Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 495, 2020 г.

А. Н. Бородин

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ДИФФУЗИЙ С НЕСТАНДАРТНЫМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Это исследование продолжает работу, начатую в [1] и [2]. Рассматривается специальный класс диффузий с переключениями. Имеются два набора диффузионных коэффициентов, отвечающих двум классическим диффузиям. Переключения с одного набора диффузионных коэффициентов на другой наступают в случайные моменты времени, зависящие от траектории диффузии.

Нас интересуют результаты, позволяющие вычислять распределения различных функционалов от диффузии с переключениями. Для диффузий, в частности для броуновского движения, основополагающее значение для развития теории распределений интегральных функционалов имеет работа М. Каца [3].

Можно рассматривать и более сложные диффузии с переключениями, когда выбор осуществляются из трех и более наборов диффузионных коэффициентов, при этом общий подход не меняется.

1. Диффузии с переключениями. Пусть $W(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс броуновского движения. Пусть $\mu(l,x)$ и $\sigma(l,x)$, $x \in \mathbf{R}$, $l = 1,-1$, – непрерывно дифференцируемые при каждом l функции, удовлетворяющие условию ограниченности на линейный рост:

$$|\mu(l,x)| + |\sigma(l,x)| \leqslant K(1+|x|) \quad \text{для всех } x \in \mathbf{R}.$$

Предположим, что $\inf\limits_{x\in\mathbf{R}} \sigma(l,x) > 0$ и что производная $\left(\frac{\mu(l,x)}{\sigma^2(l,x)}\right)'$ ограничена. При каждом $l = 1,-1$, рассмотрим однородный диффузионный

Ключевые слова: диффузионные процессы, диффузии с нестандартными переключениями, распределения функционалов.

Настоящая работа частично поддерживалась грантом РФФИ 19-01-00356 и Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

процесс, являющийся решением следующего стохастического дифференциального уравнения

$$X_l(t) = x + \int_0^t \mu(l, X_l(u))\,du + \int_0^t \sigma(l, X_l(u))\,dW(u), \quad t \geqslant 0. \tag{1.1}$$

Пусть τ_k, $k = 1, 2, \dots,$ – независимые экспоненциально распределенные с параметром 1 случайные величины, не зависящие от броуновского движения W. Процесс Пуассона $N(t)$, $t \geqslant 0$, с интенсивностью единица может быть представлен в следующем виде:

$$N(t) := \max\Big\{m : \sum_{k=1}^{m} \tau_k \leqslant t\Big\} \mathbb{1}_{[0,t]}(\tau_1).$$

Предположим, что он не зависит от броуновского движения W.

Пусть $h_l(x)$, $x \in \mathbf{R}$, $l = 1, -1,$ – неотрицательные ограниченные кусочно непрерывные функции. Предполагаем, что они непрерывны справа ($h_l(x) = h_l(x+)$, $x \in \mathbf{R}$). Момент

$$\varkappa_1 := \min\Big\{s : \int_0^s h_l(X_l(v))\,dv = \tau_1\Big\}$$

является моментом, обратным к интегральному функционалу от диффузии X_l.

Пусть функции $h_l(x)$, $x \in \mathbf{R}$, таковы, что $\varkappa_1 < \infty$ п.н. Это эквивалентно условию

$$\int_0^\infty h_l(X_l(s))\,ds = \infty \qquad \text{п.н.} \tag{1.2}$$

Достаточным для этого, согласно [4, следствию 12.1 гл. II], являются условия

$$\liminf_{y\to\infty} \frac{1}{y} \int_0^y \frac{h_l(x)}{\sigma^2(l,x)}\,dx > 0, \qquad \liminf_{y\to\infty} \frac{1}{y} \int_{-y}^0 \frac{h_l(x)}{\sigma^2(l,x)}\,dx > 0. \tag{1.3}$$

Диффузия с переключениями определяется рекуррентным образом. Обозначим ее S_l, где индекс $l = 1, -1$ соответствует начальному значению диффузионных коэффициентов. При $\varkappa_0 := 0 \leqslant t < \varkappa_1$ полагаем $S_l(t) := X_l(t)$, где X_l – решение уравнения (1.1). На интервале времени

$\varkappa_1 \leqslant t < \varkappa_2$ процесс S_l – решение стохастического дифференциального уравнения

$$S_l(t) = X_l(\varkappa_1) + \int\limits_{\varkappa_1}^{t} \mu(-l, S_l(u))\,du + \int\limits_{\varkappa_l}^{t} \sigma(-l, S_l(u))\,dW(u), \qquad (1.4)$$

