Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 495, 2020 г.

А. Н. Бородин

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ЛОКАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМ СНОСОМ

Рассматривается диффузия с кусочно постоянным сносом вида

$$\eta\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) + \mu\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

и коэффициентом диффузии 1. Назовем этот процесс броуновским движением с разрывным сносом. При $\mu = \eta$ эта диффузия включает в себе броуновское движение с линейным сносом, а при $\eta = -\mu$ она превращается в броуновское движение с переменным сносом, т.е. в диффузию с коэффициентом сноса $\mu \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbf{R}$. Краткая характеристика последнего процесса дана в параграфе 15 приложения 1 из [1], и ему посвящена работа С.-Е. Граверсена и А. Н. Ширяева [2].

Нас интересуют результат, позволяющий вычислять распределения интегральных функционалов по пространственной переменной от локального времени броуновского движения с разрывным сносом. Для броуновского локального времени такой результат подробно изложен в параграфе 5 гл. V из [3]. Отправной точкой для данного утверждения служит описание Рэя–Найта броуновского локального времени по пространственной переменной как марковского процесса (см. [4, 5]).

1. Броуновское движение с разрывным сносом

Обозначим этот процесс $W_\diamond(t)$, $t \geqslant 0$. Пусть $W_\diamond(0) = x$. Стандартный процесс броуновского движения обозначим $W(t)$.

Производящий оператор процесса $W_\diamond(t)$, $t \geqslant 0$, имеет вид:

$$\mathcal{G}f = \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2} + \big(\eta\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) + \mu\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\big)\frac{df}{dx}, \quad x \neq 0. \tag{1.1}$$

Область определения этого оператора – ограниченные непрерывно дифференцируемые функции.

Ключевые слова: броуновское движение с разрывным сносом, локальное время, распределение супремума локального времени.

Настоящая работа частично поддерживалась грантом РФФИ 19-01-00356.

Пусть τ – экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент времени, не зависящий от диффузии $W_\diamond(t)$, $t \geqslant 0$, и от броуновского движения W.

Рассмотрим преобразование Лапласа по времени от переходной плотности процесса $W_\diamond$:

$$G_z(x) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dz} \mathbf{E}_x(W_\diamond(t) < z)\, dt = \frac{d}{dz} \mathbf{P}_x(W_\diamond(\tau) < z). \tag{1.2}$$

Здесь и далее нижний индекс у вероятности и математического ожидания означает начальное состояние броуновского движения с разрывным сносом и броуновского движения соответственно.

Функция $G_z(x)$, $x \in \mathbf{R}$, при каждом $z \in \mathbf{R}$ является единственным непрерывным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2} G''(x) + \big(\eta \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) + \mu \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\big) G'(x) - \lambda G(x) = 0, \ \ x \in \mathbf{R} \setminus \{0, z\}, \tag{1.3}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2\lambda. \tag{1.4}$$

Эта задача, а, следовательно, и сам процесс $W_\diamond$, обладает свойством антисимметрии: распределения процесса не меняются при трансформации $x \leftrightarrow -x$, $z \leftrightarrow -z$, $\mu \leftrightarrow -\eta$, $\eta \leftrightarrow -\mu$.

Замечание 1.1. Решение уравнения (1.3) имеет место везде кроме точек 0 и z, в которых оно непрерывно, а в нуле считается, что оно имеет непрерывную производную.

Найдем явное решение задачи (1.3), (1.4). В силу свойства антисимметрии достаточно вычислить функцию $G_z(x)$ при $x < 0, z < 0$ и при $z < 0 < x$.

Решение задачи (1.3), (1.4) при $z < 0$ ищем в виде

$$G_z(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\sqrt{2\lambda + \eta^2}}\, e^{\eta(z-x) - |z-x|\sqrt{2\lambda+\eta^2}} & \\ \quad + A\, \dfrac{\lambda}{\sqrt{2\lambda + \eta^2}}\, e^{\eta(z-x) + (z+x)\sqrt{2\lambda+\eta^2}}, & x \leqslant 0, \\ B\, \dfrac{\lambda}{\sqrt{2\lambda + \eta^2}}\, e^{-\mu x + z(\eta + \sqrt{2\lambda+\eta^2}) - x\sqrt{2\lambda+\mu^2}}, & 0 \leqslant x. \end{cases}$$

В этом представлении мы учли, что оно является ограниченным и удовлетворяет уравнению (1.3), а также условию на скачок производной (1.4). Константы A и B нужно вычислить из условия непрерывности решения в нуле и непрерывности в нуле первой производной. Это приводит к системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A - B = -1, \\ A(\sqrt{2\lambda+\eta^2} - \eta) + B(\sqrt{2\lambda+\mu^2} + \mu) = \sqrt{2\lambda+\eta^2} + \eta. \end{cases}$$

Решение имеет вид

$$B = \frac{2\sqrt{2\lambda+\eta^2}}{\mu - \eta + \sqrt{2\lambda+\eta^2} + \sqrt{2\lambda+\mu^2}},$$
$$A = \frac{2\sqrt{2\lambda+\eta^2}}{\mu - \eta + \sqrt{2\lambda+\eta^2} + \sqrt{2\lambda+\mu^2}} - 1.$$

Таким образом, для преобразования Лапласа переходной плотности выводим формулу

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(W_\diamond(\tau) < z)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{\eta(z-x)}}{\sqrt{2\lambda+\eta^2}}\Big(e^{-|z-x|\sqrt{2\lambda+\eta^2}} - e^{(z+x)\sqrt{2\lambda+\eta^2}}\Big) \\ \quad + \dfrac{2\lambda e^{\eta(z-x)}}{\mu - \eta + \sqrt{2\lambda+\eta^2} + \sqrt{2\lambda+\mu^2}} e^{(z+x)\sqrt{2\lambda+\eta^2}}, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{2\lambda e^{\mu z - \eta x}}{\mu - \eta + \sqrt{2\lambda+\eta^2} + \sqrt{2\lambda+\mu^2}} e^{z\sqrt{2\lambda+\eta^2} - x\sqrt{2\lambda+\mu^2}}, & 0 \leqslant x. \end{cases} \tag{1.5}$$

Положим

$$\Delta_{\mu,\eta}(x,z) := \int_x^z \big(\eta \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(y) + \mu \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)\big)\,dy = \begin{cases} \eta(z-x), & x<0, z<0, \\ \eta z - \mu x, & z < 0 < x. \end{cases}$$

Явное выражение для других аргументов следует из очевидного равенства $\Delta_{\mu,\eta}(x,z) = \Delta_{-\eta,-\mu}(-x,-z)$.

