Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 495, 2020 г.

М. С. Ермаков

О РАВНОМЕРНОЙ СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ. II.

§1. Введение

Дана выборка $X_1, \dots, X_n$ независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих функцию распределения $F(x)$ и принимающих значения на интервале $[0,1]$.

Определим функцию распределения $F_0(x) = x$ для $x \in [0,1]$.

Обозначим $\Im$ множество всех функций распределения случайных величин, принимающих значения в интервале $[0,1]$.

Мы проверяем гипотезу

$$\mathbb{H}_0 : F = F_0 \tag{1.1}$$

против множеств альтернатив, заданных в терминах функций распределения

$$\mathbb{H}_n \,:\, F \in \Upsilon_n, \quad \Upsilon_n \subset \Im \tag{1.2}$$

или в терминах плотностей $p(x) = 1 + f(x) = \frac{d\,F(x)}{d\,x}$ распределения

$$\mathbb{H}_{1n} \,:\, f \in \Psi_n, \quad \Psi_n \subset \mathbb{L}_\infty(0,1). \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbb{L}_\infty(0,1)$ – банахово пространство вещественных функций $h(x)$, $x \in [0,1]$, с нормой $\|h\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x\in(0,1)} |h(x)|$.

Обозначим $\hat{F}_n$ эмпирическую функцию распределения выборки $X_1, \dots, X_n$.

На множестве $\Im$ функций распределения определим функционал

$$T(F) = \max_{x\in[0,1]} |\, F(x) - F_0(x)\,|.$$

Тогда $T(\hat{F}_n)$ является тестовой статистикой *критерия Колмогорова*.

Нас будут интересовать необходимые и достаточные условия на последовательности множеств альтернатив Υ_n (соответственно Ψ_n), при которых критерий Колмогорова является равномерно состоятельным.

Ключевые слова: критерии согласия, состоятельность, критерий Колмогорова, наибольшие множества.

Исследование поддержано грантом РФФИ 20-01-00273.

Такие последовательности множеств альтернатив мы будем называть равномерно состоятельными.

Состоятельность и относительная асимптотическая эффективность критерия Колмогорова исследовалась в основном для параметрических множеств альтернатив [2,8,12,19,25]. Ингстер [9] исследовал равномерную состоятельность критерия Колмогорова, когда множество альтернатив является телом в пространстве Бесова $\mathbb{B}^s_{2\infty}$ и из него удален “маленький шар” из $\mathbb{L}_2(0,1)$.

Для тестовых статистик $T_n(\widehat{F}_n)$, имеющих квадратичную структуру, в [4, 6] мы показали, что необходимым и достаточным условием равномерной состоятельности множеств альтернатив Υ_n является отделенность их нормированных расстояний $e_n \inf\{T_n(F) : F \in \Upsilon_n\}$ от нуля, где функционалы T_n тестовых статистик, вообще говоря, зависели от объема выборки n и нормирующие константы $e_n \to \infty$ при $n \to \infty$ выбирались специальным образом.

Такое утверждение было доказано в [4, 6]:

для критериев Крамера–фон Мизеса;

для критериев хи-квадрат с растущим вместе с ростом объема выборки числом зон;

для тестовых статистик, являющихся квадратичными формами оценок коэффициентов Фурье разложения сигнала в ортогональном базисе;

для тестовых статистик, являющихся $\mathbb{L}_2$-нормами ядерных оценок.

Для критерия Колмогорова известно [14], что он является состоятельным для последовательностей альтернатив $\mathbb{H}_n : F = F_n$, если $n^{1/2}T(F_n) \to \infty$ при $n \to \infty$, и несостоятельным, если $n^{1/2}T(F_n) \to 0$ при $n \to \infty$. В тоже время критерий Колмогорова не является равномерно состоятельным (асимптотически несмещенным) [14, 17, 18] для множеств альтернатив

$$\Theta_n(0,1,a) = \{ F : n^{1/2}\, T(F) > a,\, F \in \Im \},$$

где $a > 0$.

В работе мы показываем равномерную состоятельность критерия Колмогорова на множествах альтернатив

$$\Upsilon_n(e_1, e_2, a) = \{F : n^{1/2} \max_{e_1 \leqslant x \leqslant e_2} |F(x) - F_0(x)| > a,\, F \in \Im_1 \}$$

при произвольных e_1, e_2, $0 < e_1 < e_2 < 1$ и $a > 0$. Здесь $\Im_1$ – множество всех непрерывных строго возрастающих функций распределения, $\Im_1 \subset \Im$.

Мы также рассматриваем тестовую статистику Смирнова [19–21]

$$T_m(\hat{F}_n) = \max_{0<x<1} (\hat{F}_n(x) - F_0(x))$$

для задачи проверки гипотезы $\mathbb{H}_0$ против альтернатив

$$\mathbb{H}_{mn} \,:\, F \in \Omega_n(e_1, e_2, a),$$

где

$$\Omega_n(e_1, e_2, a) \, \{F : n^{1/2} \max_{e_1 \leqslant x \leqslant e_2} (F(x) - F_0(x)) > \, a, \, F \, \in \, \Im_1 \, \}$$

при произвольных e_1, e_2, $0 < e_1 < e_2 < 1$ и $a > 0$.

Мы показываем равномерную состоятельность (см. теоремы 3.4, 3.5) множеств альтернатив $\Omega_n(e_1, e_2, a)$ для тестовой статистики $T_m(\hat{F}_n)$.

После этого нами исследуется вопрос: как описать равномерную состоятельность критерия Колмогорова, когда непараметрические множества альтернатив задаются в терминах плотностей распределений (1.3).

Множества Ψ_n равномерно состоятельны, если и только если все последовательности простых альтернатив $f_n \in \Psi_n$ состоятельны.

Таким образом, вопрос о равномерной состоятельности множеств альтернатив сводится к вопросу о состоятельности последовательностей простых альтернатив.

Чтобы исследовать задачу для последовательностей простых альтернатив, мы отвечаем на три вопроса *ii–iv*, поставленных в первой части работы [6].

Зафиксируем r, $0 < r \leqslant 1/2$. Предположим, что множествами альтернатив являются множества

$$V_n = \{\, f \,:\, \|f\|_\infty > \, c\, n^{-r}, \, f \in U \,\},$$

где U – центрально-симметричное выпуклое множество в $\mathbb{L}_\infty(0,1)$.

ii. Для каких наибольших множеств U критерий Колмогорова равномерно состоятелен для множеств альтернатив V_n?

Точное определение наибольших множеств дано в подразделе 2.2. Для $0 < r < 1/2$ в работе (см. теорему 4.3) показано, что наибольшими множествами являются тела в пространстве Бесова $\mathbb{B}^s_{\infty,\infty}$, где

$s = \frac{2r}{1-2r}$. Отсюда получаем $r = \frac{s}{2+2s}$. Асимптотически минимаксные критерии для тел в пространстве Бесова $\mathbb{B}^s_{\infty,\infty}$ были построены в [15].

Если $r = 1/2$, нельзя найти множества, удовлетворяющие всем требованиям определения наибольших множеств для $0 < r < 1/2$. Однако мы показываем для специально выбранного вейвлет-базиса, что ограниченные в $\mathbb{L}_\infty(0,1)$ множества функций, имеющие конечное фиксированное число ненулевых коэффициентов Фурье, удовлетворяют аналогичным требованиям. В дальнейших утверждениях этого параграфа, а следовательно и в соответствующих теоремах, наибольшие множества могут быть заменены на такие множества.

iii. Как описать все состоятельные и несостоятельные последовательности простых альтернатив, имеющих фиксированную скорость сходимости к гипотезе в $\mathbb{L}_\infty(0,1)$*?*

Мы исследуем эту задачу, как задачу проверки гипотезы

$$\bar{\mathbb{H}}_0 \,:\, f(x) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{1.4}$$

против последовательности простых альтернатив

$$\bar{\mathbb{H}}_n \,:\, f = f_n, \qquad c\,n^{-r} \leqslant \|f_n\|_\infty \leqslant C\,n^{-r}, \qquad 0 < r \leqslant 1/2, \tag{1.5}$$

где $0 < c < C < \infty$.

В теореме 4.5 показано, что функции f_n любой состоятельной последовательности альтернатив f_n, $c\,n^{-r} \leqslant \|f_n\|_\infty \leqslant C\,n^{-r}$, могут быть представлены как суммы функций f_{1n}, $c\,n^{-r} \leqslant \|f_{1n}\|_\infty \leqslant C\,n^{-r}$, принадлежащих некоторому наибольшему множеству, и функций f_{2n}, причем f_n, f_{1n} и f_{2n} имеют те же знаки коэффициентов ортогонального разложения в рассматриваемом нами базисе. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ найдется наибольшее множество и функции f_{1n}, $c\,n^{-r} \leqslant \|f_{1n}\|_\infty \leqslant C\,n^{-r}$, из этого множества, такие что разность вероятностей ошибок второго рода альтернатив f_n и f_{1n} меньше ε.

iv. Как охарактеризовать взаимоотношение состоятельных и несостоятельных последовательностей альтернатив?

Оказывается, что для критерия Колмогорова ответ на этот вопрос аналогичен случаю критериев, имеющих тестовые статистики с квадратичной структурой [6]. Вероятности ошибок второго рода альтернатив, образованных суммами функций состоятельной и несостоятельной последовательностей альтернатив, имеют ту же самую асимптотику, что и вероятности ошибок второго рода состоятельной последовательности альтернатив (см. теорему 4.6). Мы находим аналитическое задание состоятельных последовательностей простых альтернатив f_n,

$c\,n^{-r} \leqslant \|f_n\|_\infty \leqslant C\,n^{-r}$, из которых нельзя выделить несостоятельную последовательность альтернатив с той же самой скоростью сходимости к гипотезе, и исследуем их свойства. Мы называем такие последовательности состоятельных альтернатив *чисто состоятельными последовательностями* простых альтернатив.

