Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 495, 2020 г.

Е. С. Гарай

О СХОДИМОСТИ К УСТОЙЧИВОМУ ПРОЦЕССУ В СИСТЕМЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ С МНОГОМЕРНОЙ НАГРУЗКОЙ ПРИ ДОМИНИРУЮЩЕЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

1. Введение

Настоящая работа продолжает исследование, начатое в [1]. Речь идет о математических моделях, которые описывают динамику во времени и в пространстве различных нагрузок системы, создаваемых потоком вызовов. При описании поведения нагрузки системы в макроскопической временной шкале возникает широкий спектр аппроксимационных результатов, причем особенности предельных процессов, как правило, определяются тяжестью хвостов распределений величины ресурса и времени обслуживания отдельных вызовов. Основополагающей работой в этой области является статья И. Кая и М. Такку [2]. Подробное изложение рассматриваемой математической модели можно найти в монографии М. А. Лифшица [3].

Особенность данной работы состоит в предположении, что в системе потребляется *многомерный* ресурс, что может пониматься как множество разных типов потребляемых системой ресурсов, при этом каждому типу ресурса сопоставляется соответствующая координата.

Основной результат работы – теорема о сходимости конечномерных распределений процесса суммарной нагрузки с многомерным ресурсом к соответствующим распределениям многомерного устойчивого процесса.

В работе [1] в аналогичной теореме рассматривается область параметров, при которых хвосты распределения величины нормы вектора ресурсов тяжелее аналогичных хвостов распределения величин длительности обслуживания. Такая ситуация приводит к появлению процессов обслуживания, требующих большого количества ресурсов,

---

Ключевые слова: модель системы обслуживания, процесс суммарной нагрузки, многомерный ресурс, многомерный устойчивый процесс, сходимость конечномерных распределений.

т.е. ресурсы доминируют и определяют предельное поведение нагрузки. Оставался открытым вопрос о предельном поведении суммарной нагрузки, когда длительности обслуживания превалируют над величинами многомерных ресурсов. Настоящая работа в целом закрывает этот вопрос. Остается открытым вопрос, когда поведение хвостов распределения величин длительности обслуживания и величин норм многомерных ресурсов асимптотически одинаковы.

2. Описание математической модели системы обслуживания

Остановимся подробнее на математическом описании изучаемой системы обслуживания.

Предположим, что при функционировании системы не возникает очередей и отказов. Также полагаем, что время нахождения абонента в системе и занимаемый им ресурс независимы. Времена начальных моментов обслуживания поступающих вызовов (заявок) представляют собой моменты скачков пуассоновского случайного процесса, заданного на всей временной оси. Каждое обслуживание длится случайный отрезок времени и включается в общую нагрузку. Вводится случайная величина, характеризующая суммарный ресурс, потребляемый в течение всего периода обслуживания.

Вызовы происходят в точках, описываемых пуассоновской случайной мерой $N(dt)$ интенсивности $\lambda > 0$. Эти точки соответствуют моментам скачков двустороннего процесса Пуассона, который можно представить следующим образом: при $t \geqslant 0$

$$N(t) := \max\Big\{l > 0 : \sum_{k=1}^{l} \tau_k \leqslant t\Big\} \mathbb{1}_{[0,t]}(\tau_1),$$

а при $t \leqslant 0$

$$N(t) := \min\Big\{l < 0 : \sum_{k=l}^{-1} \tau_k < -t\Big\} \mathbb{1}_{[0,-t)}(\tau_{-1}),$$

где τ_k, $k = \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots,$ – независимые экспоненциально распределенные с параметром λ случайные величины,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(\tau_k < t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t).$$

Введем величины U_k, $k \in \mathbb{Z}$, – длительности обслуживания вызовов, независимые одинаково распределенные неотрицательные случайные величины с конечными средними, и $\vec{R}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, – ресурсы, потребляемые вызовами, независимые одинаково распределенные n-мерные случайные векторы с неотрицательными координатами и конечными средними.

Теперь выразим интересующие нас характеристики системы обслуживания через интеграл Стилтьеса по двустороннему пуассоновскому процессу $N(t)$, $t \in \mathbf{R}$. Пусть n-мерные случайные векторы $\vec{R}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, случайные величины U_k, $k \in \mathbb{Z}$, и процесс $N(t)$, $t \in \mathbf{R}$, независимы. Мгновенная нагрузка на систему в момент времени ρ определяется следующим образом:

$$\vec{M}(\rho) := \int\limits_{\mathbf{R}} \vec{R}_{N(s)} \mathbb{1}_{[s,s+U_{N(s)}]}(\rho)\, dN(s),$$

а интегральная нагрузка на систему на интервале времени $[0,t]$ задается выражением

$$\vec{I}(t) := \int\limits_0^t \vec{M}(\rho)\, d\rho = \int\limits_{\mathbf{R}} \vec{R}_{N(s)} \ell_t(s, U_{N(s)})\, dN(s), \tag{2.1}$$

где

$$\ell_t(s,u) := \int\limits_0^t \mathbb{1}_{[s,s+u]}(\rho)\, d\rho = |[s,s+u] \cap [0,t]|, \quad u \geqslant 0.$$

Здесь $|\cdot|$ обозначает длину интервала.

