Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 495, 2020 г.

Я. С. Голикова

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНСТАНТ В ЛЕММЕ О ФУНКЦИЯХ w(x) И g(t) В МЕТОДЕ ГЛАДКИХ ТРЕУГОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящей работе рассматривается метод гладких треугольных функций, представленный А. Ю. Зайцевым в [2]. Для одной из ключевых лемм метода вычислены все фигурирующие в формулировке константы. В дальнейшем данный результат позволит оценить постоянную в оценке близости в метрике Колмогорова n и $(n+1)$-кратных сверток одномерных симметричных вероятностных распределений с отделенной от -1 характеристической функцией вида $\rho(F^n, F^{n+1}) \leqslant \frac{c}{n}$, а также ряда других оценок, в частности точности аппроксимации процесса редких событий пуассоновским точечным процессом. На настоящий момент не существует численных оценок этих констант.

Рассмотрим некоторую функцию $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, обладающую следующими свойствами (см. [2]):

a) $\varphi(x) = 0$ при $x \leqslant 0$;
b) $\varphi(x) = 1$ при $x \geqslant 1$;
c) $\varphi(x)$ строго возрастает при $0 < x < 1$;
e) $\varphi(x) = 1 - \varphi(1-x)$ при $x \in \mathbf{R}$;
f) $\varphi(x)$ бесконечно[1] дифференцируема на всей прямой.

Ключевые слова: неравенства, оценка абсолютной постоянной, гладкие треугольные функции.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ 19-01-00356 и РФФИ-ННИО 20-51-12004.

[1]При применении в конкретных ситуациях это требование может быть ослаблено. В частности, в данной статье проводятся вычисления для дважды дифференцируемой функции $\varphi(x)$.

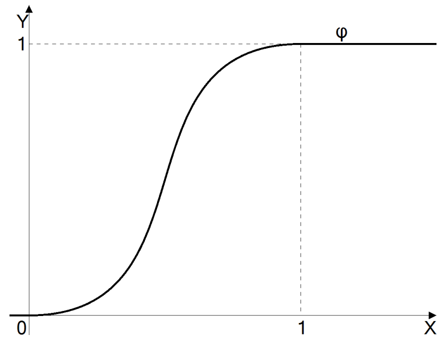

Рис. 1. График функции $\varphi(x)$.

Для z, h, τ, $x \in \mathbf{R}$, $0 < \tau < h$, определим функции

$$\varphi_{z,\tau}(x) = \varphi\Big(\frac{x-z}{\tau}\Big); \tag{1}$$

$$f_{z,h,\tau}(x) = f^{(0)}_{z,h,\tau}(x) = \varphi_{z,\tau}(x) - \varphi_{z,h}(x); \tag{2}$$

$$f^{(1)}_{z,h,\tau}(x) = \varphi_{z,h}(x) - \varphi_{z+h-\tau,\tau}(x); \tag{3}$$

$$\begin{aligned} g_{z,h,\tau}(x) &= \varphi_{z,\tau}(x) - \varphi_{z+h-\tau,\tau}(x) \\ &= f^{(0)}_{z,h,\tau}(x) + f^{(1)}_{z,h,\tau}(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть $J \in \{0;1\}$. Легко доказываются следующие два неравенства для оценки производных гладких треугольных функций:

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\Big|\frac{d}{dx}\,f^{(J)}x,h,\tau(x)\Big| \leqslant \frac{c_{1,T}}{\tau},\ \sup_{x\in\mathbf{R}}\Big|\frac{d^2}{dx^2}\,f^{(J)}_{x,h,\tau}(x)\Big| \leqslant \frac{c_{2,T}}{\tau^2}. \tag{5}$$

Доказательство неравенств (5). Положим $J = 0$. В случае $J = 1$ все выкладки будут аналогичны.

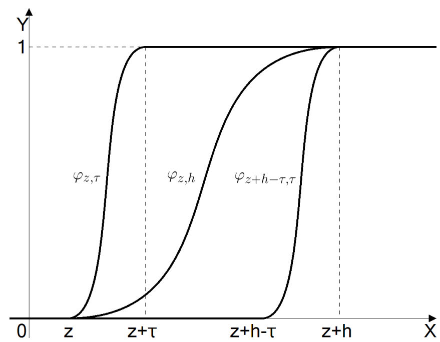

Рис. 2. Графики функций $\varphi_{\cdot,\cdot}(x)$.

