp(-t^2)$ при достаточно малых t. □

Дадим теперь результат противоположного характера.

Теорема 2.2. *Пусть X – случайная величина с четной характеристической функцией $f(t)$. Величина X не имеет конечного второго момента (т.е. он бесконечен) тогда и только тогда, когда для любой аналитической в окрестности нуля характеристической функции $\varphi(t)$ существует окрестность нуля, в которой $f(t) < \varphi(t)$ при $t \neq 0$.*

Доказательство. Из теоремы Ю. В. Линника 1.1 вытекает, что для любой аналитической в окрестности нуля характеристической функции $\varphi(t)$ существует окрестность нуля, в которой либо $f(t) < \varphi(t)$ либо $f(t) > \varphi(t)$ при $t \neq 0$. Если бы для некоторой аналитической характеристической функции $\varphi(t)$ было бы $f(t) > \varphi(t)$ при $t \neq 0$ в некоторой окрестности нуля, то по теореме 2.1 величина X имела бы конечный второй момент. При его отсутствии необходимо выполняется неравенство $f(t) < \varphi(t)$. □

Для случая неотрицательной случайной величины Y справедливы следующие факты.

Теорема 2.3. *Пусть Y – невырожденная неотрицательная случайная величина с преобразованием Лапласа $\mathcal{L}(s)$. Величина Y имеет конечный первый момент тогда и только тогда, когда существует преобразование Лапласа $\psi(s)$, аналитическое в окрестности нуля, и число $\delta > 0$, такие что $\mathcal{L}(s) > \psi(s)$ при всех $s \in (0, \delta)$.*

Теорема 2.4. *Пусть Y – невырожденная неотрицательная случайная величина с преобразованием Лапласа $\mathcal{L}(s)$. Величина Y не имеет конечного первого момента (т.е., он бесконечен) тогда и только тогда, когда для любого аналитического в окрестности нуля преобразования Лапласа $\psi(s)$ существует промежуток вида $(0, \delta)$ $(\delta > 0)$, в котором $\mathcal{L}(s) < \psi(s)$.*

Доказательства теорем 2.3 и 2.4 вполне аналогичны доказательствам двух предыдущих теорем и поэтому не приводятся.

Отметим, что в теоремах 2.1, 2.3 *моменты, соответствующие функциям φ и ψ, больше моментов величин X и Y.*

Замечание 2.1. В теоремах 2.1–2.4 условия аналитичности функций φ и ψ можно заменить условиями единственности восстановления соответсвующих им распределений по их моментам.

Доказательство. Достаточно заметить, что теорема Ю. В. Линника остается справеливой для случая единственности восстановления распределения, соответсвующего φ, по его моментам (см. об этом в [1]). □

§3. Один общий результат о необходимых условиях сходимости к неподвижной точке

В этом параграфе мы будем использовать усиленно монотонные операторы, введенные в [1], поэтому приведем сначала их определение.

Пусть $\mathbf{C} = \mathbf{C}[0,T]$ – пространство функций, определенных и непрерывных на промежутке $[0,T]$. Допустим, что $\mathcal{A}$ – это оператор из пространства $\mathbf{C}$ в него же.

Определение 3.1. *Скажем, что оператор $\mathcal{A}$ является усиленно монотонным, если для любых f_1, f_2 из $\mathbf{C}$ условие*

$$f_1(\tau) \geqslant f_2(\tau) \quad \textit{для всех} \quad \tau \in (0,t)$$

влечет

$$(\mathcal{A}f_1)(\tau) \geqslant (\mathcal{A}f_2)(\tau) \quad \textit{для всех} \quad \tau \in (0,t).$$

При этом условие

$$f_1(\tau) > f_2(\tau) \quad \textit{для всех} \quad \tau \in (0,t)$$

влечет $(\mathcal{A}f_1)(t) > (\mathcal{A}f_2)(t)$. Эти условия предполагаются выполненными для всех $t \in (0,T)$.

Обозначим через $\mathfrak{F}$ (соответственно, $\mathfrak{L}$) множество сужений четных характеристических функций (соответственно, преобразований Лапласа) на промежуток $[0,T]$. Через $\mathfrak{F}_o$ (соответственно, $\mathfrak{L}_o$) обозначим множество сужений четных характеристических функций, аналитических в какой-либо окрестности нуля (соответственно, преобразований Лапласа, аналитических в какой-либо окрестности нуля) на промежуток $[0,T]$. Ясно, что $\mathfrak{F}_o \subset \mathfrak{F} \subset \mathbf{C}$ и $\mathfrak{L}_o \subset \mathfrak{L} \subset \mathbf{C}$.