Как уже говорилось, мы покажем, что наибольшими множествами для состоятельных последовательностей простых альтернатив f_n, $\|f_n\|_\infty \asymp n^{-r}$, являются тела в пространстве Бесова $\mathbb{B}^s_{\infty,\infty}$.

Мы рассматриваем тела Бесова

$$\mathbb{B}^s_{\infty,\infty}(P_0) = \Big\{ f \,:\, f = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^k} \theta_{ji}\,\phi_{ji},\ \sup_k 2^{(s+1/2)k} \sup_{1\leqslant i\leqslant 2^k} |\theta_{ji}| \leqslant P_0 \Big\},$$

где $\theta_{ji} \in \mathbb{R}^1$ и $\phi_{ji}(x) = 2^{j/2}\,\phi(2^j x - i)$, $x \in (0,1)$, – вейвлет-базис и $P_0 > 0$. Предполагается, что материнский периодический вейвлет ϕ имеет гладкость больше чем $[s]+2$ и имеет ограниченный носитель (a_1,a_2), при этом $\int\limits_{a_1}^{a_2} x\,\phi(x+c)\,dx = 0$, где $c = (a_1+a_2)/2$. Здесь $m=[s]$ обозначает целую часть числа s.

Отметим [10], что для нецелых s пространство Бесова $\mathbb{B}^s_{\infty,\infty}$ состоит из функций f, таких что существует $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ для всех $x \in (0,1)$ при $m=[s]$ и $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ удовлетворяет условиям Гёльдера порядка $s-m$. Если s целое, то функции $\frac{d^{s-1} f(x)}{dx^{s-1}}$ принадлежат классу Зигмунда.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 даны ключевые определения. В разделе 3 приведены теоремы о равномерной состоятельности множеств альтернатив, заданных в терминах функций распределения. В разделе 4 даны теоремы о состоятельности последовательностей альтернатив, являющимися плотностями распределения и сближающихся с гипотезой со скоростью n^{-r}, $0 < r < 1/2$. Случай $r = \frac{1}{2}$ рассматривается в разделе 5. Доказательство теорем приведено в приложении.

Мы будем обозначать буквами c и C положительные постоянные. Для любых двух последовательностей положительных чисел a_n и b_n, $a_n \asymp b_n$ означает $c < a_n/b_n < C$ при всех n и $a_n = o(b_n)$, $a_n = O(b_n)$ означает $a_n/b_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $a_n < Cb_n$ для всех n соответственно.

§2. Основные определения

2.1. Состоятельность. Рассмотрим задачу проверки гипотезы (1.1) о функции распределения против альтернатив (1.2).

Для критерия Колмогорова $K_n = K_n(X_1, \dots, X_n)$ обозначим $\alpha(K_n)$ его вероятность ошибки первого рода и $\beta(K_n, F)$ – его вероятность ошибки второго рода при альтернативе $F \in \Im$.

Для множеств альтернатив $\Upsilon_n \subset \Im$ обозначим

$$\beta(K_n, \Upsilon_n) = \sup_{F \in \Upsilon_n} \beta(K_n, F).$$

Скажем, что последовательность множеств альтернатив Υ_n равномерно состоятельна для вероятности ошибки первого рода α, $0<\alpha<1$, если для критериев Колмогорова K_n, $\alpha(K_n) = \alpha + o(1)$ при $n \to \infty$, имеет место

$$\limsup_{n\to\infty} \beta(K_n, \Upsilon_n) < 1 - \alpha.$$

В дальнейшем, мы будем называть такие последовательности множеств альтернатив α-равномерно состоятельными.

Если последовательность множеств альтернатив Υ_n α-равномерно состоятельна при любом α, $0 < \alpha < 1$, то скажем, что последовательность множеств альтернатив Υ_n равномерно состоятельна.

Для задачи проверки гипотезы (1.4) о плотности распределения против альтернатив (1.5) мы будем также использовать обозначение $\beta(K_n, f_n)$ для вероятности ошибки второго рода при альтернативе f_n.

Скажем, что последовательность простых альтернатив f_n является α-состоятельной, $0 < \alpha < 1$, если для критериев K_n, $\alpha(K_n) = \alpha + o(1)$ при $n \to \infty$, имеет место

$$\limsup_{n\to\infty} \beta(K_n, f_n) < 1 - \alpha.$$

Если последовательность альтернатив f_n α-состоятельна для всех $0 < \alpha < 1$, то скажем что она состоятельна. Если последовательность альтернатив f_n не является α-состоятельной для всех α, $0 < \alpha < 1$, то скажем, что она несостоятельна.

Для случая последовательности простых альтернатив $F_n \in \Im$ мы будем использовать такую же терминологию.

2.2. Определение наибольшего множества. В этом разделе мы рассматриваем задачу проверки гипотезы (1.4) о плотности распределения против альтернатив (1.5).

Одно из требований, которое постоянно возникает в доказательствах, – это требование, чтобы рассматриваемые функции являлись плотностями распределения. Для его выполнения введем следующее условие.

A. Для последовательности функций $f_n = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{2^j} \theta_{nji}\phi_{ji}$ найдется такое l_0, что для любого $l > l_0$ функции

$$1 + \sum_{j=1}^{l} \sum_{j=1}^{2^j} \theta_{nji}\,\phi_{ji}, \qquad 1 + \sum_{j=l}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^j} \theta_{nji}\,\phi_{ji}$$

являются плотностями распределения.

Если $f_n = f$ для всех n, то скажем, что функция f удовлетворяет условию **A**.

Пусть Ξ, $\Xi \subset \mathbb{L}_\infty(0,1)$, – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_\Xi$. Обозначим $U = \{\, f : \|f\|_\Xi \leqslant r,\ f \in \Xi \,\}$ шар в Ξ радиуса $r > 0$.

Определение наибольших множеств U и наибольшего пространства Ξ аналогично определению, данному в [6]. Отличия вызваны переходом от $\mathbb{L}_2$-нормы к $\mathbb{L}_\infty$-норме.

Зададим подпространства Π_k, $1 \leqslant k < \infty$, по индукции.

Положим $d_1 = \max\{\, \|f\|_\infty,\ f \in U \,\}$ и возьмем в качестве e_1 функцию $e_1 \in U$, такую что $\|e_1\|_\infty = d_1$. Обозначим Π_1 линейное подпространство, порожденное e_1.

Для $i = 2, 3, \ldots$ обозначим $d_i = \max\{\rho(f, \Pi_{i-1}),\ f \in U\,\}$, где

$$\rho(f, \Pi_{i-1}) = \min\{\, \|\, f - g\|_\infty,\ g \in \Pi_{i-1}\}.$$

Возьмем в качестве e_i такую функцию, что $e_i \in U$ и $\rho(e_i, \Pi_{i-1}) = d_i$. Обозначим Π_i линейное подпространство, порожденное функциями $e_1, \ldots, e_i$.

Для любой функции $f \in \mathbb{L}_\infty(0,1)$ обозначим

$$d_i(f) = \inf\{\|f - g\|_\infty,\ g \in \Pi_i\}.$$

Обозначим f_{Π_i} функцию $g \in \Pi_i$, для которой $\|\, f - g\,\|_\infty = d_i(f)$. Положим $\tilde f_i = f - f_{\Pi_i}$.

Шары U являются *наибольшими множествами* для тестовой статистики T критерия Колмогорова и функциональное пространство Ξ является *наибольшим пространством*, если выполнены следующие два утверждения:

i. любая подпоследовательность альтернатив $f_{n_j} \in U$, $\|f_{n_j}\|_\infty \asymp n_j^{-r}$, $n_j \to \infty$ при $j \to \infty$, является состоятельной.

ii. для любого $f \in \mathbb{L}_\infty(0,1)$, $f \notin \Xi$, удовлетворяющего условию **A**, найдутся последовательности i_n, j_{i_n}, $i_n \to \infty$, $j_{i_n} \to \infty$ при $n \to \infty$, такие что $cj_{i_n}^{-r} < \|\tilde f_{i_n}\|_\infty < Cj_{i_n}^{-r}$ и подпоследовательность альтернатив $\tilde f_{i_n}$ несостоятельна для подпоследовательности выборок $X_1, \dots, X_{j_{i_n}}$.

§3. Равномерная состоятельность множеств альтернатив, заданных в терминах функций распределения

Теорема 3.1. *Для любого $a > 0$ существует такое $\alpha_0 = \alpha(a)$, $0 < \alpha_0 < 1$, что множества альтернатив $\Theta_n(0,1,a)$ – α-равномерно состоятельны для $\alpha_0 < \alpha < 1$.*

Теорема 3.2. *Последовательность альтернатив $F_n \in \Im$ несостоятельна, если и только если*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, T(F_n) = 0.$$

Теоремы 3.1 и 3.2 являются следствием неравенства Дворецкого–Кифера–Вольфовица (см. (14.7), гл. 14.2 [14], а также [3, 7, 16]) и их доказательство опускается. Теорема 3.2 приведена в [14], гл 14.2, теорема 14.2.3, и в [7].

Зафиксируем $a > 0$. Для каждого $s \in (0,1)$ определим функцию $h_s(t) = a\,t/s$ для $t \in (0,s]$ и $h_s(t) = \frac{1-t}{1-s}\,a$ для $t \in (s,1)$.

Для $s \in (0,1)$ и $\lambda \in \mathbb{R}^1$ обозначим

$$I(s,\lambda,a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(1-s)}} \int_{-\lambda}^{\lambda} \exp\Big\{\frac{-(y-a)^2}{2s(1-s)}\Big\}\, f(s,\lambda,y)\, f(1-s,\lambda,y)\, dy,$$

где

$$\begin{aligned} f(s,\lambda,y) = 1 - 2\sum_{m=1}^{\infty}\Big[&\exp\{-2\,(2m-1)^2 s^{-1}\lambda^2\} \\ &\times \big(\exp\{(2m-1)\lambda s^{-1}\,y\} - \exp\{-(2m-1)\lambda s^{-1} y\}\big) \\ &- \exp\{-8m^2\lambda^2 s^{-1}\}\,\big(\exp\{2m\lambda s^{-1}\,y\} - \exp\{-2m\lambda s^{-1} y\}\big)\Big]. \end{aligned}$$

Обозначим $b(t)$, $t \in [0,1)$, броуновский мост.