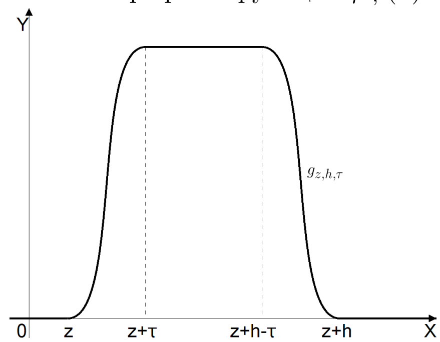

Рис. 3. График функции $g_{z,h,\tau}(x)$.

Учитывая (1), (2) нетрудно получить

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbf{R}}\Bigl|\frac{d}{dx}\,f^{(J)}_{x,h,\tau}(x)\Bigr| &= \sup_{x\in\mathbf{R}}|\varphi'_{z,\tau}(x)-\varphi'_{z,h}(x)|\\
&= \sup_{x\in\mathbf{R}}\Bigl|\frac{1}{\tau}\varphi'\Bigl(\frac{x-z}{\tau}\Bigr)-\frac{1}{h}\varphi'\Bigl(\frac{x-z}{\tau}\Bigr)\Bigr|\\
&\leqslant \sup_{x\in\mathbf{R}}\max\Bigl|\frac{1}{\tau}\varphi'\Bigl(\frac{x-z}{\tau}\Bigr),\frac{1}{h}\varphi'\Bigl(\frac{x-z}{\tau}\Bigr)\Bigr|\\
&= \max\Bigl(\sup_{x\in\mathbf{R}}\frac{1}{\tau}\varphi'\Bigl(\frac{x-z}{\tau}\Bigr),\sup_{x\in\mathbf{R}}\frac{1}{h}\varphi'\Bigl(\frac{x-z}{\tau}\Bigr)\Bigr)\\
&\leqslant \frac{1}{\tau}\sup_{x\in\mathbf{R}}\varphi'(x)=\frac{1}{\tau}\,c_{1,T};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbf{R}}\Big|\frac{d^2}{dx^2}\,f^{(J)}_{x,h,\tau}(x)\Big| &= \sup_{x\in\mathbf{R}}|(\varphi_{z,\tau}(x)-\varphi_{z,h}(x))''| \\
&= \sup_{x\in\mathbf{R}}\Big|\Big(\frac{1}{\tau}\varphi'\Big(\frac{x-z}{\tau}\Big)-\frac{1}{h}\varphi'\Big(\frac{x-z}{\tau}\Big)\Big)'\Big| \\
&= \sup_{x\in\mathbf{R}}\Big|\frac{1}{\tau^2}\varphi''\Big(\frac{x-z}{\tau}\Big)-\frac{1}{h^2}\varphi''\Big(\frac{x-z}{\tau}\Big)\Big| \\
&\leqslant \sup_{x\in\mathbf{R}}\Big|\frac{1}{\tau^2}\varphi''\Big(\frac{x-z}{\tau}\Big)+\frac{1}{h^2}\varphi''\Big(\frac{x-z}{\tau}\Big)\Big| \\
&\leqslant \Big(\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{h^2}\Big)\sup_{x\in\mathbf{R}}|\varphi''(x)| \\
&\leqslant \frac{2}{\tau^2}\sup_{x\in\mathbf{R}}\varphi''(x)=\frac{2}{\tau}\,c_{2,T}\,,
\end{aligned}$$

где $c_{1,T}=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}\varphi'(x)$, $c_{2,T}=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}\varphi''(x)$. □

Замечание 1. В расчетах мы будем использовать следующую функцию $\varphi(x)$, выбранную для минимизации супремума модуля второй производной:

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 2x^2, & 0<x\leqslant \frac{1}{2},\\ 4x-2x^2-1, & 1/2<x\leqslant 1,\\ 1, & x>1.\end{cases} \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что

$$\varphi'(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0 \text{ или } x>1,\\ 4x, & 0<x\leqslant \frac{1}{2},\\ 4-4x, & 1/2<x\leqslant 1;\end{cases} \tag{7}$$

$$\varphi''(x)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ или } x>1,\\ 4, & 0<x<\frac{1}{2},\\ -4, & 1/2<x\leqslant 1.\end{cases} \tag{8}$$