В силу формулы

$$\mathbf{E} \int\limits_v^t f(s, \vec{Y}_{N(s)})\, dN(s) = \lambda \int\limits_v^t \mathbf{E} f(s, \vec{Y}_1)\, ds, \quad v < t, \tag{2.2}$$

где $\vec{Y}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, – независимые одинаково распределенные случайные векторы, не зависящие от процесса N, среднее мгновенной нагрузки имеет вид:

$$\mathbf{E}\vec{M}(\rho) = \lambda \int\limits_{\mathbf{R}} \mathbf{E}\vec{R}_1 \mathbb{1}_{[s,s+U_1]}(\rho)\, ds = \lambda \mathbf{E}\vec{R}_1 \mathbf{E}U_1.$$

Здесь мы применяем (2.2) и используем предел при $v \to -\infty$ и $t \to \infty$. Поэтому

$$\mathbf{E}\vec{I}(t) = \lambda t \mathbf{E}\vec{R}_1 \mathbf{E}U_1.$$

Работа посвящена изучению предельного поведения центрированного и нормированного процесса интегральной нагрузки

$$\vec{Z}_a(t) := a^{-1/\gamma}\Big(\vec{I}(at) - \lambda at \mathbf{E}\vec{R}_1 \mathbf{E}U_1\Big) \tag{2.3}$$

при $a \to \infty$. Показатель $\gamma \in (1, 2]$ выбирается в зависимости от условий, накладываемых на распределения величин $\vec{R}_1$ и U_1.

3. Сходимость к устойчивому процессу

Пусть S_n^+ – область единичной сферы в $\mathbf{R}^n$ с неотрицательными координатами. Пусть $\mathcal{P}_{|\vec{R}_1|}(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{B}([0, \infty))$, – распределение случайной величины $|\vec{R}_1|$ и D – носитель этого распределения. Будем предполагать, что при $\mathcal{P}_{|\vec{R}_1|}$-почти всех $r \in D$ определено (см. [4, § 7]) условное распределение

$$\mathcal{P}_r(\Theta) := \mathbf{P}\Big(\frac{\vec{R}_1}{|\vec{R}_1|} \in \Theta \Big| |\vec{R}_1| = r\Big), \quad \Theta \in \mathcal{B}(S_n^+), \tag{3.1}$$

где $\mathcal{B}(S_n^+)$ – борелевская σ-алгебра на S_n^+.

Теорема 3.1. *Предположим, что при $r \to \infty$ и $u \to \infty$*

$$\mathbf{P}(|\vec{R}_1| \geqslant r) \sim \frac{c_r}{r^\delta}, \quad \mathbf{P}(U_1 \geqslant u) \sim \frac{c_u}{u^\gamma}, \tag{3.2}$$

где $1 < \gamma < \delta \leqslant 2$. Положим, что при $r \in D$ и $r \to \infty$ распределения $\mathcal{P}_r$ слабо сходятся к некоторому распределению Λ, заданному на σ-алгебре $\mathcal{B}(S_n^+)$, т.е.

$$\mathcal{P}_r(\,\cdot\,) \Rightarrow \Lambda(\,\cdot\,). \tag{3.3}$$

Тогда конечномерные распределения процесса $\vec{Z}_a(t)$, $t \geqslant 0$, сходятся при $a \to \infty$ к конечномерным распределениям многомерного устойчивого процесса, логарифм характеристической функции которого имеет вид

$$\ln(\varphi(\vec{\beta})) = -t\lambda c_u \mathbf{E}|\vec{R}_1|^\gamma \frac{\Gamma(2-\gamma)}{(\gamma-1)}\Big|\cos\Big(\frac{\pi\gamma}{2}\Big)\Big|$$
$$\times \int\limits_{\vec{s} \in S_n^+} |(\vec{\beta}, \vec{s})|^\gamma \big(1 + i\,\mathrm{sign}(\vec{\beta}, \vec{s})\,\mathrm{tg}\,\Big(\frac{\pi\gamma}{2}\Big)\big)\Lambda(d\vec{s}).$$

Замечание 3.1. В данной теореме рассматривается область параметров $1 < \gamma < \delta \leqslant 2$, при которых хвосты распределения величины U_1 тяжелее аналогичных хвостов распределения величины $|\vec{R}_1|$. Такая ситуация приводит к появлению достаточно долгих процессов обслуживания, которые определяют предельное поведение нагрузки.