Теорема 3.3. *Для любого $a > 0$ и любых e, d, $0 < e < d < 1$, последовательность множеств альтернатив $\Upsilon_n(e, d, a)$ равномерно состоятельна.*

Для любого α, $\alpha(K_n) = \alpha(1 + o(1))$, $0 < \alpha < 1$, имеет место

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \beta(K_n, \Upsilon_n(e, d, \lambda)) &= \sup_{e<s<d} \mathbf{P}(\max_{t\in(0,1)} |b(t) + h_s(t)| < \lambda) \\ &= \sup_{e<s<d} I(s, \lambda, a), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\lambda = \lambda_\alpha$ задается уравнением $\mathbf{P}\left(\max_{t\in(0,1)} |\, b(t)\,| > \lambda_\alpha\right) = \alpha$.

Пусть для последовательности альтернатив $F_n \in \Im$ имеет место $\sqrt{n}\, T(F_n) \asymp 1$ и в то же время существуют такие последовательности $e_{1n} > 0$, $e_{1n} \to 0$ и $e_{2n} < 1$, $e_{2n} \to 1$, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \max_{e_{1n}<x<e_{2n}} |\, F_n(x) - F_0(x)\,| = 0.$$

Тогда в силу неравенства Дворецкого–Кифера–Вольфовица (см. (14.7), гл.14.2 [14]) найдется такое α_0, $0 < \alpha_0 < 1$, что для критериев Колмогорова K_n, $\alpha(K_n) > \alpha_0$, $n > n_0(\alpha_0)$, имеет место

$$\limsup_{n\to\infty} \beta(K_n, F_n) < 1 - \alpha.$$

В то же время, как показывает пример Massey (см. [16], а также гл. 14 [14]), найдется такое α_1, $0 < \alpha_1 < 1$, что для критериев Колмогорова K_n, $\alpha(K_n) < \alpha_1$, $n > n_0(\alpha_0)$, имеет место

$$\limsup_{n\to\infty} \beta(K_n, F_n) = 1 - \alpha.$$

Для $s \in (0, 1)$, применяя асимптотику нормального распределения на хвостах, получаем

$$I(s, \lambda, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(1-s)(a-\lambda)}} \exp\Big\{-\frac{(a-\lambda)^2}{2s(1-s)}\Big\} (1 + o(1)),$$

если $a - \lambda \to \infty$ и $\lambda \to \infty$.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \beta(K_n, \Upsilon_n(e, d, \lambda)) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,(a-\lambda_\alpha)} \exp\{-2(a-\lambda_\alpha)^2\} (1 + o(1)),$$

если $a - \lambda_\alpha \to \infty$ и $\alpha \to 0$.

Рассуждая аналогично, получаем

$$I(s, \lambda, a) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi s(1-s)}(\lambda-a)} \exp\Big\{-\frac{(\lambda-a)^2}{2s(1-s)}\Big\} (1 + o(1)),$$

если $\lambda - a \to \infty$ и $a \to \infty$.

Пусть $0 < e < 1-d$. Тогда асимптотика $\beta(K_n, \Upsilon_n(e,d,\lambda))$ следующая

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi s(1-s)}(\lambda - a)}\ \exp\Big\{-\frac{(\lambda_\alpha - a)^2}{2s(1-s)}\Big\}\,(1+o(1)),$$

если $\lambda_\alpha - a \to \infty$, $a \to \infty$ и $\alpha \to 0$.

Теорема 3.4. *Для тестовой статистики $T_m(\hat{F}_n)$ выполнено следующее:*

i. *для любого $a > 0$ существует такое $\alpha_0 = \alpha_0(a)$, $0 < \alpha_0 < 1$, что множества альтернатив*

$$\Lambda_n(0,1,a) = \{F : n^{1/2}\, T_m(F) > a,\ F \in \Im\},$$

α-равномерно состоятельны для $\alpha_0 < \alpha < 1$.

ii. *последовательность альтернатив $F_n \in \Im$ несостоятельна, если и только если*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, T(F_n) = 0.$$

Обозначим L_n критерии, порожденные статистикой $T_m(\hat{F}_n)$.

Для $s \in (0,1)$ и $\lambda > 0$ обозначим

$$I(s,\lambda,a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(1-s)}} \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \exp\Big\{\frac{-(y-a)^2}{2s(1-s)}\Big\}\, g(s,\lambda,y)\, g(1-s,\lambda,y)\, d\, y,$$

где

$$g(s,\lambda,y) = 1 - \exp\Big\{-2\frac{\lambda^2 - \lambda y}{s}\Big\}.$$

Теорема 3.5. *Для любого $a > 0$ и любых e, d, $0 < e < d < 1$, последовательность множеств альтернатив $\Omega_n(e,d,a)$ равномерно состоятельна.*

Для любого α, $\alpha(K_n) = \alpha(1 + o(1))$, $0 < \alpha < 1$, имеет место

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \beta(L_n, \Omega_n(e,d,\lambda)) = \sup_{e<s<d} \mathbf{P}\big(\max_{t\in(0,1)} (b(t) + h_s(t)) < \lambda\big) \\ &= \sup_{e<s<d} J(s,\lambda,a), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\lambda = \lambda_\alpha$ задается уравнением $\exp\{-2\lambda_\alpha^2\} = \alpha$.

Доказательство теоремы 3.5 аналогично доказательству теоремы 3.3. Во всех рассуждениях мы просто убираем модуль и, используя упражнение 16, с. 37 в [19], вместо (6.10) получаем:

$$\mathbf{P}\left(\max_{t\in(0,s)}\left(b(t)+a\,\frac{t}{s}\right)<\lambda\,\Big|\,b(s)=y\right)$$
$$=\mathbf{P}\,(\max_{t\in(0,1)}(\sqrt{s}\,b(t)+(y+a)\,t\,)<\lambda)=g(s,\lambda,y\,+\,a),$$

что и приводит к данному результату.

Следующая теорема является вариантом теоремы 3 в работе Чибисова [25] (см. также теорему 1, гл. 4.2 [19]). Доказательство ее аналогично доказательству теоремы 1, гл. 4.2 [19] и опускается.

Теорема 3.6. *Пусть $F_n(t)$, $t\in[0,1]$, – последовательность альтернатив, такая что $\sqrt{n}\,T(F_n)<C$. Пусть функции F_n непрерывны и строго монотонны. Тогда существует вероятностное пространство, такое что на этом вероятностном пространстве для независимых случайных величин $X_1,\dots,X_n$, имеющих функцию распределения F_n, и броуновских мостов $U_n(t)$, $t\in[0,1]$, при любом $\delta>0$ имеет место*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\,(\sup_{t\in[0,1]}|\sqrt{n}\,(\hat{F}_n(t)\,-\,F_n(t))-\,U_n(t)\,|>\delta)=\,0. \qquad (3.3)$$

§4. Состоятельность последовательностей альтернатив, заданных в терминах плотностей распределения, $0<r<\,1/2$

Мы рассматриваем задачу проверки гипотезы (1.4) о плотности распределения против последовательности простых альтернатив (1.5).

Обозначим $k_n=[(1/2-\,r)\,\log n]$.

Введем условие

G. Для любого $\varepsilon>0$ найдется такое целое c_ε, что для всех $n>n_0(\varepsilon,c_\varepsilon)$ и $l<k_n-\,c_\varepsilon$ имеет место

$$n^{1/2}\,T(F_{nl})<\,\varepsilon,$$

где

$$F_{nl}(x)=\,x+\sum_{j=1}^{l}2^{-j}\,\sum_{i=1}^{2^j}\theta_{nji}\,\psi_{ji}(x),\quad x\in\,[0,1].$$

Здесь $\psi_{ji}(x) = \int\limits_0^x \phi_{ji}(t)\,d\,t$, $x \in (0,1)$.

Если $\mathbf{G}$ не выполняется, то состоятельность критериев Колмогорова имеет место при более быстрой сходимости последовательности альтернатив к гипотезе.

Теорема 4.1. *Пусть имеет место* $\mathbf{G}$. *Существует* α_0, $0 < \alpha_0 < 1$, *такая что последовательность альтернатив*

$$f_n = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^j} \theta_{nji}\,\phi_{ji}, \quad \|f_n\|_\infty \asymp n^{-r},$$

α*-состоятельна,* $\alpha_0 < \alpha < 1$, *если и только если найдутся такие последовательности* j_n, $j_n - k_n = O(1)$ *и* i_n, $1 \leqslant i_n \leqslant 2^{j_n}$, *что* $|\theta_{nj_ni_n}| > c\,n^{-1/4-r/2}$.

При этом последовательность альтернатив f_n *состоятельна, если и только если найдутся такие* e_1, e_2, $0 < e_1 < e_2 < 1$, *что* $e_1 < i_n\,2^{-j_n} < e_2$ *для всех* $n > n_0(e_1, e_2)$.

Теорема 4.2. *Пусть имеет место* $\mathbf{G}$. *Последовательность альтернатив* $f_n = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{2^j} \theta_{nji}\,\phi_{ji}$, $\|f_n\|_\infty \asymp n^{-r}$, *несостоятельна, если и только если существует последовательность* j_n, $j_n - k_n \to \infty$, *такая что* $|\theta_{nj_ni_n}| = o(n^{-1/4-r/2})$ *для любых последовательностей* $l_n \leqslant j_n$ *и* $1 \leqslant i_n \leqslant 2^{l_n}$.

Теорема 4.2 вытекает из теоремы 4.1.