Таким образом, из (7), (8) следует, что в неравенстве (5) в контексте данной статьи можно положить:

$$c_{1,T}=2; \tag{9}$$

$$c_{2,T}=4. \tag{10}$$

Прежде чем сформулировать основной результат статьи, приведем две леммы. Полное доказательство леммы 1 приведено в статье А. Ю. Зайцева [2], леммы 2 – в статье Т. В. Арака [3], см. также [1, гл. III].

Лемма 1. *Пусть* $0 < \tau < h$; $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^l$; $l,m \in \mathbf{N}$; a, $z \in \mathbf{R}^1$. *Существуют функции* $w(x)$ *и* $g(t)$, *обладающие следующими свойствами:*

a) $0 \leqslant w(x) \leqslant f_{z,h,\tau}(x)$ *при всех* $x \in \mathbf{R}^1$;

b) $w(x) = f_{z,h,\tau}(x)$ *при*; $x \in [K_m(\mathbf{u})]_{m\tau} + a$;

c) *Функция* $w(x)$ *бесконечно*[2] *дифференцируема на всей прямой, причем*

$$\sup_x \Big| \frac{d^s}{dx^s} w(x) \Big| \leqslant \frac{c(s)}{\tau^s}, \ s = 1, 2, \ldots;$$

d) $|\widehat{w}(t)| \leqslant g(t)$ *для любых* $t \in \mathbf{R}^1$, *где* $\widehat{w}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, w(x)\, dx$ *– преобразование Фурье функции* $w(x)$;

e) *Функция* $g(t)$ *является четной, не возрастает при* $t \geqslant 0$ *и принимает постоянное значение* $g(0)$ *при* $|t| \leqslant 2h^{-1}$;

f) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt \leqslant cl^2 \ln(lm + 1)$.

Лемма 2. *В условиях леммы* 1 *существует такое число* $r \in \mathbf{N}$, $r \leqslant l + 2$ *и такие наборы вещественных чисел* $\{z_j\}_{j=1}^r$ *и* $\{\delta_j\}_{j=0}^{r-1}$, *что*

$$\tau = \delta_0 \leqslant \delta_1 \leqslant \ldots \leqslant \delta_{r-1} \leqslant h; \tag{11}$$

$$z \leqslant z_1 < z_1 + \delta_1 \leqslant z_2 < x_2 + \delta_2 \leqslant \cdots < z_{r-1} + \delta_{r-1} \leqslant z_\tau; \tag{12}$$

$$[K_m(\mathbf{u})]_{m\tau} \bigcap [z, z+h] \subset [z, z_1] \bigcup \Big(\bigcup_{j=1}^{r-1} [z_j + \delta_j, z_{j+1}] \Big) \tag{13}$$

$$z_j - z \leqslant (l+2)!(2m)^{(l+2)} \delta_{j-1}, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{14}$$

Вся оставшаяся часть статьи будет посвящена доказательству следующей теоремы.

---

[2]В случае когда $\varphi(x)$ не является бесконечно дифференцируемой, функция $w(x)$ обладает той же гладкостью, что и $\varphi(x)$.

Теорема 1. 1) *В пункте* c) *леммы* 1 *можно положить*

$$c(s) = 4 \sup_x \Big| \frac{d^s}{dx^s}(\varphi(x)) \Big|,$$

$$c(1) = 2 \sup_x \Big| \frac{d}{dx}(\varphi(x)) \Big|,$$

2) *Предположив* $l \geqslant 7$ *и используя* $\varphi(x)$, *определенную в* (6), *пункт* f) *леммы* 1 *можно переписать в виде*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt \leqslant 8\,(l+2)^2 \ln(2m(l+2)).$$

Прежде чем переходить непосредственно к доказательству теоремы 1, прокомментируем ограничение $l \geqslant 7$.