Доказательство теоремы 3.1. В силу (3.2), справедливы соотношения (см. [3, с. 230, 240])

$$\mathbf{E}|\vec{R}_1|^{\delta'} < \infty, \quad \mathbf{E}U_1^{\gamma'} < \infty, \tag{3.4}$$

$$\mathbf{P}(U_1 \geqslant v) \leqslant \frac{C}{v^\gamma} \tag{3.5}$$

при всех $0 < \gamma' < \gamma$ и $\gamma < \delta' < \delta$, $v > 0$. Положим $V_1 := |\vec{R}_1| U_1$. Тогда при предположении (3.2) (см. [3, формулы 13.40 и 13.41])

$$\mathbf{P}(V_1 \geqslant v) \leqslant \frac{C}{v^\gamma} \quad \text{при} \quad v > 0, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{P}(V_1 \geqslant v) \sim \frac{c_u \mathbf{E}|\vec{R}_1|^\gamma}{v^\gamma} \quad \text{при} \quad v \to \infty. \tag{3.7}$$

Для доказательства сходимости конечномерных распределений преобразуем интегральную нагрузку. Разобьем процесс $\vec{I}(t)$ на составляющие, выделив главную часть и части, вклад которых в предельное поведение после нормировки будет пренебрежимо мал. При этом учтем, что (3.4) влечет выполнение условия $\mathbf{E}|\vec{R}_1|^\gamma < \infty$. Функцию $\ell_t(s,u)$ запишем в виде суммы

$$\ell_t(s,u) = \ell_t(s,u)\mathbb{1}_{[0,t]}(u) + \ell_t(s,u)\mathbb{1}_{(t,\infty)}(u). \tag{3.8}$$

Второе слагаемое в (3.8) обозначим $\ell_t^{(4)}(s,u)$.

Первое из этих слагаемых можно представить в следующем виде:

$$\ell_t(s,u)\mathbb{1}_{[0,t]}(u) = u\mathbb{1}_{[0,t]}(s) - u\mathbb{1}_{[0,t]}(s)\mathbb{1}_{(t,\infty)}(u) + \mathbb{1}_{[-u,0]}(s)(s+u)\mathbb{1}_{[0,t]}(u)$$
$$- \mathbb{1}_{[t-u,t]}(s)(s+u-t)\mathbb{1}_{[0,t]}(u) =: \sum_{j=0}^{3} \ell_t^{(j)}(s,u). \tag{3.9}$$

При фиксированных u и t график первого слагаемого в (3.8) представляет собой трапецию высоты u, нижнее основание которой является отрезком $[-u,t]$, а верхнее – отрезком $[0,t-u]$. Основная цель разбиения (3.9) состоит в выделении первых двух слагаемых, которые являются ступенчатыми функциями от s. Это делается с помощью трансформации трапеции в прямоугольник. При этом главное значение в (3.9) будет иметь первое слагаемое $u\mathbb{1}_{[0,t]}(s)$, в котором нет ограничения на значение параметра u.

Сходимость одномерных распределений векторного процесса $\vec{Z}_a(t)$, $t \geqslant 0$, будет следовать из сходимости характеристических функций

$$\varphi_a(\vec{\beta}) := \mathbf{E}\exp\bigl(i(\vec{\beta}, \vec{Z}_a(t))\bigr), \qquad \vec{\beta} \in \mathbf{R}^n.$$

Обозначим $\widetilde{R}_k := (\vec{\beta}, \vec{R}_k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$(\vec{\beta}, \vec{I}(t)) = \sum_{j=0}^{4} \int_{\mathbf{R}} \widetilde{R}_{N(s)} \ell_t^{(j)}(s, U_{N(s)})\, dN(s) =: \sum_{j=0}^{4} I_j(t).$$

Слагаемое

$$I_0(t) = \int\limits_0^t \widetilde{R}_{N(s)} U_{N(s)}\, dN(s) = \sum_{k=1}^{N(t)} \widetilde{R}_k U_k, \quad t \geqslant 0,$$

является сложным процессом Пуассона, характеристическая функция которого имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\exp\bigl(iI_0(t)\bigr) &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{E}\exp\Bigl(i\sum_{k=1}^{l} \widetilde{R}_k U_k\Bigr) \frac{(\lambda t)^l}{l}\, e^{-\lambda t} \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \bigl(\mathbf{E}e^{i\widetilde{R}_1 U_1}\bigr)^l \frac{(\lambda t)^l}{l}\, e^{-\lambda t} &= \exp\Bigl(\lambda t\bigl(\mathbf{E}e^{i\widetilde{R}_1 U_1} - 1\bigr)\Bigr), \quad \beta \in \mathbf{R}. \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Именно слагаемое $I_0(t)$, $t \geqslant 0$, будет при $a \to \infty$ давать основной вклад в асимптотическое поведение процесса $\vec{Z}_a(t)$. Для того чтобы убедиться в этом, оценим абсолютные моменты величин $I_j(t)$, $j = 1, \ldots, 4$, принимая во внимание (3.4) и (3.5). В силу (2.2), имеем