Имеет место абсолютная непрерывность мер:

$$\frac{d\mathbf{P}_x^{(\diamond)}}{d\mathbf{P}_x}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\Big(\Delta_{\mu,\eta}(x, W(t)) + \frac{\eta-\mu}{2}\,\ell(t,0)$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^t \big(\eta^2 \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(W(s)) + \mu^2 \mathbb{1}_{[0,\infty)}(W(s))\big)\,ds\Big) \ \mathbf{P}_x\text{-п.н.}, \tag{1.6}$$

где $\mathbf{P}_x^{(\diamond)}$ and $\mathbf{P}_x$ – меры относительно броуновского движения с разрывным сносом и броуновского движения соответственно, $\mathcal{F}_t$ – σ-алгебра, порожденная броуновским движением до момента t и $\ell(t,0)$ – броуновское локальное время относительно меры Лебега, т.е.

$$\ell(t,0) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^t \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(W(s))ds.$$

Поскольку броуновское движение с разрывным сносом и броуновский процесс являются однородными марковскими процессами, то достаточно доказать аналог (1.6) для преобразований Лапласа по времени от переходных плотностей, т.е. следующее равенство:

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(W_\diamond(\tau)<z) = e^{\Delta_{\mu,\eta}(x,z)}\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\biggl\{\exp\biggl(\frac{\eta-\mu}{2}\,\ell(\tau,0)$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau \bigl(\eta^2\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(W(s))+\mu^2\mathbb{1}_{[0,\infty)}(W(s))\bigr)\,ds\biggr);W(\tau)<z\biggr\}. \qquad (1.7)$$

Здесь и далее для того чтобы упростить формулы, мы используем обозначение $\mathbf{E}\{\xi;A\} := \mathbf{E}\{\xi\mathbb{1}_A\}$.

Согласно формуле 1.1.27.5 из [1] при $r=0$ и $x<0, z<0$ или $z<0<x$

$$\frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Bigl\{\exp\Bigl(-\int\limits_0^\tau \bigl(\frac{\eta^2}{2}\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(W(s))+\frac{\mu^2}{2}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(W(s))\bigr)\,ds$$
$$+\frac{\eta-\mu}{2}\,\ell(\tau,0)\Bigr);W(\tau)<z\Bigr\}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{\sqrt{2\lambda+\eta^2}}\Bigl(e^{-|z-x|\sqrt{2\lambda+\eta^2}}-e^{(z+x)\sqrt{2\lambda+\eta^2}}\Bigr) & \\ \qquad+\dfrac{2\lambda}{\mu-\eta+\sqrt{2\lambda+\eta^2}+\sqrt{2\lambda+\mu^2}}e^{(z+x)\sqrt{2\lambda+\eta^2}}, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{2\lambda}{\mu-\eta+\sqrt{2\lambda+\eta^2}+\sqrt{2\lambda+\mu^2}}e^{z\sqrt{2\lambda+\eta^2}-x\sqrt{2\lambda+\mu^2}}, & 0\leqslant x.\end{cases}$$

Эта формула совместно с (1.5) доказывает (1.7), а, следовательно, и (1.6).

В силу абсолютной непрерывности мер у процесса $W_\diamond(s)$, $s\geqslant 0$, с вероятностью единица существует локальное время

$$\ell_\diamond(t,y) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^t \mathbb{1}_{(y-\varepsilon,y+\varepsilon)}(W_\diamond(s))ds,\quad y\in\mathbf{R}, \qquad (1.8)$$

так как оно существует у броуновского движения.

Так как локальное время имеет конечный носитель

$$\Big\{x : \inf_{0\leqslant s\leqslant t} W_d i(s) \leqslant x \leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant t} W_d i(s)\Big\},$$

то для любой локально интегрируемой функции g и любого $t > 0$

$$\int_0^t g(W_\diamond(s))\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\ell_\diamond(t,x)\,dx \qquad \text{п.н.,} \tag{1.9}$$

причем интеграл в правой части конечен. Это аналог соответствующего утверждения для броуновского движения (случай $\mu = \eta = 0$).

Из формулы (1.6) следует, что для любого ограниченного измеримого функционала $\wp(X(s), 0 \leqslant s \leqslant t)$ справедливо равенство

$$\mathbf{E}_x \wp\big(W_\diamond(s), 0 \leqslant s \leqslant t\big) = \mathbf{E}_x\Big\{\wp(W(s), 0 \leqslant s \leqslant t)\exp\Big(\Delta_{\mu,\eta}(x, W(t)) + \frac{\eta-\mu}{2}\ell(t,0) - \frac{1}{2}\int_0^t \big(\eta^2 \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(W(s)) + \mu^2 \mathbb{1}_{[0,\infty)}(W(s))\big)\,ds\Big)\Big\}. \tag{1.10}$$

Преобразование Лапласа по t в этом равенстве приводит к тому, что оно выполняется при τ вместо t. В частности, справедлива формула

$$\mathbf{E}_x\big\{\wp\big(W_\diamond(s), 0 \leqslant s \leqslant \tau\big); W_\diamond(\tau) \in dz\big\} = e^{\Delta_{\mu,\eta}(x,z)}\mathbf{E}\Big\{\wp(W(s), 0 \leqslant s \leqslant \tau)\exp\Big(\frac{\eta-\mu}{2}\ell(\tau,0) - \frac{1}{2}\int_0^\tau \big(\eta^2 \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(W(s)) + \mu^2 \mathbb{1}_{[0,\infty)}(W(s))\big)\,ds\Big); W(\tau) \in dz\Big\}. \tag{1.11}$$