Замечание 2. Ограничение $l \geqslant 7$ обусловлено следующими причинами:

1) Как уже говорилось во введении, лемма 1 используется в оценке близости в метрике Колмогорова n и $(n+1)$-кратных сверток одномерных симметричных вероятностных распределений. Поскольку все промежуточные оценки в доказательстве теоремы 1 возрастают по l, а наилучшая оценка l, полученная в статье автора [4], ни в каком случае не лучше, чем $l \leqslant 7$, данное ограничение не увеличивает результирующие значения констант.
2) Для меньших значений l примененный метод вычисления константы не работает, в частности при $l = 1$, $m = 1$ он приводит к значению ≈ 11.7, поэтому, если данная лемма будет применяться в ситуациях, в которых возможны меньшие значения l, представляется целесообразным рассматривать данные случаи отдельно.

Доказательство теоремы 1. Не нарушая общности, положим $a = 0$ (см. [2]). Пусть $\{z_j\}_{j=1}^{r}$ и $\{\delta_j\}_{j=0}^{r-1}$ – наборы вещественных чисел из леммы 2. Построим функции $v_1, \ldots, v_r$; $w_1, \ldots, w_r$; v, w с помощью

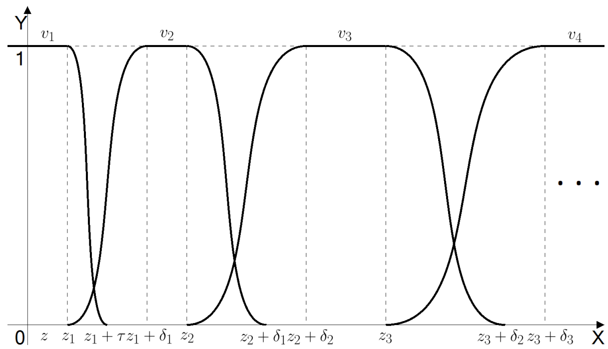

Рис. 4. Графики функции $v_j(x)$.

формул

$$v_1(x) = 1 - \varphi_{z_1,\tau}(x); \tag{15}$$

$$v_j(x) = \varphi_{z_{j-1},\delta_{j-1}}(x) - \varphi_{z_j,\delta_{j-1}}(x), \quad j = 2,\dots,r; \tag{16}$$

$$w_j(x) = f_{z,h,\tau}(x)\, v_j(x), \quad j = 1,\dots,r; \tag{17}$$

$$v(x) = \sum_{j=1}^{r} v_j(x); \tag{18}$$

$$w(x) = \sum_{j=1}^{r} w_j(x) = f_{z,h,\tau}(x)\, v(x). \tag{19}$$

Графики функций $v_j(x)$, дающих в сумме $v(x)$, приведены на рис. 4.

Из (11), (12) и определения функции $v(x)$ следует, что $0 \leqslant v(x) \leqslant 1$ при всех $x \in \mathbf{R}$. Это хорошо видно на рис. 4.

Докажем пункт 1) теоремы 1.

Для любых $z \in \mathbf{R}^1$, $\delta > 0$ и $s \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} \sup_x \Big|\frac{d^s}{dx^s}\varphi_{z,\delta}(x)\Big| &= \sup_x \Big|\frac{d^s}{dx^s}\varphi_{z,\delta}\Big(\frac{x-z}{\delta}\Big)\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{\delta^s}\sup_x\Big|\frac{d}{dx^s}\varphi(x)\Big| \leqslant \frac{1}{\delta^s}c_T(s), \end{aligned} \tag{20}$$

где $c_T(s) = \sup\limits_x |\frac{d^s}{dx^s}(\varphi(x))|$.

Используя (11), (16) и предыдущее неравенство, получим:

$$\begin{aligned}\sup_x\Big|\frac{d^s}{dx^s}v_j(x)\Big| &= \sup_x\Big|\frac{d^s}{dx^s}(\varphi_{z_{j-1},\delta_{j-1}}(x)-\varphi_{z_j,\delta_{j-1}}(x))\Big|\\ &= \sup_x\Big|\frac{d^s}{dx^s}\Big(\varphi\Big(\frac{x-z_{j-1}}{\delta_{j-1}}\Big)-\varphi\Big(\frac{x-z_j}{\delta_{j-1}}\Big)\Big)\Big|\\ &\leqslant \frac{2}{\delta_{j-1}^s}\sup_x\Big|\frac{d^s}{dx^s}\varphi(x)\Big|\leqslant\frac{2c_T(s)}{\tau^s}.\end{aligned}\tag{21}$$