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}|I_1(t)| \leqslant |\vec{\beta}|\mathbf{E}\int_0^t |\vec{R}_{N(s)}| U_{N(s)} \mathbb{1}_{(t,\infty)}(U_{N(s)})\, dN(s) \\ &= |\vec{\beta}|\lambda \int_0^t \mathbf{E}(|\vec{R}_1| U_1 \mathbb{1}_{(t,\infty)}(U_1))\, ds = |\vec{\beta}|\lambda t \mathbf{E}|\vec{R}_1| \mathbf{E}(U_1 \mathbb{1}_{(t,\infty)}(U_1)) \\ &\leqslant |\vec{\beta}|\lambda t^{2-\gamma} \mathbf{E}|\vec{R}_1| \frac{C\gamma}{\gamma - 1},\end{aligned}$$

так как

$$\mathbf{E}(U_1 \mathbb{1}_{(t,\infty)}(U_1)) = \int\limits_0^\infty u \mathbb{1}_{(t,\infty)}(u)\, dF_U(u) = -\int\limits_t^\infty u\, d(1 - F_U(u))$$

$$= t(1 - F_U(t)) + \int\limits_t^\infty (1 - F_U(u))\, du \leqslant Ct^{1-\gamma}$$

$$C \int\limits_t^\infty u^{-\gamma}\, du = \frac{C\gamma}{\gamma - 1} t^{1-\gamma}.$$

Далее имеем

$$\mathbf{E}|I_2(t)| \leqslant |\vec{\beta}|\mathbf{E}|\vec{R}_1|\lambda \int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}((s + U_1)\mathbb{1}_{[0,t]}(U_1)\mathbb{1}_{[-U_1,0]}(s))\, ds$$

$$\leqslant |\vec{\beta}|\lambda \mathbf{E}|\vec{R}_1|\mathbf{E}\Big(\mathbb{1}_{[0,t]}(U_1) \int_{-U_1}^0 (s + U_1)\, ds\Big)$$

$$= \frac{|\vec{\beta}|\lambda}{2}\mathbf{E}|\vec{R}_1|\mathbf{E}(\mathbb{1}_{[0,t]}(U_1))U_1^2) \leqslant \frac{|\vec{\beta}|\lambda}{2}\mathbf{E}|\vec{R}_1| t^{2-\gamma+\varepsilon}\mathbf{E}U_1^{\gamma-\varepsilon},$$

где ε выбирается из условия $0 < \varepsilon < (\gamma - 1)^2/\gamma$. Очевидно $\varepsilon < \gamma$.

Аналогично

$$\mathbf{E}|I_3(t)| \leqslant |\vec{\beta}|\mathbf{E}|\vec{R}_1|\lambda \int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}((s + U_1 - t)\mathbb{1}_{[0,t]}(U_1)\mathbb{1}_{[t-U_1,t]}(s))\, ds$$

$$\leqslant \frac{|\vec{\beta}|\lambda}{2}\mathbf{E}|\vec{R}_1|\mathbf{E}(U_1^2 \mathbb{1}_{[0,t]}(U_1)) \leqslant \frac{|\vec{\beta}|\lambda}{2} t^{2-\gamma+\varepsilon}\mathbf{E}|\vec{R}_1|\mathbf{E}U_1^{\gamma-\varepsilon}.$$

Как при оценке $\mathbf{E}|I_1(t)|$ получаем

$$\mathbf{E}|I_4(t)| \leqslant |\vec{\beta}|\mathbf{E}|\vec{R}_1|\lambda t \int_{\mathbf{R}} \mathbf{E}((\mathbb{1}_{(t,\infty)}(U_1)\mathbb{1}_{[-U_1,t]}(s))\, ds$$

$$= |\vec{\beta}|\lambda \mathbf{E}|\vec{R}_1| t\mathbf{E}((t + U_1)\mathbb{1}_{(t,\infty)}(U_1)) \leqslant 2|\vec{\beta}|\lambda \mathbf{E}|\vec{R}_1| t^{2-\gamma}\frac{C\gamma}{\gamma - 1}.$$

В результате получаем, что при $k = 1, \ldots, 4$ и $a \geqslant 1$

$$a^{-1/\gamma}\mathbf{E}|I_k(at)| \leqslant |\vec{\beta}|\lambda \mathbf{E}|\vec{R}_1| t^{2-\gamma}(1+t^\varepsilon) a^{-(\gamma-1)^2/\gamma+\varepsilon}\Big(\mathbf{E}U_1^{\gamma-\varepsilon} + \frac{3C\gamma}{\gamma-1}\Big).$$

За счет выбора ε при $a \to \infty$ величины $a^{-1/\gamma}I_k(at)$ стремятся в среднем к нулю и не влияют на предельное поведение характеристической функции $\varphi_a(\vec{\beta})$. Следовательно, они не влияют на сходимость конечномерных распределений процесса $\vec{Z}_a(t))$, $t \geqslant 0$.