2. Распределения функционалов от локального времени

Рассмотрим вопрос о том, как вычислять распределения функционалов от локального времени. Интегральный функционал от локального времени по пространственной переменной имеет вид

$$B(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\ell_\diamond(t,y))\,dy, \tag{2.1}$$

где $f(v)$, $v \in [0, \infty)$, – некоторая неотрицательная кусочно непрерывная функция. Для преобразования Лапласа распределения такого функционала будут получены явные формулы, выраженные в терминах решений дифференциальных уравнений второго порядка, удовлетворяющих некоторым граничным условиям. Имея выражения для преобразований Лапласа распределений неотрицательных интегральных функционалов от процесса, можно вычислять распределения функционалов типа супремума. Так, например, для вычисления супремума произвольного непрерывного процесса $X(y)$ можно воспользоваться соотношением (см. § 2 гл. III из [3])

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{a\leqslant y\leqslant b} X(y) \leqslant h\Big) = \lim_{\gamma\to\infty} \mathbf{E}\exp\Big(-\gamma\int_a^b \mathbb{1}_{(h,\infty)}(X(y))\,dy\Big). \qquad (2.2)$$

Во многих случаях, когда $\mathbf{E}\exp\Big(-\gamma\int_a^b \mathbb{1}_{[h,\infty)}(X(y))\,dy\Big)$ выражается с помощью решений некоторых дифференциальных уравнений, можно не вычислять математическое ожидание явно и не находить затем предел, а доказать, что предельное значение для этого математического ожидания также выражается с помощью решений аналогичных уравнений с некоторыми граничными условиями. Такой подход значительно упрощает вычисления. Он нами уже использовался при доказательстве теоремы 2.1 гл. III из [3] и теоремы 3.2 гл. IV из [3]. В этом параграфе будут получены результаты, которые позволяют вычислять совместные распределения функционала $B(t)$ и величины $\sup_{y\in\mathbf{R}} \ell_\diamond(t,y)$.

Вычисление распределений этих функционалов в фиксированный момент времени t сводится к вычислению распределений этих же функционалов, остановленных в случайный момент времени τ, который не зависит от броуновского движения W и имеет экспоненциальное распределение

$$\mathbf{P}(\tau \geqslant t) = e^{-\lambda t}, \qquad t \geqslant 0, \quad \lambda > 0. \qquad (2.3)$$

Достаточно применить обратное преобразование Лапласа по λ.

Теорема 2.1. *Пусть* $f(v), v \in [0,h]$, *– неотрицательная кусочно непрерывная функция, удовлетворяющая условию* $f(0)=0$. *Тогда*

$$\mathbf{E}_0\Big[\exp\Big(-\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\ell_\diamond(\tau,y))\,dy\Big); \sup_{y\in\mathbf{R}} \ell_\diamond(\tau,y) < h\Big]$$

$$= \lambda \int\limits_0^h \big(R_\mu(v)Q_{\mu,\eta}(v) + R_\eta(v)Q_{-\eta,-\mu}(v)\big)\,dv, \tag{2.4}$$

где функции $R_\alpha(v)$ *и* $Q_{\alpha,\beta}(v)$, $v \in [0,h]$, *являются ограниченными непрерывными решениями задачи*

$$2vR''_\alpha(v) - (\big(\lambda + \frac{\alpha^2}{2}\big)v + f(v))R_\alpha(v) = 0, \tag{2.5}$$

$$R_\alpha(0) = 1, \qquad R_\alpha(h) = 0, \tag{2.6}$$

$$2vQ''_{\alpha,\beta}(v) + 2Q'_{\alpha,\beta}(v) - \big(\big(\lambda + \frac{\alpha^2}{2}\big)v - \alpha + f(v)\big)Q_{\alpha,\beta}(v)$$

$$= -e^{(\beta-\alpha)v/2}R_\beta(v), \tag{2.7}$$

$$Q_{\alpha,\beta}(h) = 0. \tag{2.8}$$

Замечание 2.1. Для кусочно непрерывной функции f уравнения (2.5) и (2.7) должны пониматься следующим образом: они имеют место во всех точках непрерывности функции f, а в точках разрыва функции f их решения непрерывны вместе с первой производной.

Замечание 2.2. Очевидно, что задача (2.5), (2.6) имеет единственное решение. В случае $\alpha \leqslant 0$ можно гарантировать единственность ограниченного решения задачи (2.7), (2.8).

Действительно, при $\alpha \leqslant 0$ одно из линейно независимых решений однородного уравнения, отвечающего уравнению (2.7) в нуле, будет иметь логарифмическое поведение. Это уравнение можно записать в проинтегрированном виде следующим образом:

$$2v\phi'(v) - \int\limits_0^v \big(\big(\lambda + \frac{\alpha^2}{2}\big)s - \alpha + f(s)\big)\phi(s)\,ds = c,$$

где c – некоторая постоянная. Выбирая $c = 0$, мы видим, такое уравнение имеет решение ψ со следующими свойствами: $\psi(+0) = 1$, $\psi'(+0) = 0$, оно возрастает,

$$\psi'(v) \geqslant \big(\lambda + \frac{\alpha^2}{2}\big)v/4 - \frac{\alpha}{2}$$

и, следовательно,

$$\psi(v) \geqslant 1 + \bigl(\lambda + \frac{\alpha^2}{2}\bigr)v^2/8 - \frac{\alpha}{2}v.$$

Известно, что по одному из решений однородного дифференциального уравнения второго порядка явно восстанавливается другое линейно независимое решение. Для рассматриваемого уравнения линейно независимое решение φ можно представить в следующем виде:

$$\varphi(v) = \psi(v)\int\limits_v^\infty \frac{ds}{s\,\psi^2(s)}.$$

В силу этого, $\varphi(v) \asymp -\ln v$ при $v \downarrow 0$. Таким образом, уравнение (2.7) при $v \in [0,h]$ будет иметь единственное ограниченное решение при одном граничном условии $Q(h) = 0$.