Аналогично

$$\sup_x\Big|\frac{d^s}{dx^s}f_{z,h,\tau}(x)\Big|\leqslant\frac{2}{\delta_{j-1}^s}\sup_x\Big|\frac{d^s}{dx^s}\varphi(x)\Big|\leqslant\frac{2c_T(s)}{\tau^s}.\tag{22}$$

По построению $v_j(x)$, а особенно по рис. 4 хорошо видно, что при фиксированном x отличными от нуля могут быть не более двух функций $v_j(x)$. Из (18), (19), (21), (22), формулы дифференцирования произведений функции, неравенств

$$\sup|\frac{d^s}{dx^s}v(x)|\leqslant\sup|\frac{d^s}{dx^s}v_j(x)|,\quad \sup|v_j(x)|\leqslant 1,\quad \sup|f_{z,h,\tau}(x)|\leqslant 1$$

следует:

$$\begin{aligned}\sup_x\Big|\frac{d^s}{dx^s}w(x)\Big|\leqslant\sup_x|\frac{d^s}{dx^s}(f_{z,h,\tau}(x)\,v(x))\Big|\leqslant\sup_x\Big|\frac{d^s}{dx^s}f_{z,h,\tau}(x)\Big|\\ +\sup_x\Big|\frac{d^s}{dx^s}v_j(x)\Big|\leqslant\frac{4c_T(s)}{\tau^s},\end{aligned}\tag{23}$$

где $c_T(s)=\sup\limits_x|\frac{d^s}{dx^s}(\varphi(x))|$.

Отдельного внимания заслуживает случай $s=1$. При оценке супремума производных первого порядка функций $f_{z,h,\tau}(x)$ и $v_j(x)$ получим:

$$\sup_x\Big|\frac{d}{dx}f_{z,h,\tau}(x)\Big|\leqslant\frac{1}{\delta_{j-1}}\sup_x\Big|\frac{d}{dx}\varphi(x)\Big|\leqslant\frac{c_T(1)}{\tau};\tag{24}$$

$$\sup_x\Big|\frac{d}{dx}v_j(x)\Big|\leqslant\frac{1}{\delta_{j-1}}\sup_x\Big|\frac{d}{dx}\varphi(x)\Big|\leqslant\frac{c_T(1)}{\tau}.\tag{25}$$

Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве (23), получим:

$$\sup_x\Big|\frac{d}{dx}w(x)\Big|\leqslant\frac{2\,c_T(1)}{\tau},\tag{26}$$

где $c_T(1)=\sup\limits_x\Big|\frac{d}{dx}\varphi(x)\Big|$. Тем самым, пункт 1) теоремы 1 доказан.

Перейдем к доказательству пункта 2). Вычислим значение констант $c(1)$ и $c(2)$ при условии, что $\varphi(x)$ задается (6). Учитывая (7), (8), а также $c_T(1) = \sup\limits_x \left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right|$, $c_T(2) = \sup\limits_x \left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right|$, получим что $c_T(1) = 2$, $c_T(2) = 4$, и, следовательно, $c(1) = 4$ и $c(2) = 16$.

Пусть $\|f\| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$ – L^1-норма функции f, а $\operatorname{var} f$ – полная вариация функции f. При $j = 1, \ldots, r$ положим

$$g_i(t) = \begin{cases} \|w_j\|, & |t| \leqslant \|w_j\|^{-1}, \\ \min\{\|w_j\|,\, \|w_j'\||t|^{-1},\, \|w_j''\|t^{-2}\}, & |t| > \|w_j\|^{-1}, \end{cases} \tag{27}$$

$$g(t) = \sum_{j=1}^{r} g_j(t). \tag{28}$$

Чтобы оценить $\|g\|$, оценим $\|g_j\|$, $j = 1, \ldots, r$. Определим множества

$$T_{j1} = \{t : |t| \leqslant \|w_j\|^{-1}\}, \quad T_{j2} = \{t : \|w_j\|^{-1} \leqslant |t| \leqslant \|w_j''\|\},$$
$$T_{j3} = \{t : |t| \geqslant \|w_j''\|\}.$$