Таким образом, наша задача сводится к изучению предельного поведения процесса

$$\widetilde{Z}_a^\circ(t) := a^{-1/\gamma}\big(I_0(at) - \lambda at\mathbf{E}\widetilde{R}_1\mathbf{E}U_1\big).$$

Поскольку сложный процесс Пуассона $I_0(at)$ является однородным процессом с независимыми приращениями, то для сходимости конечномерных распределений процесса $\widetilde{Z}_a^\circ(t)$, $t \geqslant 0$, достаточно установить (см., например, [5] с. 36) сходимость одномерных распределений. В результате, наша задача трансформируется в задачу изучения предельного поведения характеристической функции

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_a(\vec{\beta}) &:= \mathbf{E}\exp\big(ia^{-1/\gamma}\big(I_0(at) - \lambda at\mathbf{E}\widetilde{R}_1\mathbf{E}U_1\big)\big)\\ &= \mathbf{E}\exp\left(ia^{-1/\gamma}\left(\sum_{k=1}^{N(at)}\widetilde{R}_kU_k - \lambda at\mathbf{E}\widetilde{R}_1\mathbf{E}U_1\right)\right).\end{aligned}$$

Согласно (3.10),

$$\widetilde{\varphi}_a(\vec{\beta}) = \exp\Big(\lambda at\mathbf{E}\big(e^{ia^{-1/\gamma}\widetilde{R}_1U_1} - 1 - ia^{-1/\gamma}\widetilde{R}_1U_1\big)\Big). \tag{3.11}$$

Формула (3.11) является основной для дальнейшего изучения предельного поведения интегральной нагрузки.

Пусть $\{\vec{\theta}_r\}_{r\geqslant 0}$ – такое семейство случайных величин, зависящее от параметра $r \in D$, где D – носитель распределения $\mathcal{P}_{|\vec{R}_1|}$, что для любого измеримого множества $\Theta \in \mathcal{B}(S_n^+)$

$$\mathbf{P}(\vec{\theta}_r \in \Theta) := \mathbf{P}\Big(\frac{\vec{R}_1}{|\vec{R}_1|} \in \Theta\Big||\vec{R}_1| = r\Big).$$

Это имеет место, так как условное распределение является распределением, а по любому распределению можно построить случайную величину с заданным распределением.

Применяя (3.11), получим

$$\widetilde{\varphi}_a(\vec{\beta}) = \exp\Bigg(\lambda at \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\Big\{\Big(e^{ia^{-1/\gamma}(\vec{\beta},\vec{R}_1)u} - 1 - i\frac{(\vec{\beta},\vec{R}_1)u}{a^{1/\gamma}}\Big)\Big||\vec{R}_1| = r\Big\} dF_{U_1}(u)dF_{|\vec{R}_1|}(r)\Bigg)$$

$$= \exp\Bigg(\lambda at \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\Big(e^{ia^{-1/\gamma}(\vec{\beta},\vec{\theta}_r)ru} - 1 - i\frac{(\vec{\beta},\vec{\theta}_r)ru}{a^{1/\gamma}}\Big) dF_{U_1}(u)dF_{|\vec{R}_1|}(r)\Bigg).$$

Здесь и далее $F_X(x)$, $x \geqslant 0$, – функция распределения неотрицательной случайной величины X.

Пусть $\vec{\theta}$ – случайная величина с распределением $\Lambda(\Theta)$, $\Theta \in \mathcal{B}(S_n^+)$. По условию теоремы,

$$\mathbf{P}(\vec{\theta}_r \in \Theta) \to \mathbf{P}(\vec{\theta} \in \Theta) \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{3.12}$$

По лемме Скорохода (см. [6, с. 14]), из (3.12) следует, что на некотором новом вероятностном пространстве можно построить такие случайные величины $\vec{\theta}'_r$, $\vec{\theta}'$, которые имеют такие же распределения как у величин $\vec{\theta}_r$, $\vec{\theta}$ соответственно, и $\vec{\theta}'_r \to \vec{\theta}'$ при $r \to \infty$ по вероятности. Так как норма этих величин равна единице, то отсюда следует, что

$$\mathbf{E}|\vec{\theta}'_r - \vec{\theta}'| \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{3.13}$$