Каждой функции $f \in \mathbf{C}$ и числу $\sigma > 0$ сопоставим функцию f_σ, определенную равенством

$$f_\sigma(t) = f(\sigma t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \min[T, T/\sigma].$$

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{A}$ – усиленно монотонный оператор в $\mathbf{C}$, обладающий следующими свойствами:*

(1) *Для любых $\sigma > 0$ и $f \in \mathfrak{F}$ выполнено $\mathcal{A}f_\sigma = (\mathcal{A}f)_\sigma$.*
(2) *Существует неподвижная точка $\varphi \in \mathfrak{F}_o$ оператора $\mathcal{A}$.*

Для $f \in \mathfrak{F}$ рассмотрим итерации $\mathcal{A}^n f = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{n-1} f)$. Для сходимости

$$\mathcal{A}^n f \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi \tag{1}$$

необходимо, чтобы распределение с характеристической функцией f имело конечный второй момент.

Доказательство. Предположим, что теорема не верна. Пусть для некоторой функции $f \in \mathfrak{F}$ имеет место сходимость (1), но второй момент, соответствующий f, бесконечен. По теореме 2.2 для $\sigma > 1$ и всех $0 < t < \delta$ выполнено $f(t) < \varphi_\sigma(t)$, где $\delta > 0$ зависит от σ и φ. Так как $\varphi_\sigma(t)$ – неподвижная точка оператора $\mathcal{A}$, то в силу усиленной монотонности $\mathcal{A}^n f \leqslant \varphi_\sigma(t) < \varphi(t)$ при всех целых $n > 1$. Таким образом, сходимость (1) места не имеет. □

Совершенно аналогично доказывается следующий результат.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{A}$ – усиленно монотонный оператор в $\mathbf{C}$, обладающий следующими свойствами:*

(1) *Для любых $\sigma > 0$ и $\mathcal{L} \in \mathfrak{L}$ выполнено $\mathcal{A}\mathcal{L}_\sigma = (\mathcal{A}\mathcal{L})_\sigma$.*
(2) *Существует неподвижная точка $\psi \in \mathfrak{L}_o$ оператора $\mathcal{A}$.*

Для $f \in \mathfrak{L}$ рассмотрим итерации $\mathcal{A}^n\mathcal{L} = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{n-1}\mathcal{L})$. Для сходимости

$$\mathcal{A}^n\mathcal{L} \xrightarrow[n\to\infty]{} \psi \tag{2}$$

необходимо, чтобы распределение с преобразованием Лапласа $\mathcal{L}$ имело конечный первый момент.

Замечание 3.1. В теоремах 3.1, 3.2 условия аналитичности функций φ и ψ можно заменить условиями единственности восстановления соответсвующих им распределений по их моментам.

§4. Примеры использования приведенных выше результатов

Наш первый пример относится к закону больших чисел для неотрицательных случайных величин.

Теорема 4.1. *Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин. Для того чтобы последовательность нормированных сумм*

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

сходилась по вероятности к положительной постоянной a, необходимо, чтобы существовало конечное среднее значение величины X_1.

Доказательство. Хорошо известно, что сходимость по вероятности к постоянной эквивалентна равномерной сходимости преобразований Лапласа распределений соответсвующих случайных величин. Допустим, что S_n сходится по вероятности к a. Определим оператор $\mathcal{A}$ равенством

$$\mathcal{A}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^2(s/2). \tag{1}$$

Очевидно, что $\mathcal{A}$ – усиленно монотонный оператор. Функция $\psi(s) = \exp\{-as\}$ является, очевидно, преобразованием Лапласа вырожденного в точке a распределения. Сходимость итераций оператора $\mathcal{A}$ соответствует сходимости подпоследовательности последовательности S_n. Условия теоремы 3.2 выполнены очевидным образом, и, следовательно, для сходимости необходимо наличие конечного первого момента величины X_1. □

Разумеется, приведенный результат хорошо известен, а само условие существования среднего является и достаточным. Мы привели доказательство только для того, чтобы показать, насколько оно просто при использовании предыдущих замечаний.

Укажем теперь более общий результат, относящийся к суммам случайного числа случайных величин (см. [2, 3]).

Пусть $\mathcal{P}$ – производящая функция вероятностей некоторой дискретной положительной случайной величины ν, причем $\kappa = \mathbf{E}\,\nu > 1$ конечно. Допустим, что Z – неотрицательная случайная величина с преобразованием Лапласа $\psi(s)$. Предположим, что функция $\psi(s)$ аналитична в некоторой окрестности точки $s = 0$ и удовлетворяет уравнению

$$\psi(s) = \mathcal{P}(\psi(s/\kappa)). \tag{2}$$

Обозначим через $\mathcal{P}^{on}$ n-ую степень суперпозиции функции $\mathcal{P}$. Ясно, что $\mathcal{P}^{on}$ также является производящей функцией вероятностей некоторой случайной величины. Очевидным образом из (2) следует, что