Проведя интегрирование по множествам T_{j1}, T_{j2}, T_{j3}, получаем, что

$$\|g_j\| \leqslant 4 + 2\|w_j'\| \max\{0, \ln(\|w_j\|\|w_j''\|)\}. \tag{29}$$

Заметим, что для функции $f \in C^1$, $\|f'\| = \operatorname{var} f$. Поэтому, учитывая (17), получим:

$$\|w_j'\| \leqslant \|f_{z,h,\tau}'\| + \|v_j'\| = \operatorname{var} f_{z,h,\tau} + \operatorname{var} v_j \leqslant 4, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{30}$$

(см. рис. 2 и 4). Далее, при $j = 1, \ldots, r$.

$$\|w_j''\| \leqslant \|f_{z,h,\tau}''\, v_j\| + 2\|f_{z,h,\tau}'\, v_j'\| + \|f_{z,h,\tau}\, v_j''\|, \tag{31}$$

Оценим каждое слагаемое по очереди. Согласно (2), (11), (21), (22), (24), (25),

$$\|f_{z,h,\tau}'\, v_j'\| \leqslant \sup_x |v_j'(x)| \operatorname{var} f_{z,h,\tau} \leqslant \frac{2c_T(1)}{\delta_{j-1}}, \text{ так как} \operatorname{var} f_{z,h,\tau} \leqslant 2; \tag{32}$$

$$\|f_{z,h,\tau}\, v_j''\| \leqslant \|v_j''(x)\| \leqslant 2\delta_{j-1} \sup_x |v_j''(x)| \leqslant 2\delta_{j-1} \frac{2c_T(2)}{\delta_{j-1}^2} = \frac{4c_T(2)}{\delta_{j-1}}; \tag{33}$$

$$\|f_{z,h,\tau}''\, v_j\| \leqslant \|\varphi_{z,\tau}'' v_j\| + \|\varphi_{z,h}'' v_j\|; \tag{34}$$

$$\|\varphi_{z,h}'' v_j\| \leqslant \|\varphi_{z,h}''\| \leqslant h \sup_x |\varphi_{z,h}''(x)| \leqslant \frac{h c_T(2)}{h^2} \leqslant \frac{c_T(2)}{\delta_{j-1}}; \tag{35}$$

$$\|\varphi''_{z,\tau}v_1\| \leqslant \|\varphi''_{z,\tau}\| \leqslant \tau \sup_x |\varphi''_{z,\tau}(x)| \leqslant \frac{c_T(2)}{\tau} = \frac{c_T(2)}{\delta_0}; \tag{36}$$

$$\begin{aligned}\|\varphi''_{z,\tau}v_2\| &\leqslant \|\varphi''_{z,\tau}\| \leqslant \tau \sup_x |\varphi''_{z,\tau}(x)| \sup_{z\leqslant x\leqslant z+\tau} v_2(x)\\ &\leqslant \tau\frac{c_T(2)}{\tau}\int\limits_z^{z+\tau} v_2'(x)\,dx \leqslant \frac{c_T(2)}{\delta_1};\end{aligned} \tag{37}$$

$$\|\varphi''_{z,\tau}v_j\| = 0 \quad \text{при } j = 3,\dots,r. \tag{38}$$

В силу (11), (12), $z_{j-1} \geqslant z_2 \geqslant z_1 + \delta_1 \geqslant z + \tau$. Поэтому, подставив в (31) оценки (32)–(35), получим:

$$\|w_j''\| \leqslant \frac{6c_T(2) + 4c_T(1)}{\delta_{j-1}} = \frac{c_w(\varphi)}{\delta_{j-1}} = \frac{32}{d_{j-1}}. \tag{39}$$

Из (14) и построения $w_j(x)$ и $v_j(x)$ легко выводится оценка (см. [2])

$$\|w_j\| \leqslant \|v_j\| \leqslant z_j - z + \delta_{j-1} \leqslant ((l+2)!(2m)^{l+2} + 1)\delta_{j-1} \quad \text{при } j = 1,\dots,r. \tag{40}$$