Выберем сколь угодно малое $\varepsilon > 0$, и для логарифма характеристической функции $\widetilde{\varphi}_a(\vec{\beta})$ напишем разложение

$$\frac{\ln(\widetilde{\varphi}_a(\vec{\beta}))}{\lambda t} = a \int\limits_0^{a^{1/\gamma}\varepsilon} \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\Big(e^{ia^{-1/\gamma}(\vec{\beta},\vec{\theta}'_r)ru} - 1 - i\frac{(\vec{\beta},\vec{\theta}'_r)ru}{a^{1/\gamma}}\Big) dF_{U_1}(u)dF_{|\vec{R}_1|}(r)$$

$$+a \int\limits_{a^{1/\gamma}\varepsilon}^\infty \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\Big(e^{ia^{-1/\gamma}(\vec{\beta},\vec{\theta}'_r)ru} - e^{ia^{-1/\gamma}(\vec{\beta},\vec{\theta}')ru} - i\frac{(\vec{\beta},\vec{\theta}'_r - \vec{\theta}')ru}{a^{1/\gamma}}\Big) dF_{U_1}(u)dF_{|\vec{R}_1|}(r)$$

$$+a \int\limits_{a^{1/\gamma}\varepsilon}^\infty \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\Big(e^{ia^{-1/\gamma}(\vec{\beta},\vec{\theta}')ru} - 1 - i\frac{(\vec{\beta},\vec{\theta}')ru}{a^{1/\gamma}}\Big) dF_{U_1}(u)dF_{|\vec{R}_1|}(r) =: J_1 + J_2 + J_3.$$

Рассмотрим каждое из слагаемых в этом разложении.

Применяя неравенство $|e^{ix}-1-ix| \leqslant 2|x|^{\delta'}$, при $\gamma < \delta' < \delta$ получим, что для величины J_1 справедлива оценка:

$$|J_1| \leqslant 2a \int\limits_0^{a^{1/\gamma}\varepsilon} \int\limits_0^{\infty} \mathbf{E}(a^{-1/\gamma}|(\vec{\beta}, \vec{\theta}'_r)|ru)^{\delta'} dF_{U_1}(u) dF_{|\vec{R}_1|}(r).$$
$$\leqslant 2|\vec{\beta}|^{\delta'} \mathbf{E}|\vec{R}_1|^{\delta'} a \int_0^{a^{1/\gamma}\varepsilon} (a^{-1/\gamma}u)^{\delta'} dF_{U_1}(u).$$

Делая замену переменной $a^{-1/\gamma}u = z$, используя формулу интегрирования по частям и (3.5), получим

$$|J_1| \leqslant -2|\vec{\beta}|^{\delta'} \mathbf{E}|\vec{R}_1|^{\delta'} a \int\limits_0^{\varepsilon} z^{\delta'} d\big(1 - F_{U_1}(a^{1/\gamma}z)\big)$$
$$= -2|\vec{\beta}|^{\delta'} \mathbf{E}|\vec{R}_1|^{\delta'} a \left(\varepsilon^{\delta'}\big(1 - F_{U_1}(a^{1/\gamma}\varepsilon)\big) - \delta' \int\limits_0^{\varepsilon} z^{\delta'-1}\big(1 - F_{U_1}(a^{1/\gamma}z)\big) dz\right)$$
$$\leqslant 2C|\vec{\beta}|^{\delta'} \mathbf{E}|\vec{R}_1|^{\delta'} \delta' \int\limits_0^{\varepsilon} z^{\delta'-\gamma-1} dz = C|\vec{\beta}|^{\delta'} \mathbf{E}|\vec{R}_1|^{\delta'} \varepsilon^{\delta'-\gamma} \frac{2\delta'}{\delta'-\gamma},$$

где константа C взята из оценки (3.5). В силу выбора ε, величина J_1 является сколь угодно малой.

Для J_2, ввиду неравенства $|e^{iy} - e^{ix}| \leqslant |y - x|$, очевидна следующая оценка:

$$|J_2| \leqslant 2a \int\limits_{a^{1/\gamma}\varepsilon}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} a^{-1/\gamma} \mathbf{E}|(\vec{\beta}, \vec{\theta}'_r) - (\vec{\beta}, \vec{\theta}')|ru \, dF_{U_1}(u) \, dF_{|\vec{R}_1|}(r)$$
$$\leqslant 2|\vec{\beta}| \mathbf{E}U_1 a \int_{\varepsilon}^{\infty} \mathbf{E}|\vec{\theta}'_{a^{1/\gamma}z} - \vec{\theta}'|z \, dF_{|\vec{R}_1|}(a^{1/\gamma}z).$$