и

$$\varkappa_2 := \min\Big\{s \geqslant \varkappa_l : \int\limits_{\varkappa_1}^{s} h_{-l}(S_l(v))\,dv = \tau_2\Big\}.$$

Далее процесс $S_l(t)$ определяется рекуррентно: при $\varkappa_m \leqslant t < \varkappa_{m+1}$ процесс S_l – решение стохастического дифференциального уравнения

$$S_l(t) = S_l(\varkappa_m) + \int\limits_{\varkappa_m}^{t} \mu\big(l(-1)^m, S_l(u)\big)\,du + \int\limits_{\varkappa_m}^{t} \sigma\big(l(-1)^m, S_l(u)\big)\,dW(u), \quad (1.5)$$

и

$$\varkappa_{m+1} := \min\Big\{s \geqslant \varkappa_m : \int\limits_{\varkappa_m}^{s} h_{l(-1)^m}(S_l(v))\,dv = \tau_{m+1}\Big\}. \qquad (1.6)$$

Конечность п.н. всех этих моментов будет следовать из приведенной ниже структуры процесса $S_l(t)$, $t \geqslant 0$, по той же причине, что и для момента $\varkappa_1$.

Для выявления такой структуры отметим, что отвечающий за переключения процесс $C_l(t)$, $t \geqslant 0$, определяется формулой

$$C_l(t) := \max\big\{m : \varkappa_m \leqslant t\big\}\mathbb{1}_{[0,t]}(\varkappa_1). \qquad (1.7)$$

Убедимся, что $C_l(t) = N(I(t))$, где $N(t)$ – процесс Пуассона с интенсивностью 1, и при $\varkappa_m \leqslant t < \varkappa_{m+1}$, $m = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\begin{aligned} I(t) &:= \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{\varkappa_k}^{\varkappa_{k+1}} h_{l(-1)^k}(S_l(v))\,dv + \int\limits_{\varkappa_m}^{t} h_{l(-1)^m}(S_l(v))\,dv \\ &= \int\limits_{0}^{t} h_{l(-1)^{C_l(v)}}(S_l(v))\,dv. \end{aligned} \qquad (1.8)$$

Действительно, в силу определения моментов $\varkappa_m$, имеем, что

$$\int\limits_{\varkappa_m}^{\varkappa_{m+1}} h_{l(-1)^m}(S_l(v))\,dv = \tau_{m+1}$$

или что

$$\int\limits_0^{\varkappa_m} h_{l(-1)^{C_l(v)}}(S_l(v))\,dv = \sum_{k=1}^m \tau_k.$$

Поэтому, в силу монотонности $I(t)$ и определения процесса Пуассона,

$$\begin{aligned} C_l(t) &= \max\{m : I(\varkappa_m) \leqslant I(t)\}\mathbb{1}_{[0,I(t)]}(\tau_1) \\ &= \max\Big\{m : \sum_{k=1}^m \tau_k \leqslant I(t)\Big\}\mathbb{1}_{[0,I(t)]}(\tau_1) = N(I(t)). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Нестрого приведенное выше определение процесса $S_l(t)$, $t \geqslant 0$, можно записать следующим образом: диффузионный процесс с переключениями является решением стохастического дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} S_l(t) = x &+ \int\limits_0^t \mu\big(l(-1)^{C_l(u)}, S_l(u)\big)\,du \\ &+ \int\limits_0^t \sigma\big(l(-1)^{C_l(u)}, S_l(u)\big)\,dW(u). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Общая теория решения стохастических дифференциальных уравнений к (1.10) неприменима, так как неизвестное решение входит в $C_l(u)$. Поэтому мы вынуждены рекуррентно строить отдельные решения на интервалах $\varkappa_m \leqslant t < \varkappa_{m+1}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Нам понадобится следующее специальное представление для процесса $S_l(t)$, $t \geqslant 0$. При $l = 1, -1$ и $m = 0, 1, 2, \ldots$ рассмотрим семейство $X^{(m)}_{l,s,x}(t)$, $t \geqslant s$, $x \in \mathbf{R}$, решений стохастических дифференциальных уравнений

$$X^{(m)}_{l,s,x}(t) = x + \int\limits_s^t \mu\big(l(-1)^m, X^{(m)}_{l,s,x}(u)\big)\,du + \int\limits_s^t \sigma\big(l(-1)^m, X^{(m)}_{l,s,x}(u)\big)\,dW(u).$$