$$\psi(s) = \mathcal{P}^{on}(\psi(s/\kappa^n)), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Функции ψ, удовлетворяющие (2) и (3), являются преобразованиями Лапласа так называемых ν–вырожденных случайных величин (см. [2, 3]). В частности, для $\mathcal{P}(z) = z^\kappa$ функция $\psi(s) = \exp\{-as\}$ является при любом $a > 0$ решением уравнения (2) и мы находимся в условиях теоремы 4.1. Для случая величины ν с геометрическим распрелением с параметром $p \in (0, 1)$ производящая функция $\mathcal{P}(z) = pz/\big(1-(1-p)z\big)$, а решение уравнения (2) – это преобразование Лапласа экспоненциального закона. Дальнейшие примеры могут быть найдены в [3].

Пусть теперь $Y_1, \dots, Y_n, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин, а ν – не зависящая от них целочисленная случайная величина, для которой справедливо сказанное выше относительно производящей функции и решения уравнения (2). Обозначим $\mathcal{L}(s)$ преобразование Лапласа Y_1. Нас интересует вопрос о сходимости $\mathcal{P}^{on}(\mathcal{L}(s/\kappa^n))$ к $\psi(s)$. Такая сходимость легко может быть интерпретирована в терминах сходимости сумм случайного числа случайных величин к предельному распределению. Она представляет собой аналог закона больших чисел для неотрицательных слагаемых.

Теорема 4.2. *При сделанных выше предположениях для сходимости последовательности $\mathcal{P}^{on}(\mathcal{L}(s/\kappa^n))$ к $\psi(s)$ необходимо, чтобы случайная величина Y_1 имела конечное среднее.*

Доказательство. Достаточно ввести оператор $(\mathcal{A}(\mathcal{L}))(s) = \mathcal{P}(\mathcal{L}(s/\kappa))$ и воспользоваться теоремой 3.2 $\square$

Заменим последовательность $Y_1, \dots, Y_n, \dots$ последовательностью случайных величин $X_1, \dots, X_n, \dots$ независимых одинаково распределенных случайных величин с симметричным распределением и характеристической функцией $f(t)$. Допустим, что W – случайная величина с симметричной характеристической функцией $\varphi(t)$, аналитической в некоторой окрестности нуля. Вместо уравнения (2) будем предполагать, что φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(t) = \mathcal{P}(\varphi(t/\kappa^{1/2})). \tag{4}$$

Тогда вместо (3) будем иметь

$$\varphi(t) = \mathcal{P}^{on}(\varphi(t/\kappa^{n/2})). \tag{5}$$

Теорема 4.3. *При сделанных выше предположениях для сходимости последовательности $\mathcal{P}^{on}(f(t/\kappa^{n/2}))$ к $f(t)$ необходимо, чтобы случайная величина X_1 имела конечный второй момент.*

Доказательство. Достаточно ввести оператор $(\mathcal{A}(f))(s) = \mathcal{P}(f(s/\kappa))$ и воспользоваться теоремой 3.1. $\square$

Замечание 4.1. В теоремах 4.2, 4.3 условия аналитичности функций φ и ψ можно заменить условиями единственности восстановления соответсвующих им распределений по их моментам.

Список литературы

1. A. V. Kakosyan, L. B. Klebanov, J. A. Melamed, *Characterization of Distributions by the Method of Intensively Monotone Operators.* Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer, 1984.
2. L. B. Klebanov, *Heavy Tailed Distributions.* Prague: Mathfyzpress, 2003.
3. L. B. Klebanov, A. V. Kakosyan, S. T. Rachev, G. Temnov, *On a class of distributions stable under random summation.* — J. Appl. Probab., **49** (2012), 303–318.
4. Ю. В. Линнник, *Разложения вероятностных законов.* Ленинград: ЛГУ, 1960.
5. B. Ramachandran, C. R. Rao, *Some results on characteristic functions and characterizations of the normal and generalized stable distributions.* — Sankhyā, Ser. A, **30**, No. 1 (1968), 125–140.
6. N. N. Vakhania, *Elementary proof of Polya's characterization theorem and of the necessity of second moment in the CLT.* — Theory Probab. Appl., **38**, No. 1 (2006), 166–168.

Klebanov L. B. Some applications of Yu. V. Linnik's theorem on characteristic functions.

In the paper there are given some applications of Yu. V. Linnik theorem and a result by B. Ramachandran and C. R. Rao to obtain necessary conditions for the convergence in special limit theorems. The case of convergence of sums of random number of random variables is considered too.

Кафедра теории вероятностей
и математической статистики,
Карлов университет,
Прага, Чешская республика
E-mail: levbkl@gmail.com

Поступило 28 сентября 2020 г.