В силу (3.13), для любого сколь угодно малого $\eta > 0$ существует такое $r_0 > 0$, что для всех $r \geqslant r_0$ выполняется оценка $\mathbf{E}|\vec{\theta}'_r - \vec{\theta}'| < \eta$. Тогда для всех $z \geqslant \varepsilon$ и $a \geqslant (r_0/\varepsilon)^\gamma$ имеем $a^{1/\gamma}z \geqslant r_0$. При таких a и z выполняется оценка $\mathbf{E}|\vec{\theta}'_{a^{1/\gamma}z} - \vec{\theta}'| < \eta$, применяя которую, получаем

$$|J_2| \leqslant 2|\vec{\beta}|\mathbf{E}U_1\eta a \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} z dF_{|\vec{R}_1|}(a^{1/\gamma}z) = -2|\vec{\beta}|\mathbf{E}U_1\eta a \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} z d\big(1 - F_{|\vec{R}_1|}(a^{1/\gamma}z)\big)$$

$$= 2|\vec{\beta}|\mathbf{E}U_1\eta\bigg(a\varepsilon\big(1 - F_{|\vec{R}_1|}(a^{1/\gamma}\varepsilon)\big) + a\int_{\varepsilon}^{\infty}\big(1 - F_{|\vec{R}_1|}(a^{1/\gamma}z)\big)dz\bigg)$$

$$\leqslant 2|\vec{\beta}|\mathbf{E}U_1\eta\bigg(C\varepsilon^{1-\gamma} + C\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dz}{z^{\gamma}}\bigg) = 2|\vec{\beta}|\mathbf{E}U_1 C\eta\varepsilon^{1-\gamma}\frac{\gamma}{\gamma-1},$$

где константа C взята из оценки (3.5). По уже выбранному ε мы выберем η так, чтобы $\eta\varepsilon^{1-\gamma}$ было сколь угодно малым.

Рассмотрим последнее слагаемое J_3. Воспользуемся следующим представлением:

$$J_3 = -a\int\limits_{0}^{a^{1/\gamma}\varepsilon}\int\limits_{0}^{\infty}\mathbf{E}\Big(e^{ia^{-1/\gamma}(\vec{\beta},\vec{\theta}')ru} - 1 - i\frac{(\vec{\beta},\vec{\theta}')ru}{a^{1/\gamma}}\Big)dF_{U_1}(u)dF_{|\vec{R}_1|}(r)$$

$$+ a\int\limits_{0}^{\infty}\mathbf{E}\Big(e^{ia^{-1/\gamma}(\vec{\beta},\vec{\theta}')v} - 1 - i\frac{(\vec{\beta},\vec{\theta}')v}{a^{1/\gamma}}\Big)dF_{V_1}(v) =: -J_3^1 + J_3^2.$$

Слагаемое J_3^1 оценивается точно так же, как J_1, и эта оценка является сколь угодно малой величиной. Для J_3^2 после замены переменной $a^{-1/\gamma}v = z$ напишем представление

$$J_3^2 = a\int\limits_{0}^{\varepsilon}\mathbf{E}\big(e^{i(\vec{\beta},\vec{\theta}')z} - 1 - i(\vec{\beta},\vec{\theta}')z\big)dF_{V_1}(a^{1/\gamma}z)$$

$$+ a\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\mathbf{E}\big(e^{i(\vec{\beta},\vec{\theta}')z} - 1 - i(\vec{\beta},\vec{\theta}')z\big)dF_{V_1}(a^{1/\gamma}z) =: J_3' + J_3''.$$

С учетом неравенства (3.6), слагаемое J_3' оценивается точно так же, как J_1. При этом можно взять $\delta' = 2$. К интегралу

$$J_3'' = -\mathbf{E}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\big(e^{i(\vec{\beta},\vec{\theta}')z} - 1 - i(\vec{\beta},\vec{\theta}')z\big)\, a\, d\big(1 - F_{V_1}(a^{1/\gamma}z)\big)$$

можно применить вторую теорему Хелли (см. [7, с. 211]), так как, согласно (3.7),

$$a(1 - F_{V_1}(a^{1/\gamma} z)) \sim \frac{c_u \mathbf{E}|\vec{R}_1|^\gamma}{z^\gamma} \quad \text{при} \quad a \to \infty.$$

В результате получим, что

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to\infty} J_3'' &= c_u \mathbf{E}|\vec{R}_1|^\gamma \gamma \mathbf{E} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \left(e^{i(\vec{\beta},\vec{\theta}')z} - 1 - i(\vec{\beta},\vec{\theta}')z\right) \frac{dz}{z^{\gamma+1}} \\
&= c_u \mathbf{E}|\vec{R}_1|^\gamma \gamma \int\limits_{\vec{s}\in S_n^+} \int_0^\infty \left(e^{i(\vec{\beta},\vec{s})z} - 1 - i(\vec{\beta},\vec{s})z\right) \frac{dz}{z^{\gamma+1}} \Lambda(d\vec{s}) \\
&- c_u \mathbf{E}|\vec{R}_1|^\gamma \gamma \mathbf{E} \int_0^{\varepsilon} \left(e^{i(\vec{\beta},\vec{\theta}')z} - 1 - i(\vec{\beta},\vec{\theta}')z\right) \frac{dz}{z^{\gamma+1}}.
\end{aligned}$$