Согласно [4, теорема 9.2 гл. II], процесс $X^{(m)}_{l,s,x}(t)$ является с вероятностью единица непрерывным процессом по (s, t, x), $0 \leqslant s \leqslant t$, $x \in \mathbf{R}$, и, более того,

$$S_l(t) = X^{(m)}_{l,\varkappa_m,S_l(\varkappa_m)}(t), \quad \text{при} \quad \varkappa_m \leqslant t < \varkappa_{m+1},$$

По [4, замечание 9.1 гл. II], выполняется следующее соотношение

$$X^{(m)}_{l,\varkappa_m,x}(t) = x + \int\limits_{\varkappa_m}^{t} \mu\big(l(-1)^m, X^{(m)}_{l,\varkappa_m,x}(u)\big)\,du + \int\limits_{\varkappa_m}^{t} \sigma\big(l(-1)^m, X^{(m)}_{l,\varkappa_m,x}(u)\big)\,dW(u). \tag{1.11}$$

При фиксированном m положим $\widetilde{X}^{(m)}_{l,x}(s) := X^{(m)}_{l,\varkappa_m,x}(s+\varkappa_m)$, $\widetilde{W}(s) := W(s+\varkappa_m) - W(\varkappa_m)$, $s \geqslant 0$. Процесс $\widetilde{W}(s)$ является броуновским движением, не зависящим от σ-алгебры событий $G^{\varkappa_m}_l$, порожденной процессом W до момента времени $\varkappa_m$ (см. [4, замечание 7.2 гл. I]). Делая в интегралах замену переменных $u = v + \varkappa_m$, $t = s + \varkappa_m$, получаем

$$\begin{aligned} \widetilde{X}^{(m)}_{l,x}(s) = x + \int\limits_{0}^{s} \mu\big(l(-1)^m, \widetilde{X}^{(m)}_{l,x}(v)\big)\,dv \\ + \int\limits_{0}^{s} \sigma\big(l(-1)^m, X^{(m)}_{l,x}(v)\big)\,d\widetilde{W}(v). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Диффузия $\widetilde{X}^{(m)}_{l,x}(s)$ имеет, в силу совпадения уравнений (1.12) и (1.1), такие же конечномерные распределения, как и исходная диффузия $X_{l(-1)^m}$, причем она не зависит от σ-алгебры событий $G^{\varkappa_m}_l$, в частности, от $S_l(\varkappa_m)$. Справедливо равенство

$$S_l(s+\varkappa_m) = \widetilde{X}^{(m)}_{l,S_l(\varkappa_m)}(s), \qquad 0 \leqslant s < \varkappa_{m+1} - \varkappa_m, \tag{1.13}$$

т.е. в любой момент $\varkappa_m$, диффузия $S_l(s+\varkappa_m)$ начинается заново как обычная диффузия $X_{l(-1)^m}$, выходящая из точки $S_l(\varkappa_m)$, и далее продолжается как исходная диффузия с переключениями. Отсюда, в силу условий (1.3), вытекает, что

$$\int\limits_{\varkappa_m}^{\infty} h_{l(-1)^m}(S_l(v))\,dv = \int\limits_{0}^{\infty} h_{l(-1)^m}\big(\widetilde{X}^{(m)}_{l,S_l(\varkappa_m)}(s)\big)\,ds = \infty, \quad \text{п.н.}.$$

Это ввиду определения (1.6) влечет конечность п.н. момента $\varkappa_{m+1}$.

В частности, при $m = 1$ положим

$$\widetilde{S}_{-l,X_l(\varkappa_1)}(s) := S_l(s + \varkappa_1), \tag{1.14}$$

где диффузия $\widetilde{S}_{l,x}(t)$ совпадает по распределению с переключающейся диффузией $S_l(t)$, начинается в точке x и не зависит от σ-алгебры событий $G_l^{\varkappa_1}$, в частности, от $X_l(\varkappa_1)$.

2. Распределение интегральных функционалов от диффузий с переключениями. Рассмотрим метод вычисления совместного распределения интегрального функционала

$$A_l(t) := \int\limits_0^t f\big(l(-1)^{C_l(s)}, S_l(s)\big)\, ds, \qquad f(l,x) \geqslant 0, \quad l = 1, -1, \quad x \in \mathbf{R},$$

и функционалов инфимума и супремума $\inf\limits_{0\leqslant s\leqslant t} S_l(s)$, $\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} S_l(s)$.