Теорема 4.3. *Для критериев Колмогорова тела* $\mathbb{B}^s_{\infty,\infty}(P_0)$, $s = \frac{2r}{1-2r}$, $P_0 > 0$, *в пространстве Бесова* $\mathbb{B}^s_{\infty,\infty}$ *являются наибольшими множествами.*

Скажем, что две функции

$$f_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^j} \theta_{1ji}\,\phi_{ji} \quad \text{и} \quad f_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^k} \theta_{2ji}\,\phi_{ji}$$

имеют одинаковую ориентацию, если $\theta_{1ji}\,\theta_{2ji} \geqslant 0$ для всех $1 \leqslant j < \infty$ и $1 \leqslant i \leqslant 2^j$.

Теорема 4.4. *Пусть выполнено условие* $\mathbf{G}$. *Тогда последовательность альтернатив* α*-состоятельна при некотором* $0 < \alpha < 1$, *если* *и только если найдется наибольшее множество $\mathbb{B}^s_{\infty,\infty}(P_0)$ и последовательность функций $f_{1n} \in \mathbb{B}^s_{\infty,\infty}(P_0)$, $\|f_{1n}\|_\infty \asymp n^{-r}$, такие что функции f_n, f_{1n} и $f_n - f_{1n}$ имеют одинаковую ориентацию.*

Пусть мы имеем две последовательности функций $f_{1n} \in \mathbb{B}^s_{\infty,\infty}(P_0)$, $\|f_{1n}\|_\infty \asymp n^{-r}$, и f_{2n}, $\|f_{2n}\|_\infty \asymp n^{-r}$, такие что f_{1n}, f_{2n} имеют одинаковую ориентацию для всех $n > n_0 > 0$ и удовлетворяют условию $\mathbf{G}$. Тогда, если $1 + f_{1n}$ и $1 + f_{2n}$ являются плотностями распределения, то по теореме 4.4 найдется α, $0 < \alpha < 1$, такое что последовательность альтернатив $(f_{1n} + f_{2n})/2$ является α-состоятельной.

Теорема 4.5. *Пусть последовательность альтернатив f_n, $cn^{-r} < \|f_n\|_\infty < Cn^{-r}$, α-состоятельна для некоторого $0 < \alpha < 1$. Пусть выполнены условия $\mathbf{A}$ и $\mathbf{G}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется наибольшее множество $\mathbb{B}^s_{\infty,\infty}(P_0)$ и последовательность $f_{1n} \in \mathbb{B}^s_{\infty,\infty}(P_0)$, $\|f_{1n}\|_\infty \asymp n^{-r}$, такие что*

i. *функции f_n, f_{1n} и $f_n - f_{1n}$ имеют одинаковую ориентацию,*

ii. *для критериев Колмогорова K_n, $\alpha(K_n) = \alpha + o(1)$, найдется $n_0(\varepsilon)$, такое что имеет место:*

$$|\,\beta(K_n, f_n) - \beta(K_n, f_{1n})\,| < \varepsilon, \tag{4.1}$$

$$\beta(K_n, f_n - f_{1n}) < \varepsilon \tag{4.2}$$

для всех $n > n_0(\varepsilon)$.

Теорема 4.6. *Пусть последовательность альтернатив F_n состоятельна и последовательность альтернатив F_{1n} несостоятельна. Пусть функции F_n и F_{1n} непрерывны и строго монотонны. Пусть функции $F_n + F_{1n} - F_0$ являются функциями распределения. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} |\,\beta(K_n, F_n) - \beta(K_n, F_n + F_{1n} - F_0)\,| = 0, \tag{4.3}$$

где $\alpha(K_n) = \alpha + o(1)$, $0 < \alpha < 1$.

Скажем, что α-состоятельная последовательность альтернатив

$$f_n = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^j} \theta_{nji}\, \phi_{ji}, cn^{-r} < \|f_n\|_\infty < Cn^{-r},$$

чисто α-состоятельна, если не существует несостоятельной подпоследовательности $f_{1n_t} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{2^j} \theta_{1n_tji}\, \phi_{ji}$, $\|f_{1n_t}\|_\infty \asymp n_t^{-r}$, такой что

$(\theta_{n_tji} - \theta_{1n_tji})\,\theta_{n_tji} > 0$, если $|\theta_{n_tji}| > 0$ и $\theta_{1n_tji} = 0$, если $\theta_{n_tji} = 0$ для всех $1 \leqslant j < \infty$ и $1 \leqslant i \leqslant 2^j$.

Теорема 4.7. *Пусть выполнено условие* **G**. *Последовательность альтернатив f_n, $c\,n^{-r} \leqslant \|f_n\|_\infty \leqslant C\,n^{-r}$, чисто α-состоятельна при некотором $0 < \alpha < 1$, если и только если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $C_1 = C_1(\varepsilon)$, что имеет место*

$$\sup_{|j| > k_n + c_1}\ \sup_{1 \leqslant i \leqslant 2^j} 2^{j/2}\, n^r\, |\theta_{nji}| \leqslant \varepsilon\, n^{-r}$$

для всех $n > n_0(\varepsilon)$.

Теорема 4.8. *Пусть выполнены условия* **A** *и* **G**. *Последовательность f_n, $c\,n^{-r} \leqslant \|f_n\|_\infty \leqslant C\,n^{-r}$, чисто α-состоятельна, если и только если для любого $\varepsilon > 0$ найдется наибольшее множество $\mathbb{B}^s_{2\infty}(P_0)$ и последовательность функций $f_{1n} \in \mathbb{B}^s_{2\infty}(P_0)$ такие, что функции f_n, f_{1n}, $f_n - f_{1n}$ имеют одну общую ориентацию и $\|f_n - f_{1n}\|_\infty \leqslant \varepsilon\, n^{-r}$.*

§5. Состоятельность альтернатив, сближающихся с гипотезой со скоростью $n^{-1/2}$

Цель данного раздела – указать для задачи проверки гипотезы (1.4) и (1.5) необходимые и достаточные условия состоятельности последовательности альтернатив f_n, если $r = \frac{1}{2}$.

Теорема 5.1. *Последовательность альтернатив*

$$f_n = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^j} \theta_{nji}\phi_{ji}, \quad \|f_n\|_\infty \asymp n^{-1/2}$$

α-состоятельна, $\alpha_0 < \alpha < 1$, если и только если найдутся такие C, c, а также последовательности $j_n \leqslant C$ и i_n, $1 \leqslant i_n \leqslant 2^{j_n}$, что $n^{1/2}\,|\theta_{nj_ni_n}| > c$.

При этом последовательность альтернатив f_n состоятельна, если и только если найдутся такие e_1, e_2, $0 < e_1 < e_2 < 1$, что $e_1 < i_n\, 2^{-j_n} < e_2$ для всех $n > n_0(e_1, e_2)$.

Таким образом, вопрос состоятельности при скорости $n^{-1/2}$ приближения альтернатив к гипотезе сводится к вопросу существования некоторой конечнопараметрической постановки задачи проверки гипотез, множеству альтернатив которой принадлежит наиболее информативная часть ортогонального разложения функций данной последовательности альтернатив f_n.

Доказательство теоремы 5.1 аналогично доказательству теоремы 4.1 и опускается.

В качестве аналога наибольшего пространства функций в предыдущей постановке задачи здесь выступает линейное пространство

$$\Xi = \Big\{ f : f = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{2^j} \theta_{ji}\, \phi_{ji},\, \theta_{ji} \in \mathbb{R}^1,\, m = 1, 2, \dots \Big\}.$$

В качестве аналога наибольших множеств берутся множества

$$U(m, P_0) = \Big\{ f : f = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{2^j} \theta_{ji}\, \phi_{ji},\, \|f\|_\infty < P_0,\, \theta_{ji} \in \mathbb{R}^1 \Big\}.$$

Следующая теорема 5.2 является аналогом теоремы 4.3.

Теорема 5.2. *Пусть $f_n \in U(m, P_0)$ при некоторых m и $P_0 > 0$ и $\|f_n\|_\infty \asymp n^{-1/2}$. Тогда последовательность альтернатив f_n состоятельна.*

Пусть $f = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^j} \theta_{ji}\, \phi_{ji} \notin \Xi$ и f удовлетворяет условию **A**. *Тогда найдутся подпоследовательности $m_n \to \infty$ и $l_{m_n} \to \infty$ при $n \to \infty$, такие что для функций $f_{l_{m_n}} = \sum_{j=m_n}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^j} \theta_{ji}\, \phi_{ji}$ имеет место $\|f_{l_{m_n}}\|_\infty \asymp l_{m_n}^{-1/2}$ при $n \to \infty$ и подпоследовательность альтернатив $f_{l_{m_n}}$ несостоятельна для подпоследовательности выборок $X_1, \dots, X_{l_{m_n}}$.*

Теорема 5.3. *Пусть $r = 1/2$. Тогда справедливы утверждения теорем 4.4 и 4.5 без требования выполнения условия* **G**, *если заменить наибольшие множества $\mathbb{B}^s_{\infty,\infty}(P_0)$ на множества $U(m, P_0)$.*

Доказательство теоремы 5.3 аналогично доказательству теорем 4.4 и 4.5 и опускается.

§6. Приложение

6.1. Доказательство теоремы 3.3. Доказательство начнем со вспомогательной теоремы 6.1.

Пусть ξ – гауссовский случайный вектор в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, $\mathbf{E}[\xi] = 0$ и R – ковариационный оператор ξ. Предположим, что оператор R имеет нулевое ядро.

Для векторов $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{H}$, обозначим $\langle \boldsymbol{u}\,, \boldsymbol{v} \rangle$ их скалярное произведение в $\mathbb{H}$ и обозначим $\|\boldsymbol{u}\|$ норму $\boldsymbol{u} \in \mathbb{H}$.

Скажем, что множество $V \subset \mathbb{H}$ центрально-симметрично, если $\boldsymbol{u} \in V$ означает $-\boldsymbol{u} \in V$.

Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots$ – ортогональный базис в $\mathbb{H}$, порожденный собственными векторами оператора R, то есть $R\boldsymbol{e}_i = \lambda_i\, \boldsymbol{e}_i$, $\lambda_i \geqslant \lambda_{i+1}$, $1 \leqslant i < \infty$. Положим $\xi_i = \langle \xi, \boldsymbol{e}_i \rangle$.

Теорема 6.1. *Пусть U – центрально-симметричное ограниченное множество в $\mathbb{H}$. Пусть вектор $\boldsymbol{v} \in \mathbb{H}$ является допустимым сдвигом. Иначе говоря, найдется вектор $\boldsymbol{u} \in \mathbb{H}$, такой что $\boldsymbol{v} = R^{1/2}\boldsymbol{u}$. Пусть $0 < \mathbf{P}(\xi \in U) < 1$. Тогда справедливо следующее:*

i. Функция $q(b) = \mathbf{P}\,(\xi \in b\,\boldsymbol{v} + U\,)$ – убывающая функция b, $b > 0$.

ii. Пусть $\boldsymbol{v}_1 \in \mathbb{H}$ и существует $\boldsymbol{u}_1 \in \mathbb{H}$, такой что $\boldsymbol{v}_1 = R^{1/2}\boldsymbol{u}_1$ и $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1 \rangle \geqslant 0$. Тогда

$$\mathbf{P}\,(\xi \in b\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_1 + U\,) \leqslant \mathbf{P}\,(\eta \in b\,\boldsymbol{v} + U\,). \tag{6.1}$$

Доказательство. Докажем пункт *i*. Без потери общности мы можем предположить, что $\lambda_1 = 1$.

Предположим, что $\boldsymbol{v}$ не является конечной линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{e}_i$, $1 \leqslant i < \infty$. Иначе доказательство будет отличаться незначительным изменением индексов. Предположим для простоты обозначений, что $\|\boldsymbol{u}\| = 1$ и $\langle \boldsymbol{u}\,, \boldsymbol{e}_1 \rangle \neq 0$. Отметим, что вектор $\boldsymbol{e}_1$ может быть заменен в рассуждениях любым вектором $\boldsymbol{e}_i$, таким что $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_i \rangle \neq 0$.

Обозначим Γ_1 линейное подпространство, порожденное вектором $\boldsymbol{u}$.

Для i, $2 \leqslant i < \infty$, обозначим Γ_i линейное подпространство, порожденное векторами $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_i$. Пусть $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \dots$ – ортонормированные векторы в $\mathbb{H}$, такие что $\boldsymbol{t}_1, \dots, \boldsymbol{t}_i$ является базисом в Γ_i, $1 \leqslant i < \infty$, и $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{t}_1$.

Пусть $\boldsymbol{u} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} u_j\, \boldsymbol{e}_j$.

Обозначим $\boldsymbol{s}_j = \boldsymbol{e}_j - u_j\, \boldsymbol{u}$, $1 \leqslant j \leqslant \infty$. Вектор $\boldsymbol{u}$ ортогонален каждому $\boldsymbol{s}_j$, $1 \leqslant j \leqslant \infty$.

Определим линейный оператор $S : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, такой что $S\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$, $S\,\boldsymbol{s}_j = \boldsymbol{t}_j$, $2 \leqslant j < \infty$.

По (2.11) и (2.13) в [23], имеем $\boldsymbol{t}_2 = (1 - u_2^2)^{-1/2}\boldsymbol{s}_2$ и

$$\boldsymbol{t}_i = \Big(\frac{r_i}{r_{i-1}}\Big)^{1/2} \Big[\boldsymbol{s}_i + u_i r_{i-1}^{-1} \sum_{j=2}^{i-1} u_j\, \boldsymbol{s}_j\Big],$$

где $r_{i-1} = 1 - \sum\limits_{j=2}^{i-1} u_j^2$, $3 \leqslant i < \infty$.

Обозначим $\zeta_1 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1/2} u_i \, \xi_i$ и положим $\zeta_{i+1} = \lambda_i^{-1/2} \xi_i - u_i \, \zeta_1$, $i = 1, 2, \ldots$.

Так как $\mathbf{E}\, \zeta_1^2 = 1$, то $\mathbf{E}\, \zeta_{i+1}^2 < \infty$ для $i = 1, 2, \ldots$.

Следовательно, мы можем определить независимые гауссовские случайные величины

$$\omega_i = \Big(\frac{r_i}{r_{i-1}}\Big)^{1/2} \Big[\zeta_i + u_i \, r_i^{-1} \sum_{j=2}^{i-1} u_j \, \zeta_j\Big]$$

для $i = 3, 4, \ldots$. Обозначим $\omega_1 = \zeta_1$ и $\omega_2 = \zeta_2$.

Определим линейный оператор $G : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ следующим соотношением $G\boldsymbol{w} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{1/2} \, w_i \, t_i$ для всех $\boldsymbol{w} = \{w_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{H}$.

Определим линейный оператор $A : \mathbb{H}_0 \to \mathbb{H}$, такой что $A\boldsymbol{w} = GSR^{-1/2}\boldsymbol{w}$ для всех $\boldsymbol{w} \in \Gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Здесь $\mathbb{H}_0 = R^{1/2} \, \mathbb{H}$.

Обозначим $\eta = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{1/2} \omega_i \, \boldsymbol{t}_i$.

Зададим множество $V = A\,(U \cap \mathbb{H}_0)$.

Имеем

$$g(b) \, = \, \mathbf{P}\,(\eta \in b\,\boldsymbol{t}_1 + V).$$

Обозначим Λ подпространство, ортогональное $\boldsymbol{t}_1$. Обозначим W проекцию V на Λ.

Для каждого $\boldsymbol{w} \in W$ зададим множество $D(\boldsymbol{w}) = \{\boldsymbol{s} : \boldsymbol{s} = a\,\boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{w}, \, \boldsymbol{s} \in V, a \in \mathbb{R}^1\}$.

Для каждого $\boldsymbol{w} \in W$ обозначим $a(\boldsymbol{w}) = \sup\{a : a\,\boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{w} \in D(\boldsymbol{w}), \, a \in \mathbb{R}^1\}$ и $a_1(\boldsymbol{w}) = \inf\{a : a\,\boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{w} \in D(\boldsymbol{w}), \, a \in \mathbb{R}^1\}$.

Обозначим μ_0 гауссовскую меру случайного вектора $\zeta = \sum\limits_{i=2}^{\infty} \eta_i \boldsymbol{t}_i$, принимающего значения в Λ.

Тогда для любого $\delta > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\,(\eta \in (b+\delta)\,\boldsymbol{t}_1 + V\,) - \mathbf{P}\,(\eta \in b\,\boldsymbol{t}_1 + V\,) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_W d\,\mu_0(\boldsymbol{w}) \Big(\int\limits_{b+a(\boldsymbol{w})}^{b+a(\boldsymbol{w})+\delta} \exp\{-t^2/2\}\,d\,t \\
&\quad - \int\limits_{b+a_1(\boldsymbol{w})}^{b+a_1(\boldsymbol{w})+\delta} \exp\{-t^2/2\}\,d\,t \Big) \doteq J.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Так как множество V центрально-симметрично, то $a(\boldsymbol{w}) = -a_1(-\boldsymbol{w})$ для всех $\boldsymbol{w} \in W$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_W d\,\mu_0(\boldsymbol{w}) \Big(\int\limits_{b+a(\boldsymbol{w})}^{b+a(\boldsymbol{w})+\delta} \exp\{-t^2/2\}\,d\,t \\
&\quad - \int\limits_{b-a(\boldsymbol{w})}^{b-a(\boldsymbol{w})+\delta} \exp\{\,-t^2/2\,\}\,d\,t \Big) \leqslant 0.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Докажем пункт *ii.* Мы можем записать $v_1 = a\,\boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{w}$, где $a \geqslant 0$ и $\boldsymbol{w}$ ортогонально $\boldsymbol{t}_1$. Тогда, в силу *i*, достаточно доказать *ii* только для $a = 0$. После замены случайной величины ξ на $\eta = A\xi$ (6.1) примет следующий вид

$$\mathbf{P}\,(\,\eta \in b\boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{u}_1 + V) \leqslant \mathbf{P}\,(\,\eta \in b\boldsymbol{t}_1 + V\,), \tag{6.4}$$

где $\boldsymbol{u}_1 = A\,\boldsymbol{v}_1$ ортогонально $\boldsymbol{t}_1$.

Для каждого $a \in \mathbb{R}^1$ обозначим $V(a) = \{\boldsymbol{w} : \boldsymbol{w} = \boldsymbol{s} - a\,\boldsymbol{t}_1 : < t_1, \boldsymbol{s} >= a, \boldsymbol{s} \in V\}$. Заметим, что множество $V(a)$ выпукло и центрально-симметрично.

Обозначим $r = \sup\{< \boldsymbol{w}, t_1 >: \boldsymbol{w} \in V\}$.