Здесь второе слагаемое оценивается величиной

$$|\vec{\beta}|^2 c_u \mathbf{E}|\vec{R}_1|^\gamma \gamma \int_0^{\varepsilon} z^2 \frac{dz}{z^{\gamma+1}} = |\vec{\beta}|^2 c_u \mathbf{E}|\vec{R}_1|^\gamma \gamma \frac{\varepsilon^{2-\gamma}}{2-\gamma}.$$

За счет выбора ε это слагаемое может быть сделано сколь угодно малым. В результате проведенных вычислений мы получили, что

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\ln(\widetilde{\varphi}_a(\vec{\beta}))}{\lambda t} = c_u \mathbf{E}|\vec{R}_1|^\gamma \gamma \int\limits_{\vec{s}\in S_n^+} \int\limits_0^\infty \left(e^{i(\vec{\beta},\vec{s})z} - 1 - i(\vec{\beta},\vec{s})z\right) \frac{dz}{z^{\gamma+1}} \Lambda(d\vec{s}). \tag{3.14}$$

Рассматривая отдельно области $(\vec{\beta},\vec{s}) > 0$ и $(\vec{\beta},\vec{s}) < 0$ и принимая во внимание хорошо известные формулы (см., например, [8, с. 46])

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty (e^{ix} - 1 - ix) \frac{dx}{x^{1+\gamma}} &= e^{i\pi\gamma/2} \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\gamma(\gamma-1)}, \\
\int\limits_0^\infty (e^{-ix} - 1 + ix) \frac{dx}{x^{1+\gamma}} &= e^{-i\pi\gamma/2} \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\gamma(\gamma-1)},
\end{aligned}$$

получим, что

$$\int\limits_0^\infty \left(e^{i(\vec{\beta},\vec{s})z} - 1 - i(\vec{\beta},\vec{s})z\right)\frac{dz}{z^{\gamma+1}}$$
$$= \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\gamma(\gamma-1)}|(\vec{\beta},\vec{s})|^\gamma\Big(\cos\big(\frac{\pi\gamma}{2}\big) + \operatorname{sign}(\vec{\beta},\vec{s})\sin\big(\frac{\pi\gamma}{2}\big)\Big).$$

При $1 < \gamma < 2$ косинус в этой формуле принимает отрицательные значения. В связи с этим окончательный ответ для предельного выражения в (3.14) естественно записать в следующем виде:

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\ln(\widetilde{\varphi}_a(\vec{\beta}))}{\lambda t} = -c_u\mathbf{E}|\vec{R}_1|^\gamma\frac{\Gamma(2-\gamma)}{(\gamma-1)}\big|\cos\big(\frac{\pi\gamma}{2}\big)\big|$$
$$\times\int\limits_{\vec{s}\in S_n^+}|(\vec{\beta},\vec{s})|^\gamma\big(1 + i\operatorname{sign}(\vec{\beta},\vec{s})\operatorname{tg}\big(\frac{\pi\gamma}{2}\big)\big)\Lambda(d\vec{s}).$$

Эта формула соответствует логарифму характеристической функции многомерного устойчивого процесса с показателем $1 < \gamma < 2$. Теорема доказана. □

Список литературы

1. Е. С. Гарай, *О сходимости многомерной нагрузки в системе обслуживания к устойчивому процессу.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **466** (2017), 96–108.
2. I. Kaj, M. S. Taqqu, *Convergence to fractional Brownian motion and to the Telecom process: the integral representation approach*, in: "In and Out of Equilibtium. II.," ser.: Progress in Probability, **60**, pp. 383–427, Basel:Birkhäuser, 2008.
3. М. А. Лифшиц, *Случайные процессы – от теории к практике*, С.-Петербург: Лань, 2016.
4. А. Н. Ширяев, *Вероятность*, М.: Наука, 1980.
5. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями*, М., Наука, 1964.
6. А. В. Скороход, *Исследования по теории случайных процессов*, Киев: изд-во КГУ, 1961.
7. Б. В. Гнеденко, *Курс теории вероятностей*, М.: УРСС, 2004.
8. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины*, М.: Наука, 1965.

Garai E. S. On convergence of multidimensional workload with dominant service duration to a stable process.

A service system model introduced by I. Kai and M. S. Takku is considered. We prove a limit theorem on the convergence of finite-dimensional distributions of the total workload process with a multidimensional resource to the corresponding distributions of a multivariate stable process. The situation is considered when the service durations prevails over the values of multidimensional resources.

ГБНОУ СПбГДТЮ Аничков лицей,
Невский пр., 39, литер А,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: elena12578@mail.ru

Поступило 14 сентября 2020 г.