Доказательство теоремы 2.1. Предположим сначала, что $h = \infty$ и f – ограниченная дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными первыми и вторыми производными. Поскольку в нижеприведенных вычислениях все подынтегральные функции положительны, а левая часть равенств является ограниченной величиной, то все интегралы сходятся. Используя (1.11), найдем

$$\mathbf{E}_0 \exp\Bigl(-\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\ell_\diamond(\tau,y))dy\Bigr) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}_0\Bigl\{\exp\Bigl(-\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\ell_\diamond(\tau,y))dy\Bigr); W_\diamond(\tau)\in dz\Bigr\}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\Delta_{\mu,\eta}(0,z)}\mathbf{E}_0\Bigl\{\exp\Bigl(-\int\limits_{-\infty}^{0}\bigl(f(\ell(\tau,y)) + \frac{\eta^2}{2}\ell(\tau,y)\bigr)\,dy$$

$$-\int\limits_0^\infty (f(\ell(\tau,y)) + \frac{\mu^2}{2}\ell(\tau,y))\,dy + \frac{\eta-\mu}{2}\ell(\tau,0)\Bigr); W(\tau)\in dz\Bigr\}$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\Delta_{\mu,\eta}(0,z)-|z|\sqrt{2\lambda}}\mathbf{E}_0\Bigl\{\exp\Bigl(-\int\limits_{-\infty}^{0}(f(\ell(\tau,y)) + \frac{\eta^2}{2}\ell(\tau,y))\,dy$$

$$-\int\limits_0^\infty \bigl(f(\ell(\tau,y)) + \frac{\mu^2}{2}\ell(\tau,y)\bigr)\,dy + \frac{\eta-\mu}{2}\ell(\tau,0)\Bigr)|W(\tau)=z\Bigr\}dz$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} \int\limits_0^\infty e^{z(\mu-\sqrt{2\lambda})} I_{\mu,\eta}(z)\,dz + \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} \int\limits_0^\infty e^{-z(\eta+\sqrt{2\lambda})} I_{-\eta,-\mu}(-z)\,dz, \tag{2.9}$$

где

$$I_{\alpha,\beta}(z) := \mathbf{E}_0^z \exp\biggl(- \int\limits_{-\infty}^0 \bigl(f(\ell(\tau,y)) + \frac{\beta^2}{2}\ell(\tau,y)\bigr)\,dy$$
$$- \int\limits_0^\infty \bigl(f(\ell(\tau,y)) + \frac{\alpha^2}{2}\ell(\tau,y)\bigr)\,dy + \frac{\beta-\alpha}{2}\ell(\tau,0)\biggr).$$

В этом определении мы использовали новое вероятностное пространство, которое порождено условными распределениями $\mathbf{P}_0^z(B) = \mathbf{P}_0(B|W(\tau)=z)$. Символы вероятности и математического ожидания, относящиеся к этому пространству, будем снабжать индексами z сверху и 0 снизу.

Для получения последнего равенства в (2.9) применено свойство симметрии броуновского движения, при $W(0)=0$ двумерные процессы $(-W(s),\ell(\tau,-y))$ и $(W(s),\ell(\tau,y))$ одинаково распределены.

Используя выражение для плотности распределения локального времени броуновского движения в новом вероятностном пространстве, имеем

$$I_{\mu,\eta}(z) = \sqrt{2\lambda} \int\limits_0^\infty e^{-v\sqrt{2\lambda}} \mathbf{E}_0^z \biggl\{ \exp\biggl(- \int\limits_{-\infty}^0 \bigl(f(\ell(\tau,y)) + \frac{\eta^2}{2}\ell(\tau,y)\bigr)\,dy$$
$$- \int\limits_0^\infty \bigl(f(\ell(\tau,y)) + \frac{\mu^2}{2}\ell(\tau,y)\bigr)\,dy + \frac{\eta-\mu}{2}\ell(\tau,0)\biggr)\bigg|\ell(\tau,z)=v\biggr\}\,dv.$$

Далее мы воспользуемся вычислениями §2 и §5 гл. V из [3]. Применяя теорему 2.1 гл. V из [3], т.е. марковское свойство локального времени броуновского движения в новом вероятностном пространстве, при $z > 0$ получаем

$$I_{\mu,\eta}(z) = \sqrt{2\lambda} \int\limits_0^\infty e^{-v\sqrt{2\lambda}}\, \bar r_\mu(z,v) \bar q_{\mu,\eta}(z,v)\,dv, \tag{2.10}$$

где

$$\bar r_\mu(z,v):=\mathbf{E}_0^z\biggl\{\exp\biggl(-\int\limits_z^\infty\bigl(f(\ell(\tau,y))+\frac{\mu^2}{2}\ell(\tau,y)\bigr)\,dy\biggr)\bigg|\ell(\tau,z)=v\biggr\},$$

$$\bar q_{\mu,\eta}(z,v):=\mathbf{E}_0^z\biggl\{\exp\biggl(-\int\limits_0^z\bigl(f(\ell(\tau,y))+\frac{\mu^2}{2}\ell(\tau,y)\bigr)\,dy$$

$$-\int\limits_{-\infty}^0\bigl(f(\ell(\tau,y))+\frac{\eta^2}{2}\ell(\tau,y)\bigr)\,dy+\frac{\eta-\mu}{2}\ell(\tau,0)\biggr)\bigg|\ell(\tau,z)=v\biggr\}.$$

Тогда, снова применяя теорему 2.1 гл. V из [3], получаем

$$\bar r_\mu(z,v)=\mathbf{E}\biggl\{\exp\biggl(-\int\limits_0^\infty\bigl(f(V_1(h))+\frac{\mu^2}{2}V_1(h)\bigr)\,dh\biggr)\bigg|V_1(0)=v\biggr\}.$$

Ясно, что функция $\bar r_\mu(z,v)$ не зависит от z. Обозначим $\bar R_\mu(v):=\bar r_\mu(z,v)$. Используя выражение для производящего оператора процесса V_1 и применяя теорему 12.5 гл. II из [3], получим, что функция $\bar R_\mu(v)$, $v\in(0,\infty)$, является ограниченным решением следующего однородного уравнения:

$$2v\bigl(\bar R''(v)-\sqrt{2\lambda}\,\bar R'(v)\bigr)-\bigl(\frac{\mu^2}{2}v+f(v)\bigr)\bar R(v)=0. \tag{2.11}$$

Известно, что 0-мерный бесселевский процесс попадая в нуль, из нуля уже не выходит, т.е. остается равным нулю. В силу описания процесса V_1, аналогичное утверждение верно и для него. Отсюда, так как $f(0)=0$, следует, что $\bar R(0)=1$.