Наконец, подставляя (30), (39), (40) в (29), учитывая (28) и то, что $r \leqslant l+2$, получим:

$$\begin{aligned}\|g\| &\leqslant \sum_{j=1}^{r} \|g_j\| \leqslant r(4 + 8\ln(c_w(\varphi)((l+2)!(2m)^{l+2} + 1)))\\ &\leqslant (l+2)(4 + 8\ln(c_w(\varphi)((l+2)!(2m)^{l+2} + 1)))\\ &= (l+2)(4 + 8\ln c_w(\varphi) + 8\ln((l+2)!(2m)^{(l+2)} + 1)).\end{aligned} \tag{41}$$

Оценим сверху выражение $\ln((l+2)!(2m)^{(l+2)}+1)$ при помощи формулы Стирлинга, а также учитывая

$$\ln(x+1) = \ln(1+1/x) + \ln x \leqslant \frac{1}{x} + \ln x,$$

и то, что $m \in \mathbf{N}$:

$$
\begin{aligned}
\ln((l+2)!(2m)^{(l+2)}+1) &\leqslant \frac{1}{9!2^9} + \ln(l+2)! + (l+2)\ln(2m) \\
&\leqslant \frac{1}{9!2^9} + \ln\Big(\sqrt{2\pi(l+2)}\Big(\frac{l+2}{e}\Big)^{(l+2)} e^{\frac{1}{12(l+2)}}\Big) + (l+2)\ln(2m) \\
&\leqslant (l+2)\ln(l+2) + \frac{1}{2}\ln(l+2) - (l+2) + (l+2)\ln(2m) \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{9!2^9} + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{12(l+2)}}_{<0.93} \\
&\leqslant (l+2)(\ln(l+2) + \ln(2m)) + \frac{1}{2}\ln(l+2) - (l+2) + 0.93. \qquad (42)
\end{aligned}
$$

Подставим (42) в (41) и, учитывая, что $c_w(\varphi) = 32$, получим:

$$
\begin{aligned}
\|g\| &\leqslant (l+2)\Big(4 + 8\ln 32 + 8((l+2)(\ln(l+2) + \ln(2m)) \\
&\quad + \frac{1}{2}\ln(l+2) - (l+2) + 0.93)\Big) \\
&= (l+2)\Big(8(l+2)(\ln(l+2) + \ln(2m)) \\
&\quad + \underbrace{8 \cdot 0.93 + 4 + 8\ln 32 - 8(l+2) + 4\ln(l+2)}_{<0}\Big) \\
&\leqslant 8(l+2)^2(\ln(l+2) + \ln(2m)) \leqslant 8(l+2)^2(\ln(lm) + 1). \qquad (43)
\end{aligned}
$$

□

Замечание 3. Если приводить выражение (43) к виду $cl^2\ln(lm+1)$, используемому в оригинальной формулировке леммы 1, то

$$c = 8 \cdot \frac{81}{49}\Big(1 + \frac{1}{\ln 7}\Big) \approx 20.$$

Список литературы

1. Т. В. Арак, А. Ю. Зайцев, *Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — Тр. МИАН СССР **174** (1986), 3–214.
2. А. Ю. Зайцев, *К многомерному обобщению метода треугольных функций.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **158** (1987), 81–104.
3. Т. В. Арак, *О сближении n-кратных сверток распределений, имеющих неотрицательную характеристическую функцию, с сопровождающими законами.* — Теория вероятн. и ее примен. **25**, No. 2 (1980), 225–246.

4. Я. С. Голикова, *О вычислении констант в неравенствах Арака для функций концентрации вероятностных распределений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **475** (2019), 86–97.

Golikova Ia. S. Calculation of constant values in lemma about functions $w(x)$ and $g(t)$ at method of smooth triangular functions.

In this paper, we consider the method of smooth triangular functions. For one of the key lemmas of the method, all constants involved in the formulation are calculated.

С.-Петербургский государственный
университет, Университетская наб. 7/9
С.-Петербург, 199034 Россия;
Балтийский государственный технический
университет "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова
1-я Красноармейская, д.1
Санкт-Петербург, 190005 Россия
E-mail: laviniaspb@gmail.com

Поступило 21 октября 2020 г.