Имеем

$$\mathbf{P}\,(\eta \in b\,\boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{u}_1 + V\,) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-r}^{r} \exp\{-(s-b)^2/2\}\,d\,s \int\limits_{V(s)+\boldsymbol{u}_1} d\,\mu_0 \tag{6.5}$$

и

$$\mathbf{P}\,(\eta \in\, b\,\boldsymbol{t}_1 + V\,) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-r}^{r} \exp\{-(s-b)^2/2\}\, d\,s \int\limits_{V(s)} d\,\mu_0. \qquad (6.6)$$

По теореме Андерсона [1] получаем

$$\int\limits_{V(s)+\boldsymbol{u}_1} d\,\mu_0 \leqslant \int\limits_{V(s)} d\,\mu_0.$$

Отсюда, по (6.5) и (6.6) получаем (6.1). □

Лемма 6.1. *Пусть дана функция* $G\,:\,[0,1] \to \mathbb{R}^1$, *такая что* $\frac{dG(t)}{dt} \in \mathbb{L}_2(0,1)$. *Пусть найдутся константы* a *и* e, d, $0 < e < d < 1$ *и точка* $s \in\, (e,d)$, *такие что* $G(s) \,\geqslant\, a$. *Тогда для любого* $\lambda \,>\, 0$ *найдется такая константа* c_1, *зависящая только от постоянных* a, e, d, *что*

$$\mathbf{P}\,(\max_{t\in(0,1)} |b(t)| <\, \lambda\,) > \mathbf{P}\,(\max_{t\in(0,1)} |b(t)\,+\,G(t)| <\, \lambda\,) \,+\, c_1, \qquad (6.7)$$

где $b(t)$ *– броуновский мост.*

Доказательство. Предположим, что $G(s) \,\geqslant\, a$. Функция $h_s(t)$ является допустимым сдвигом для броуновского моста и

$$\int\limits_0^1 \Big(\frac{dG(t)}{dt} \,-\, \frac{dh_s(t)}{dt}\Big)\,\frac{dh_s(t)}{dt}\,d\,t \,\geqslant\, 0.$$

Следовательно, по теореме 6.1, пункт *ii*, имеем

$$\mathbf{P}\,(\max_{t\in(0,1)} |b(t)\,+\,G(t)| <\, \lambda\,) \,\leqslant\, \mathbf{P}\,(\max_{t\in(0,1)} |b(t)\,+\,h_s(t)| <\, \lambda\,). \qquad (6.8)$$

Покажем, что

$$q(s) = \mathbf{P}\,(\max_{t\in(0,1)} |b(t)\,+\,h_s(t)| \,<\, \lambda\,) \,-\, \mathbf{P}\,(\max_{t\in(0,1)} |b(t)| < \lambda\,)$$

является непрерывной функцией $s \in\, (e,d)$.

Так как броуновский мост является марковским процессом, то

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\,(\max_{t\in(0,1)} |b(t)\,+\,h_s(t)| < \lambda\,)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi s(1-s)}}\int\limits_{-\lambda-a}^{\lambda-a} \exp\Bigl\{-\frac{y^2}{2s(1-s)}\Bigr\}\mathbf{P}\Bigl(\max_{t\in(0,s)}\Bigl|b(t)+\frac{at}{s}\Bigr| < \lambda|b(s)=y\Bigr)\\
&\quad\times\mathbf{P}\Bigl(\max_{t\in(s,1)} |b(t)+a\frac{1-t}{1-s}| < \lambda\,|\,b(s)=y\Bigr)\,d\,y \doteq I(s).
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

Условное распределение броуновского моста $b(t)$ на интервале $(0,s)$ при условии $b(s)=y$ совпадает с распределением $\sqrt{s}b(t/s)+y\,t/s$ (см. [8], с. 220). Из аналитической формулы для $\mathbf{P}\,(-c_2\,t-c_3 < b(t) < c_2\,t+c_3,\ t\in(0,1)\,)$ (см. [8], задача 15, с. 246), следует непрерывность $\mathbb{P}\,(\max_{t\in(0,s)} |b(t)+a\,t/s| < \lambda\,|\,b(s)=y)$. Те же самые рассуждения применимы для второй вероятности под знаком интеграла. Отсюда следует непрерывность функции $q(s)$.

Используя утверждение задачи 15, с. 246 в [8], получаем

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\,\left(\max_{t\in(0,s)}\left|b(t)+a\,\frac{t}{s}\right| < \lambda\,|\,b(s)=y\right)\\
&=\mathbf{P}\,(\max_{t\in(0,1)} |\sqrt{s}\,b(t)+(y+a)\,t\,| < \lambda) = f(s,\lambda,y\,+\,a)
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

и

$$
\mathbf{P}\,(\max_{t\in(0,s)} |\,b(t)\,| < \lambda\,|\,b(s)=y) = f(s,\lambda,y). \tag{6.11}
$$

Используя (6.9)–(6.11), получаем

$$\begin{aligned}
I(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s(1-s)}} \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} \exp\Big\{-\frac{(y-a)^2}{2s(1-s)}\Big\}\, f(s,\lambda,y)\, f(1-s,\lambda,y)\, dy \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi s(1-s)}} \int\limits_{0}^{\lambda} \exp\Big\{-\frac{(y-a)^2}{2s(1-s)}\Big\} f(s,\lambda,y)\, f(1-s,\lambda,y)\, dy \\
&< 2\frac{1}{\sqrt{2\pi s(1-s)}} \int\limits_{0}^{\lambda} \exp\Big\{-\frac{y^2}{2s(1-s)}\Big\}\, f(s,\lambda,y)\, f(1-s,\lambda,y)\, dy \\
&= \mathbf{P}\,(\max_{t\in(0,1)} |b(t)| < \lambda\,).
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Так как $q(s) > 0$ для всех $s \in [a,b]$, то по непрерывности функции $q(s)$, из (6.12) следует утверждение леммы 6.1. □

Лемма 6.2. *Утверждение леммы* 6.1 *остается справедливым, если условие* $\frac{dG(t)}{dt} \in \mathbb{L}_2(0,1)$ *заменить требованием непрерывности функций* G.

Согласно теореме Джексона (теорема 13.6, [24]) для любой непрерывной периодической функции $G : [0,1] \to [-1,1]$ существует ее приближение тригонометрическими рядами

$$S_k(G,t) = \sum_{j=-k}^{k} \beta_j \,\exp\{2\pi i t\}, \quad t \in [0,1], \tag{6.13}$$

такое что

$$\sup_{t\in[0,1]} |\,G(t)\, -\, S_k(G,t)\,| \leqslant C\,\omega\Big(\frac{2\pi}{k}\Big), \tag{6.14}$$

где C не зависит от k, а ω – модуль непрерывности функции G,

$$\omega(\delta) = \sup_{|s-t|<\delta} |\,G(t)\, -\, G(s)\,|. \tag{6.15}$$

Функция G непрерывна на компакте и, следовательно, равномерно непрерывна. Следовательно, для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $k = k(G,\epsilon)$, что

$$\sup_{t\in(0,1)} |\,G(t)\, -\, S_k(G,t)\,| < \epsilon. \tag{6.16}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\,(\max_{t\in(0,1)} |b(t) + G(t)| < \lambda\,) \\ &\quad\leqslant \mathbf{P}\,(\max_{t\in(0,1)} |b(t) + S_k(G,t)| < \lambda+\epsilon\,) \\ &\quad\leqslant \mathbf{P}\,(\max_{t\in(0,1)} |b(t) + h_s(t)| < \lambda+\epsilon\,). \end{aligned} \tag{6.17}$$

Таким образом, задача свелась к вопросу о непрерывности по λ

$$\sup_{a\leqslant s\leqslant b} \mathbf{P}\,(\max_{t\in(0,1)} |\,b(t) + h_s(t)\,| < \lambda\,), \tag{6.18}$$

а она непосредственно следует из аналитических формул (6.9) и (6.10) для вероятности, стоящей под знаком супремума в (6.18), получаемых с помощью тех же рассуждений, что и в доказательстве леммы 6.1.

6.2. Доказательство теорем о состоятельности последовательностей альтернатив, заданных в терминах плотностей распределения. Обозначим $\psi(x) = \int_0^x \phi(t)\,d\,t$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

Лемма 6.3. *Не существует последовательности функций*

$$f_n = \sum_{j=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^j} \theta_{nji}\phi_{ji}, \quad \|f_n\|_\infty < C,$$

для которой

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|\psi(x) - \int\limits_0^x f_n(t)\,d\,t\right| = 0. \tag{6.19}$$

Доказательство. Обозначим Π линейное подпространство функций

$$f = \sum_{j=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^j}\theta_{ji}\,\phi_{ji}.$$

в $\mathbb{L}_2(0,1)$.

Определим ограниченный оператор

$$A\,f(x) = \int\limits_0^x f(s)\,d\,s, \quad f\in\mathbb{L}_2(0,1).$$

Ясно, что (6.19) следует из

$$\int_0^1 \left(\psi(x) - \int_0^x f_n(t)\,dt\right)^2 = o(1) \tag{6.20}$$

при $n \to \infty$.

Таким образом, мы будем доказывать, что (6.20) не имеет места. Предположим противное.

Заметим, что у оператора интегрирования A собственные функции тригонометрические и собственные числа $\lambda_j = cj^{-1}(1 + o(1))$ при $j \to \infty$. Следовательно, разлагая функции ϕ и f_n в тригонометрические ряды

$$\phi = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \tau_j, \quad f_n = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_{nj} \tau_j$$

по тригонометрической системе функций τ_j, $1 \leqslant j < \infty$, мы можем заменить (6.20) на

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2}(\theta_j - \eta_{nj})^2 = o(1) \tag{6.21}$$

и условие ортогональности ϕ и f_n задать в виде $\sum\limits_{j}^{\infty} \theta_j \eta_{nj} = 0$.

Обозначим $r = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \theta_j^2$.

Заметим, что поскольку функция ϕ дважды непрерывно дифференцируема, то $|\theta_j| < Cj^{-3/2}$ для всех $1 \leqslant j < \infty$.

Если имеет место (6.21), то найдутся $C_n \to \infty$ и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, такие что

$$\sum_{j=1}^{C_n} (\theta_j - \eta_{nj})^2 < \varepsilon_n$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{C_n} \theta_j \eta_{nj} = r + o(1).$$

Отсюда, используя ортогональность ϕ и f_n, имеем

$$\sum_{C_n+1}^{\infty} \theta_j \eta_{nj} = -r + o(1).$$

Но поскольку $|\theta_j| < Cj^{-3/2}$ для всех $1 \leqslant j < \infty$, то найдется последовательность $j_n \to \infty$ при $n \to \infty$, такая что $|\eta_{nj_n}| > cj_n^{3/2}$. Но тогда $j_n^{-2}(\theta_{j_n} - \eta_{nj_n})^2 \to \infty$ при $n \to \infty$ и мы приходим к противоречию. $\square$

Обозначим $m_n = [\log_2 n]$.