Снова применяя теорему 2.1 гл. V из [3], получим

$$\bar q_{\mu,\eta}(z,v)=\mathbf{E}\biggl\{\exp\biggl(-\int\limits_0^\infty\bigl(f(V_3(h))+\frac{\eta^2}{2}V_3(h)\bigr)\,dh+\frac{\eta-\mu}{2}V_2(z)$$

$$-\int\limits_0^z\bigl(f(V_2(h))+\frac{\mu^2}{2}V_2(h)\bigr)\,dh\biggr)\bigg|V_2(0)=v\biggr\}$$

$$=\int\limits_0^\infty\mathbf{E}_v\biggl\{\exp\biggl(-\int\limits_0^\infty\bigl(f(V_3(h))+\frac{\eta^2}{2}V_3(h)\bigr)\,dh+\frac{\eta-\mu}{2}V_2(z)$$

$$-\int_0^z \big(f(V_2(h))+\frac{\mu^2}{2}V_2(h)\big)\,dh\Big)\Big|V_2(z)=g\Big\}\mathbf{P}_v\big(V_2(z)\in dg\big),$$

где нижний индекс v означает, что математическое ожидание и вероятность вычисляются от процесса V_2 с начальным значением $V_2(0)=v$. Используя независимость процессов V_2 и V_3 при фиксированных начальных значениях и условие $V_3(0)=V_2(z)$, имеем

$$\bar q_{\mu,\eta}(z,v)=\int_0^\infty e^{(\eta-\mu)g/2}\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int_0^\infty\big(f(V_3(h))+\frac{\eta^2}{2}V_3(h)\big)\,dh\Big)\Big|V_3(0)=g\Big\}$$

$$\times\,\mathbf{E}_v\Big\{\exp\Big(-\int_0^z \big(f(V_2(h))+\frac{\mu^2}{2}V_2(h)\big)dh\Big)\Big|V_2(z)=g\Big\}\mathbf{P}_v\big(V_2(z)\in dg\big).$$

Поскольку при фиксированных начальных значениях инфинитезимальные характеристики у процессов V_1 и V_3 одинаковы, то

$$\bar q_{\mu,\eta}(z,v)=\int_0^\infty e^{(\eta-\mu)g/2}\bar R_\eta(g)\mathbf{E}_v\Big\{\exp\Big(-\int_0^z\big(f(V_2(h))$$

$$+\frac{\mu^2}{2}V_2(h)\big)\,dh\Big);V_2(z)\in dg\Big\}=\mathbf{E}\Big\{\bar R_\eta(V_2(z))e^{(\eta-\mu)V_2(z)/2}$$

$$\times\exp\Big(-\int_0^z\big(f(V_2(h))+\frac{\mu^2}{2}V_2(h)\big)\,dh\Big)\Big|V_2(0)=v\Big\}.$$

Применим теорему 13.2 гл. II из [3]. Тогда получим, что функция $\bar q_{\mu,\eta}(z,v)$, $(z,v)\in\in[0,\infty)\times[0,\infty)$, является решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial z}\bar q(z,v)=2v\Big(\frac{\partial^2}{\partial v^2}\bar q(z,v)-\sqrt{2\lambda}\frac{\partial}{\partial v}\bar q(z,v)\Big)+2\frac{\partial}{\partial v}\bar q(z,v)$$

$$-\,(\frac{\mu^2}{2}v+f(v))\bar q(z,v), \qquad (2.12)$$

$$\bar q(0,v)=\bar R_\eta(v)e^{(\eta-\mu)v/2}. \qquad (2.13)$$

Особенность применения теорем 12.5 и 13.2 гл. II состоит в том, что процессы V_1 и V_2 принимают неотрицательные значения и их коэффициент диффузии $\sigma^2(v)=v$ вырождается в нуле.

Замена $R_\mu(v)=e^{-v\sqrt{2\lambda}/2}\bar R_\mu(v)$, приводит к задаче

$$2vR''(v)-\big((\lambda+\frac{\mu^2}{2})v+f(v)\big)R(v)=0,\qquad R(0)=1, \qquad (2.14)$$

а замена $q_{\mu,\eta}(z,v) = e^{-v\sqrt{2\lambda}/2}\bar{q}_{\mu,\eta}(z,v)$ – к задаче

$$\frac{\partial}{\partial z}q(z,v) = 2v\frac{\partial^2}{\partial v^2}q(z,v) + 2\frac{\partial}{\partial v}q(z,v)$$
$$- \Big(\big(\lambda + \frac{\mu^2}{2}\big)v - \sqrt{2\lambda} + f(v)\Big)q(z,v), \tag{2.15}$$
$$q(0,v) = R_\eta(v)e^{(\eta-\mu)v/2}. \tag{2.16}$$

Используя новые обозначения, можно переписать (2.10) в следующем виде:

$$I_{\mu,\eta}(z) = \sqrt{2\lambda}\int_0^\infty R_\mu(v)q_{\mu,\eta}(z,v)\,dv.$$

Положим

$$Q_{\mu,\eta}(v) := \int_0^\infty e^{-z(\sqrt{2\lambda}-\mu)}q_{\mu,\eta}(z,v)\,dz.$$

Тогда из (2.15), (2.16) следует, что функция $Q_{\mu,\eta}(v)$ удовлетворяет (2.7) при $\alpha = \mu$, $\beta = \eta$. Аналогичные вычисления имеют место и при $\alpha = -\eta$, $\beta = -\mu$. Принимая во внимание (2.9), окончательно получим

$$\mathbf{E}_0\Big\{\exp\Big(-\int_{-\infty}^{\infty} f(\ell_\diamond(\tau,y))\,dy\Big)\Big\}$$
$$= \lambda\int_0^\infty \big(R_\mu(v)Q_{\mu,\eta}(v) + R_\eta(v)Q_{-\eta,-\mu}(v)\big)\,dv.$$

Это совпадает с (2.4) для случая, когда $h = \infty$ и f – ограниченная дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными первыми и вторыми производными.

Как и при доказательстве теоремы 4.1 гл. IV из [3], результат для кусочно непрерывных функций f доказывается с помощью аппроксимации f непрерывно дифференцируемыми функциями. Доказательство теоремы 2.1 для $h < \infty$ основано на очевидном обобщении соотношения (2.2):

$$E_\gamma := \mathbf{E}\Big[\exp\Big(-\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\ell_\diamond(\tau,y))\,dy\Big); \sup_{y\in\mathbf{R}} \ell_\diamond(\tau,y) \leqslant h\Big]$$

$$= \lim_{\gamma\to\infty} \mathbf{E}\Big[\exp\Big(-\int\limits_{-\infty}^{\infty} (f(\ell_\diamond(\tau,y)) + \gamma\mathbb{1}_{(h,\infty)}(\ell_\diamond(\tau,y)))\,dy\Big)\Big]. \quad (2.17)$$

Более подробно аналогичные вычисления изложены в § 5, гл. V из [3]. □

3. Распределение супремума локального времени.

Рассмотрим один пример применения теоремы 2.1. Вычислим явный вид распределения супремума локального времени $\ell_\diamond(\tau, y)$ по переменной $y \in \mathbf{R}$. В работе [6] вычислено распределение супремума локального времени броуновского движения асимметричного в нуле.

Мы будем использовать стандартные обозначения: функции $I_l(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – модифицированные функции Бесселя порядка l, функции $M(a, b, x)$, $U(a, b, x)$, $x \in \mathbf{R}$, – функции Куммера и функции $M_{n,m}(x)$, $W_{n,m}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – функции Уиттекера (см. приложение 2 из [1] или гл. 13 из [7]).

Теорема 3.1. *При $h \geqslant 0$*

$$\mathbf{P}_0\Big(\sup_{y\in\mathbf{R}} \ell_\diamond(\tau,y) \geqslant h\Big) = L_{\mu,\eta}(h) + L_{-\eta,-\mu}(h), \quad (3.1)$$

где

$$L_{\alpha,\beta}(h) = \frac{\sqrt{2\lambda+\alpha^2}\sqrt{h}}{2\,\mathrm{sh}(h\sqrt{2\lambda+\alpha^2}/2)\,\mathrm{sh}(h\sqrt{2\lambda+\beta^2}/2) M_{\alpha/2\sqrt{2\lambda+\alpha^2},0}(h\sqrt{2\lambda+\alpha^2})}$$

$$\times \int\limits_0^h \frac{e^{(\beta-\alpha)z/2}}{\sqrt{z}}\,\mathrm{sh}((h-z)\sqrt{2\lambda+\beta^2}/2) M_{\alpha/2\sqrt{2\lambda+\alpha^2},0}(z\sqrt{2\lambda+\alpha^2})\,dz.$$

Замечание 3.1. При $\mu = 0$ имеем $W_\diamond(s) = W(s)$ и

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{y\in\mathbf{R}} \ell(\tau,y) \geqslant h\Big) = \frac{h\sqrt{2\lambda} I_1(h\sqrt{\lambda/2})}{\mathrm{sh}^2(h\sqrt{\lambda/2}) I_0(h\sqrt{\lambda/2})}, \quad (3.2)$$

что совпадает с формулой 1.1.11.2 из [1].

Действительно, в этом случае $M_{0,m}(2x) = 2^{2m}\Gamma(m+1)\sqrt{2x}I_m(x)$ (см. приложение 2 из [1] или гл. 13 из [7]), а также верна формула (см. (4.18) из [6]):

$$\int_0^h \operatorname{sh}((h-z)x)I_0(zx)\,dz = hI_1(hx). \tag{3.3}$$

Эта формула проверяется с помощью преобразования Лапласа по переменной h. Преобразование Лапласа с параметром p правой части (3.3), согласно формуле 4.16(2) из [8], при $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} x|$ имеет вид $\frac{x}{(p^2-x^2)^{3/2}}$. Левая часть является сверткой функций, поэтому, согласно формулам 4.9(1) и 4.16(1) из [8], при $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} x|$ имеем

$$\frac{x}{p^2-x^2}\times\frac{1}{(p^2-x^2)^{1/2}},$$

что доказывает (3.3).

Замечание 3.2. При $\eta=\mu$ имеем $W_\diamond(s) = \mu s + W(s)$ – броуновское движение с линейным сносом и $\ell_\mu(\tau,y)$ его локальное время. Тогда

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{y\in\mathbf{R}}\ell_\mu(\tau,y)\geqslant h\Big) = \frac{h^2(2\lambda+\mu^2)}{8\operatorname{sh}^2(h\sqrt{2\lambda+\mu^2}/2)}$$
$$\times\left(\frac{M(\frac32+\frac{\mu}{2\sqrt{2\lambda+\mu^2}},3,h\sqrt{2\lambda+\mu^2})}{M(\frac12+\frac{\mu}{2\sqrt{2\lambda+\mu^2}},1,h\sqrt{2\lambda+\mu^2})}+\frac{M(\frac32-\frac{\mu}{2\sqrt{2\lambda+\mu^2}},3,h\sqrt{2\lambda+\mu^2})}{M(\frac12-\frac{\mu}{2\sqrt{2\lambda+\mu^2}},1,h\sqrt{2\lambda+\mu^2})}\right)$$
$$=\frac{h\sqrt{2\lambda+\mu^2}}{8\operatorname{sh}^2(h\sqrt{2\lambda+\mu^2}/2)}\left(\frac{M_{\mu/2\sqrt{2\lambda+\mu^2},1}(h\sqrt{2\lambda+\mu^2})}{M_{\mu/2\sqrt{2\lambda+\mu^2},0}(h\sqrt{2\lambda+\mu^2})}+\frac{M_{-\mu/2\sqrt{2\lambda+\mu^2},1}(h\sqrt{2\lambda+\mu^2})}{M_{-\mu/2\sqrt{2\lambda+\mu^2},0}(h\sqrt{2\lambda+\mu^2})}\right),$$

где (см., например, [7])

$$M(a,b,x) := 1+\sum_{k=1}^\infty\frac{a(a+1)\dots(a+k-1)x^k}{b(b+1)\dots(b+k-1)k!}$$

и

$$M_{n,m}(x) := x^{m+1/2}e^{-x/2}M(m-n+1/2,2m+1,x),$$

что совпадает с формулой 2.1.11.2 из [1].