Доказательство теоремы 4.1. Как следует из условия G и леммы 6.3, достаточно доказать теорему 4.1 для последовательности функций

$$f_n = \sum_{j=k_n-C_1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^j} \theta_{n_k ji}\, \phi_{ji}.$$

Заметим что $\|\psi_{j1}\|_\infty = c2^{-j/2}$ и $\|\phi_{j1}\|_\infty = c2^{j/2}$, $1 \leqslant j < \infty$.

Так как $\|f_n\|_\infty < C_0\, n^{-r}$, то мы можем применить лемму 6.3 и получить, что для любого $\delta > 0$ найдется C_1, такое что для функций $\tilde F_{n\delta} = \sum\limits_{j=k_n+C_1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{2^j} \theta_{nij}\psi_{ji}$ имеет место

$$\begin{aligned} n^{1/2}\, \|\, \tilde F_{n\delta}\, \|_\infty &< C_2\, n^{1/2}\, 2^{-k_n - C_1}\, \|f_n\|_\infty \\ &\leqslant C_3\, n^{1/2-r}\, 2^{-k_n-C_1} \leqslant C_3\, 2^{-C_1} \leqslant \delta. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Следовательно, как вытекает из теоремы 3.3, найдутся C и C_1, такие что для функций $F_{n\delta} = \sum\limits_{j=k_n-C_1}^{k_n+C} \sum\limits_{i=1}^{2^j} \theta_{nji}\, \psi_{ji}$, имеет место

$$\|\, F_{n\delta}\, \|_\infty \asymp n^{-1/2}. \tag{6.23}$$

Для любого $x \in [0,1]$ найдется только конечное число индексов j, $k_n - c \leqslant j \leqslant k_n + C$ и индексов l, $1 \leqslant l \leqslant 2^j$, таких что $\theta_{njl}\phi_{jl}(x) \neq 0$. Следовательно, из леммы 6.3 и $\|\psi_{j1}\|_\infty \asymp 2^{-j/2}$ вытекает первое утверждение теоремы 4.1.

Предположим, что $e_1 < l_n 2^{-j_n} < e_2$ не имеет места. Тогда найдется подпоследовательность $n_t \to \infty$ при $t \to \infty$, такая что $l_{n_t} 2^{-j_{n_t}} \to 0$ или $l_{n_t} 2^{-j_{n_t}} \to 1$ при $t \to \infty$. В этом случае для подпоследовательности n_t имеет место ситуация несостоятельности, описанная в примере [18], и мы получаем, что найдется такая вероятность ошибки первого рода α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, что для подпоследовательности критериев Колмогорова K_{n_t}, $\alpha(K_{n_t}) = \alpha + o(1)$, имеет место

$$\lim_{t\to\infty} \beta(K_{n_t}, f_{n_t}) = 1 - \alpha.$$

$\square$

Доказательство теоремы 4.3. Начнем с доказательства 3пункта i в определении наибольшего множества.

Пусть $j > k_n + C_1$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} |\theta_{nji}| &\leqslant P_0\, 2^{-si-j/2} \leqslant C\, 2^{-sk_n-j/2-sC_1} \\ &= C\, 2^{-\frac{2r}{1-2r}k_n}\, 2^{-j/2-C_1 s} = C\, n^{-r}\, 2^{-j/2-C_1\, s}. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Следовательно, для любого $\delta > 0$ найдется C_1, такое что $\|f_{n\delta}\|_\infty < \delta n^{-r}$, где

$$f_{n\delta} = \sum_{j=k_n+C_1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^j} \theta_{n_k j i}\phi_{ji}.$$

Отсюда получаем, что найдется такое C, что $\|\bar f_{nC}\|_\infty > C_2 n^{-r}$, где

$$\bar f_{nC} = \sum_{j=k_n-c}^{k_n+C} \sum_{i=1}^{2^j} \theta_{n_k j i}\, \phi_{ji}.$$

По лемме 6.3, отсюда получаем, что найдутся такие j_n, $k_n - c < j_n < k_n + C$ и i_n, $1 \leqslant i_n \leqslant 2^{j_n}$, что $|\theta_{n j_n i_n}| > C_3\, n^{-r}\, 2^{-j_n/2} = C\, n^{-1/4-r/2}$. По теореме 4.1 это означает состоятельность последовательности f_n.

Проверим условие ii в определении наибольшего множества. Пусть функция $f = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{2^j} \theta_{ji}\, \phi_{ji}$ такова, что для нее найдутся $j_t \to \infty$ при $t \to \infty$ и l_t, $1 \leqslant l_t \leqslant 2^{j_t}$, для которых

$$2^{j_t(s+1/2)}\, |\theta_{j_t l_t}| = C_t, \tag{6.25}$$

где $C_t \to \infty$ при $t \to \infty$.

Обозначим $c_t = \log_2 C_t$.

Положим $\eta_{n_t j i} = 0$ для $1 \leqslant j \leqslant j_t$, $1 \leqslant i \leqslant 2^{j_t}$ и $\eta_{n_t j i} = \theta_{ji}$ for $j > j_t$, $1 \leqslant i \leqslant 2^{j_t}$. Определим подпоследовательность альтернатив $f_{n_t} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{2^j} \eta_{n_t j i}\, \phi_{ji}$. Здесь n_t удовлетворяет соотношению $\| f_{n_t} \|_\infty \asymp n_t^{-r}$.

Тогда, в силу леммы 6.3, получаем

$$\| f_{n_t} \|_\infty \asymp 2^{j_t/2}\, |\theta_{j_t l_t}| \asymp 2^{-m_t r} \asymp n_t^{-r}, \tag{6.26}$$

где $m_t = [\log_2 n_t]$.

Из (6.25) и (6.26) получаем

$$-m_t\, r = j_t/2 - j_t\,(s+1/2)\, r + c_t. \tag{6.27}$$

Для проверки ii, в силу неравенства Дворецкого–Кифера–Вольфовица [3], достаточно проверить, что имеет место

$$2^{m_t/2}\, 2^{-j_t/2}\, \theta_{j_t l_t} = o(1). \tag{6.28}$$

В силу (6.25), получаем

$$2^{m_t/2}\, 2^{-j_t/2}\, \theta_{j_t l_t} \asymp 2^{m_t/2}\, C_t\, 2^{-j_t(s+1)}. \tag{6.29}$$

Отсюда, используя (6.27) и $s - s/(2r) + 1 = 0$, получаем

$$2^{m_t/2} C_t 2^{-j_t(s+1)} \asymp C_t^{1-1/(2r)} 2^{-l_t(s-s/(2r)+1)} \asymp C_t^{1-1/(2r)} = o(1). \tag{6.30}$$

Из (6.25)–(6.30) получаем несостоятельность последовательности альтернатив f_{n_t}. □

Доказательство теоремы 4.4. Первое утверждение теоремы 4.4 вытекает из приведенной ниже леммы 6.4.

Лемма 6.4. *Пусть* $f_n = \sum_{j=1}^{k_n+c} \sum_{i=1}^{2^j} \theta_{ji}\, \phi_{ji}$, $\|f_n\|_\infty \asymp n^{-r}$. *Тогда найдется* P_0, *такое что* $f_n \in \mathbb{B}^s_{\infty\infty}(P_0)$.

Доказательство. Используя $\|f_n\|_\infty \asymp n^{-r}$ и применяя лемму 6.3, получаем

$$|\theta_{nji}| \leqslant Cn^{-r}\, 2^{-j/2} = C\, 2^{-\frac{2r}{1-2r}k_n}\, 2^{-j/2} = C\, 2^{-s\, k_n}\, 2^{-j/2} \leqslant 2^{-sj-j/2}.$$

□

Для доказательства первого утверждения теоремы 4.4 достаточно положить

$$f_{1n} = \sum_{j=1}^{k_n+C} \sum_{i=1}^{2^j} \theta_{nji}\, \phi_{ji},$$

с константой C, определенной в теореме 4.1. В силу леммы 6.4, получаем $f_{1n} \in \mathbb{B}^s_{\infty\infty}(P_0)$. По теореме 4.1, найдутся j_n и i_n , $k_n - c < j_n < k_n + C$ и $1 \leqslant i_n \leqslant 2^{j_n}$, такие что $|\theta_{nj_ni_n}| \asymp n^{-r}\, 2^{-j_n/2}$. Следовательно, в силу леммы 6.3, $\|f_{1n}\|_\infty \asymp n^{-r}$. По лемме 6.4, отсюда следует первое утверждение теоремы 4.4.

Второе утверждение теоремы 4.4 легко получается из доказательства i в теореме 4.3. □

Теорема 4.6 следует из теоремы 3.2 и леммы 6.5, приведенной ниже

Лемма 6.5. *Пусть даны две вещественные ограниченные функции* $h_1(t)$ *и* $h_2(t)$, $t \in (a,b)$, $0 < a < b < 1$, *причем*

$$\max_{a<t<b} |\, h_1(t) - h_2(t)\,| < \delta, \quad \delta > 0. \tag{6.31}$$

Тогда для любого c

$$|\mathbf{P}\,(\max_{a<t<b} |\, b(t) + h_1(t)\,| < c) - \mathbf{P}\,(\max_{a<t<b} |\, b(t) + h_2(t)\,| < c)\,| \leqslant C\,\delta, \tag{6.32}$$

где C *не зависит от* h_1 *и* h_2.

Доказательство. Из (6.31) следует, что $h_1(t) - \delta < h_2(t) < h_1(t) + \delta$ для $a < t < b$. Поэтому для доказательства (6.32) достаточно доказать, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\,(\max_{a<t<b} |\, b(t) + h_1(t)\,| < c + \delta) - \mathbf{P}\,(\max_{a<t<b} |\, b(t) + h_1(t)\,| < c) \\ &\leqslant \Phi\Big(\frac{\delta}{a}\Big) - \Phi\Big(-\frac{\delta}{a}\Big) + \Phi\Big(\frac{\delta}{1-b}\Big) - \Phi\Big(-\frac{\delta}{1-b}\Big). \end{aligned} \tag{6.33}$$

Определим функцию $h(t) = \sqrt{d-d^2}\,t/d$ для $0 < t < d$ и $h(t) = \sqrt{d-d^2}\,\frac{1-t}{1-d}$ для $d \leqslant t < 1$, где $a < d < b$.