Действительно, в этом случае верна формула

$$\int_0^h \operatorname{sh}((h-z)x)\frac{1}{\sqrt z}M_{\mu/4x,0}(2zx)\,dz = \frac{\sqrt h}{4}M_{\mu/4x,1}(2zx). \tag{3.4}$$

Заметим, что формула (3.3) является частным случаем (3.4) при $\mu = 0$. Формула (3.4) проверяется с помощью преобразования Лапласа по переменной h. Преобразования Лапласа с параметром p правой части (3.4) согласно формуле 4.22(10) из [8], $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} x|$, имеет вид

$$\frac{1}{4}(2x)^{3/2} 2\frac{(p-x)^{\mu/4x-3/2}}{(p+x)^{\mu/4x+3/2}}.$$

Левая часть (3.4) является сверткой функций, поэтому согласно формулам 4.9(1) и 4.22(2) из [8], $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} x|$, имеем

$$\frac{x}{p^2-x^2} \times (2x)^{1/2} \frac{(p-x)^{\mu/4x-1/2}}{(p+x)^{\mu/4x+1/2}},$$

что доказывает (3.4).

Доказательство теоремы 3.1. Положим $\theta := \frac{\lambda}{2} + \frac{\alpha^2}{4}$. Применим теорему 2.1 с $f = 0$. Решение задачи (2.5), (2.7) при $f \equiv 0$, имеет следующий вид:

$$R_\alpha(v) = \frac{\operatorname{sh}((h-v)\sqrt{\theta})}{\operatorname{sh}(h\sqrt{\theta})}, \quad 0 \leqslant v \leqslant h. \tag{3.5}$$

Линейно независимые решения однородного уравнения

$$Y''(v) + \frac{1}{v}Y'(v) - \big(\theta - \frac{\alpha}{2v}\big)Y(v) = 0, \quad v > 0,$$

имеют (см. уравнение 15, приложение 4 из [3]) вид:

$$\psi(v) = \frac{1}{\sqrt{v}} M_{\alpha/4\sqrt{\theta},0}(2v\sqrt{\theta}) = \sqrt{2\sqrt{\theta}}e^{-v\sqrt{\theta}} M\Big(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4\sqrt{\theta}}, 1, 2v\sqrt{\theta}\Big),$$
$$\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{v}} W_{\alpha/4\sqrt{\theta},0}(2v\sqrt{\theta}) = \sqrt{2\sqrt{\theta}}e^{-v\sqrt{\theta}} U\Big(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4\sqrt{\theta}}, 1, 2v\sqrt{\theta}\Big),$$

их вронскиан $\omega(v) = \dfrac{2\sqrt{\theta}}{v\Gamma(1/2 - \alpha/4\sqrt{\theta})}$. При этом ψ является неотрицательным возрастающим решением, а φ – неотрицательным убывающим решением. Здесь важно, что $\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4\sqrt{\theta}} > 0$ при любом $\alpha \in \mathbf{R}$.

Из справочника [7], гл. 13, можно извлечь следующие результаты об асимптотическом поведении в нуле этих решений:

$$\psi(v) \asymp 1, \qquad \varphi(v) \asymp -\ln v, \quad v \downarrow 0,$$
$$\psi'(v) \asymp 1, \qquad \varphi'(v) \asymp \frac{1}{v}, \quad v \downarrow 0.$$

Ограниченное решение задачи (2.7), (2.8) при $f \equiv 0$ имеет следующий вид:

$$Q_{\alpha,\beta}(v) = Q_0(v) - \frac{Q_0(h)\psi(v)}{\psi(h)}, \quad 0 \leqslant v \leqslant h. \tag{3.6}$$

где Q_0 – частное ограниченное решение уравнения

$$2vQ''(v) + 2Q'(v) - (2\theta v - \alpha)Q(v) = -e^{(\beta-\alpha)v/2}R_\beta(v). \tag{3.7}$$

Такое решение при $v \in [0,h]$ имеет следующее представление:

$$Q_0(v) = \varphi(v)\int\limits_0^v \frac{e^{(\beta-\alpha)z/2}}{2z\omega(z)}R_\beta(z)\psi(z)\,dz + \psi(v)\int\limits_v^h \frac{e^{(\beta-\alpha)z/2}}{2z\omega(z)}R_\beta(z)\varphi(z)\,dz.$$

В итоге имеем

$$Q_{\alpha,\beta}(v) = Q_0(v) - \frac{\psi(v)\varphi(h)}{\psi(h)}\int\limits_0^h \frac{e^{(\beta-\alpha)z/2}}{2z\omega(z)}R_\beta(z)\psi(z)\,dz,$$

$$Q'_{\alpha,\beta}(v) = \varphi'(v)\int\limits_0^v \frac{e^{(\beta-\alpha)z/2}}{2z\omega(z)}R_\beta(z)\psi(z)\,dz \tag{3.8}$$

$$+\,\psi'(v)\biggl(\int\limits_v^h \frac{e^{(\beta-\alpha)z/2}}{2z\omega(z)}R_\beta(z)\varphi(z)\,dz - \frac{\varphi(h)}{\psi(h)}\int\limits_0^h \frac{e^{(\beta-\alpha)z/2}}{2z\omega(z)}R_\beta(z)\psi(z)\,dz\biggr).$$

Для применения следующего результата нам понадобится асимптотическое поведение этих функций в нуле. Учитывая асимптотическое поведение функций ψ, φ, ψ' и φ', получим

$$Q_{\alpha,\beta}(v) \asymp 1, \qquad Q'_{\alpha,\beta}(v) \asymp 1.$$

Сформулируем один вспомогательный результат §5 гл. V из [3], дающий в некоторых случаях простой метод для вычисления интеграла, стоящего в правой части (2.4).

Лемма 3.1. *Пусть $X(v)$, $Y(v)$, $v > 0$, – решения уравнений*

$$vX'' - (\sigma + \theta v)X = F(v), \tag{3.9}$$

$$vY'' + Y' - (\delta + \theta v)Y = G(v). \tag{3.10}$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
(\theta-(\delta-\sigma)^2)\int XY dv &= (\sigma+\theta v)XY+(\delta-\sigma)v(X'Y-XY')-vX'Y' \\
&+(\delta-\sigma)\Big(\int XG dv-\int YF dv\Big)+\int X'G dv+\int Y'F dv. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Формула (3.11) может быть легко проверена дифференцированием.

Используя лемму 3.1 с $X=R_\alpha(v)$, $Y=Q_\alpha(v)$, $F=0$, $G(v)=-e^{(\beta-\alpha)v/2}R_\beta(v)/2$, $\sigma=0$, $\delta=-\alpha/2$, $\theta=\frac{\lambda}{2}+\frac{\alpha^2}{4}$ и учитывая граничные условия (2.6), (2.8), а также поведение функций в нуле, найдем

$$
\begin{aligned}
\frac{\lambda}{2}\int_0^h R_\alpha(v)Q_{\alpha,\beta}(v)\,dv &= -hR'_\alpha(h)Q'_{\alpha,\beta}(h)+\frac{\alpha}{4}\int_0^h e^{(\beta-\alpha)v/2}R_\alpha(v)R_\beta(v)\,dv \\
&-\frac{1}{2}\int_0^h e^{(\beta-\alpha)v/2}R'_\alpha(v)R_\beta(v)\,dv.
\end{aligned}
$$

Тогда, согласно (2.4),

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_0\Big(\sup_{y\in\mathbf{R}}\ell_\diamond(\tau,y)<h\Big) &= -2h\big(R'_\mu(h)Q'_{\mu,\eta}(h)+R'_\eta(h)Q'_{-\eta,-\mu}(h)\big) \\
&+\frac{\mu-\eta}{2}\int_0^h e^{(\eta-\mu)v/2}R_\mu(v)R_\eta(v)\,dv \\
&-\frac{1}{2}\int_0^h e^{(\eta-\mu)v/2}(R'_\mu(v)R_\eta(v)+R_\mu(v)R'_\eta(v))\,dv \\
&= -2h\big(R'_\mu(h)Q'_{\mu,\eta}(h)+R'_\eta(h)Q'_{-\eta,-\mu}(h)\big)+1.
\end{aligned}
$$

Это эквивалентно

$$
\mathbf{P}_0\Big(\sup_{y\in\mathbf{R}}\ell_\diamond(\tau,y)\geqslant h\Big)=2h\big(R'_\mu(h)Q'_{\mu,\eta}(h)+R'_\eta(h)Q'_{-\eta,-\mu}(h)\big). \qquad (3.12)
$$

Из (3.3) следует, что $R'_\alpha(h) = -\dfrac{\sqrt{\theta}}{\operatorname{sh}(h\sqrt{\theta})}$, а из (3.8) выводим, что

$$Q'_{\alpha,\beta}(h) = -\frac{\omega(h)}{\psi(h)}\int\limits_0^h \frac{e^{(\beta-\alpha)z/2}}{2z\omega(z)}R_\beta(z)\psi(z)\,dz$$
$$= -\frac{1}{2h\psi(h)}\int\limits_0^h e^{(\beta-\alpha)z/2}R_\beta(z)\psi(z)\,dz.$$

В результате имеем

$$2hR'_\mu(h)Q'_{\mu,\eta}(h) = \frac{\sqrt{2\lambda+\mu^2}\sqrt{h}}{2\operatorname{sh}(h\sqrt{2\lambda+\mu^2}/2)\operatorname{sh}(h\sqrt{2\lambda+\eta^2}/2)M_{\mu/2\sqrt{2\lambda+\mu^2},0}(h\sqrt{2\lambda+\mu^2})}$$
$$\times\int\limits_0^h \frac{e^{(\eta-\mu)z/2}}{\sqrt{z}}\operatorname{sh}((h-z)\sqrt{2\lambda+\eta^2}/2)M_{\mu/2\sqrt{2\lambda+\mu^2},0}(z\sqrt{2\lambda+\mu^2})\,dz.$$

Теперь из (2.4) при $f \equiv 0$ и из (3.12) окончательно получаем (3.1). $\square$

Список литературы

1. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы.* Ст.-Петербург, Лань, 2016.
2. S.-E. Graversen, A. N. Shiryaev, *An extension of P. Lévy's distributional properties to the case of a Brownian motion.* — Bernoulli, **6** (2000) 615–620.
3. A. N. Borodin, *Stochastic Processes*, Birkhäuser, Cham, Switzerland (2017).
4. F. B. Knight, *Random walks and a sojourn density process of Brownian motion.* — Trans. Amer. Math. Soc., **109** (1963), 56–86.
5. D. B. Ray, *Sojourn times of a diffusion process.* — Ill. J. Math. **7** (1963), 615–630.
6. A. N. Borodin, P. Salminen, *On the local time process of a skew Brownian motion.* — Trans. Amer. Math. Soc. **372**, No. 5 (2019), 3597–3618.
7. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям.* Наука, Москва, 1979
8. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований.* Т. 1, Наука, Москва (1969)

Borodin A. N. Distribution of functionals of local time of Brownian motion with discontinuous drift.

Diffusion with piecewise constant drift and the diffusion coefficient 1 is considered. We call this process the Brownian motion with discontinuous drift. With equal constants this diffusion includes Brownian motion with linear drift, and with opposite sign constants it turns into Brownian motion with alternating drift. We are interested in the result that allows us to calculate the distributions of the integral functionals with respect to the spatial variable of the local time of Brownian motion with discontinuous drift. The explicit form of the distribution of the supremum with respect to spatial variable of the local time of Brownian motion with discontinuous drift is calculated.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 17 августа 2020 г.