Тогда броуновский мост можно представить в виде $b(t) = \zeta(t) + \xi h(t)$, где гауссовский случайный процесс $\zeta(t)$ не зависит от гауссовской случайной величины ξ, $\mathbf{E}[\xi] = 0$ и $\mathbf{E}[\xi^2] = 1$.

Обозначим μ_η вероятностную меру случайного процесса

$$\eta(t) = \zeta(t) + h_1(t).$$

Тогда левая часть (6.33) равна

$$\begin{aligned} &\int d\,\mu_\eta(\mathbf{P}\,(\max_{a<t<b} |\,\eta(t) + \xi h(t) + h_1(t)\,| < c + \delta\,) \\ &- \mathbf{P}\,(\max_{a<t<b} |\,\eta(t) + \xi\,h(t) + h_1(t)\,| < c)\,). \end{aligned} \tag{6.34}$$

Таким образом, достаточно доказать, что для любой ограниченной вещественной функции $S : (a,b) \to \mathbb{R}^1$ имеет место

$$\mathbf{P}\,(\max_{a<t<b} |S(t) + \xi h(t)| < c + \delta) - \mathbf{P}\,(\max_{a<t<b} |S(t) + h(t)| < c) \leqslant C\,\delta, \tag{6.35}$$

где C не зависит от S.

Докажем чуть более простое утверждение, когда функция $h(t) = t$, $t \in (0,1)$. В нашем случае рассуждения аналогичны, но более громоздки.

Мы можем записать (6.35) в следующем виде

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(-\min_{a<t<b}\left\{\frac{c+\delta}{t}+\frac{S(t)}{t}\right\} < \xi < \min_{a<t<b}\left\{\frac{c+\delta}{t}+\frac{S(t)}{t}\right\}\right)\\
&-\mathbf{P}\left(-\min_{a<t<b}\left\{\frac{c}{t}+\frac{S(t)}{t}\right\} < \xi < \min_{a<t<b}\left\{\frac{c}{t}+\frac{S(t)}{t}\right\}\right)\\
&\leqslant \Phi\left(\frac{\delta}{a}\right)-\Phi\left(-\frac{\delta}{a}\right).
\end{aligned}\tag{6.36}$$

Из (6.34)–(6.36) следует (6.32). □

Доказательство теоремы 4.5. Рассуждения основаны на лемме 6.5. Обозначим

$$\bar f_{nC} = \sum_{j=1}^{k_n+C}\sum_{i=1}^{2^j}\theta_{ji}\,\phi_{ji}$$

и $\tilde f_{nC} = f_n - \bar f_{nC}$.

Определим функцию $\bar F_{nC}$, такую что $\frac{d\bar F_{nC}(x)}{dx} = 1+\bar f_{nC}(x)$, $x\in[0,1]$ и $\bar F_{nC}(1) = 1$. Обозначим $\tilde F_{nC} = F_n - \bar F_{nC} + F_0$.

По лемме 6.4, для любого C найдется $P_0 > 0$, такая что $\bar f_{nC} \in \mathbb{B}^s_{\infty\infty}(P_0)$. В силу теоремы 4.1 и леммы 6.3, найдется такое C, что $\|\bar f_{nC}\| \asymp n^{-r}$. Отсюда следует пункт *i*.

В силу (6.22), для любого $\delta>0$ найдется C, такое что $n^{1/2}T(\tilde F_{nC})<\delta$. Согласно лемме 6.5, отсюда следует *i* и *ii*. □

Если последовательность F_{1n} несостоятельна, то по теореме 3.2, $n^{1/2}T(F_{1n})\to 0$ при $n\to\infty$. Отсюда по лемме 6.5 следует теорема 4.6.

Теорема 4.7 легко выводится из теоремы 4.2. Мы опустим это доказательство.

Теорема 4.8 вытекает из леммы 6.5 и теоремы 4.7.

6.3. Доказательство теоремы 5.2. Нами будет доказано только второе утверждение теоремы 5.2. Возьмем последовательность $m_n\to\infty$, такую что для нее найдется

$$|\theta_{m_n i_{m_n}}| > (1-\delta)\max\{\,|\theta_{ji}| : j\geqslant m_n,\, 1\leqslant i\leqslant 2^j\,\},$$

где $0<\delta<1/2$.

Положим $l_{m_n}^{-1/2} \asymp 2^{m_n}\,|\theta_{m_n i_{m_n}}|$.

Положим $f_{l_{m_n}} = \sum\limits_{j=l_{m_n}}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^j}\theta_{nji}\,\phi_{ji}$.

Обозначим $F_{l_{m_n}}(x) = x + \int\limits_0^x f_{l_{m_n}}(t)\,dt$, $x \in [0,1]$.

Тогда по лемме 6.3 имеет место

$$\max_{x\in(0.1)} |\,F_{l_{m_n}}(x) - F_0(x)\,| \asymp 2^{-m_n}\, l_{m_n}^{-1/2} \;=\; o(l_{m_n}^{-1/2}).$$

По теореме 3.2, отсюда следует несостоятельность подпоследовательности альтернатив $F_{l_{m_n}}$.

Список литературы

1. T. Anderson, *The integral of a symmetric unimodal function.* — Proc. Amer. Math. Soc. **6**, No. 1 (1955), 170–176.
2. J. Durbin, *Distribution Theory for Tests Based on the Sample Distribution function.* Regional Conference Series in Applied Mathematics. **9** SIAM Philadelphia, 1973.
3. A. Dvoretzky, J. Kiefer, J. Wolfowitz, *Asymptotic minimax character of the sample distribution function and of the classical multinomial estimator.* — Ann. Math. Statist. **27** (1956), 642–669.
4. M. C. Ермаков, *Асимптотическая минимаксность критериев хи-квадрат.* — Теория вероятн. и ее примен. **42**, No. 4 (1997), 668–695.
5. M. C. Ермаков, *Об асимптотически минимаксном обнаружении сигнала в гауссовском белом шуме.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **474** (2018), 124–138.
6. M. C. Ермаков, *О равномерной состоятельности непараметрических критериев.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **486** (2019), 98–147.
7. E. Giné, R. Nickl, *Mathematical Foundation of Infinite-Dimensional Statistical Models.* Cambridge: Cambridge University Press, 2015.
8. J. Hajek, Z. Sidak, P. K. Sen, *Theory of Rank Tests.* London: Academic Press, 1999.
9. Ю. И. Ингстер, *О сравнении минимаксных свойств тестов Колмогорова ω^2 и χ^2.* — Теория вероятн. и ее примен., **32**, No. 2 (1987), 374–378.
10. I. M. Johnstone, *Gaussian Estimation. Sequence and Wavelet Models.* Book Draft. http://statweb.stanford.edu/ imj/, 2015.
11. A. Kolmogorov, *Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione.* — G. Ist. Ital. Attuari. **4** (1933), 83–91.
12. M. Кендалл, A. Стюарт, *Статистические выводы и связи.* M.: Наука, 1973.
13. H. H. Kuo, *Gaussian Measures in Banach Spaces.* NY.: Springer, 1975.
14. E. L. Lehmann, J. P. Romano, *Testing Statistical Hypothesis.* NY.: Springer, 2005.
15. O. V. Lepski, A. B. Tsybakov, *Asymptotically exact nonparametric hypothesis testing in sup-norm and at a fixed point.* — Probab. Theory Rel. Fields **117**, No. 1 (2000), 17–48.
16. P. Massart, *The tight constant in the Dvoretzky–Kiefer—Wolfowitz inequality.* — Ann. Probab. **18**, No. 3 (1990), 1269–1283.
17. D. Mason, J. Schuenemeyer, *A Modified Kolmogorov–Smirnov Test Sensitive to Tail Alternatives.* — Ann. Statist. **11**, No. 3 (1983), 933–946.
18. F. J. Massey, *A note on the power of a non-parametric test.* — Ann. Math. Statist. **21** (1950), 440–443.

19. G. R. Shorack, J. A. Wellner, *Empirical Processes with Application to Statistics.* NY.: Wiley, 1986.
20. Н. В. Смирнов, *Об уклонениях эмпирической кривой распределения.* — Матем. сб., **6**, No. 1 (1939), 3—26.
21. Н. В. Смирнов, *Приближение законов распределения случайных величин по эмпирическим данным.* — Успехи матем. наук, **10** (1944), 179–206.
22. N. Smirnov, *Table for estimating the goodness of fit of empirical distributions.* — Ann. Math. Statist. **19**, No. 2 (1948), 279–281.
23. V. Voinov, M. Nikulin, N. Balakrishnan, *Chi-squared Goodness of Fit Test with Applications.* Elswere Inc. Oxford, 2013.
24. A. Zygmund, *Trigonometric Series.* London: Cambridge Univ. Press, 2002.
25. Д. М. Чибисов, *К исследованию асимптотической мощности критериев согласия.* — Теория вероятн. и ее примен. **10**, No. 3 (1965), 460–478.

Ermakov M. S. On uniform consistency of nonparametric tests. II.

We provide necessary and sufficient conditions of uniform consistency of nonparametric sets of alternatives for Kolmogorov test. Nonparametric sets of alternatives can be defined both in terms of densities and distribution functions.

Институт проблем машиноведения РАН
Большой пр. В.О., 61
Санкт-Петербург, Россия

Поступило 14 сентября 2020 г.

Санкт-Петербургский государственный Университет
Университетский пр., 28, Петродворец
198504 Санкт-Петербург
Россия
E-mail: erm2512@gmail.com