Общий подход к вычислению распределений интегральных функционалов от броуновского движения был описан в [4, § 1 гл. III]. Этот подход применим к широкому классу процессов, в частности, – к диффузиям с переключениями. Поэтому мы будем рассматривать лишь основные результаты, которые позволяют вычислять искомые распределения в рамках этого общего подхода.

Пусть τ – не зависящий от последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ и от процесса броуновского движения $\{W(s),\ s \geqslant 0\}$ экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ случайный момент времени.

Этот момент соответствует преобразованию Лапласа по времени t. Для того чтобы получить распределение функционала в момент t, следует обратить преобразование Лапласа по λ в распределении соответствующего функционала в момент τ.

Обозначим $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ вероятность и математическое ожидание по процессам S_l, $l = 1, -1$, при условии $S_l(0) = x$. Для краткости будем использовать обозначение $\mathbf{E}\{\xi;\, A\} := \mathbf{E}\{\xi \mathbb{1}_A\}$.

Основной результат, позволяющий вычислять распределения интегрального функционала $A_l(t)$, состоит в следующем.

Теорема 2.1. *Пусть $\varPhi(l,x)$ и $f(l,x)$, $x\in\mathbf{R}$, $l=1,-1$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f\geqslant 0$ и $\varPhi$ ограничена. Тогда функция*

$$Q_l(x):=\mathbf{E}_x\Big\{\varPhi\big(l(-1)^{C_l(\tau)},S_l(\tau)\big)\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau}f\big(l(-1)^{C_l(s)},S_l(s)\big)ds\Big)\Big\} \tag{2.1}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$Q_l(x)=\widetilde{M}_l(x)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{G}_y^{(l)}(x)\,Q_l(y)\,dy, \tag{2.2}$$

где

$$\widetilde{M}_l(x):=M_l(x)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}M_{-l}(z)\,G_z^{(l)}(x)\,dz, \tag{2.3}$$

$$\widetilde{G}_y^{(l)}(x):=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_y^{(-l)}(z)\,G_z^{(l)}(x)\,dz, \tag{2.4}$$

и при каждом $l=-1,1$ функция $M_l(x)$, $x\in\mathbf{R}$, является единственным ограниченным решением уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2(l,x)\,M''(x)+\mu(l,x)M'(x)-(\lambda+h_l(x)+f(l,x))\,M(x)=-\lambda\varPhi(l,x), \tag{2.5}$$

а $G_z^{(l)}(x)$, $x\in\mathbf{R}$, является единственным непрерывным ограниченным решением задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(l,x)\,G''(x)+\mu(l,x)\,G'(x)-(\lambda+h_l(x)+f(l,x))\,G(x)=0,\quad x\neq z, \tag{2.6}$$

$$G'(z+0)-G'(z-0)=-2h_l(z)/\sigma^2(l,z). \tag{2.7}$$

Замечание 2.1 Для кусочно непрерывных функций $f(l,x)$, $h_l(x)$ и $\varPhi(l,x)$, $x\in\mathbf{R}$, уравнение (2.5) при каждом l надо понимать следующим образом: оно имеет место во всех общих точках непрерывности функций f, h_l и $\varPhi$, а в точках разрыва f, h_l и $\varPhi$ его решение непрерывно вместе с первой производной.

Аналогичное замечание касается всех уравнений с кусочно непрерывными коэффициентами.

Доказательство теоремы 2.1. Положим

$$M_l(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(l, X_l(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau \Big(h_l(X_l(s))+f(l, X_l(s))\Big)\,ds\Big)\Big\}. \quad (2.8)$$

Тогда M_l – единственное ограниченное решение уравнения (2.5) (см. [4] гл. IV, теорема 5.1, $a = -\infty$, $b = \infty$).

Положим

$$G_z^{(l)}(x) := \frac{d}{dz}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int_0^{\varkappa_1}(\lambda + f(l, X_l(s)))\,ds\Big); X_l(\varkappa_1) < z\Big\}. \quad (2.9)$$

Эта функция – решение задачи (2.6), (2.7) (см. [4], гл. IV, теорема 6.1, $a = -\infty$, $b = \infty$).

Поскольку $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} h_l(x) \leqslant K$ для некоторого K, то $\varkappa_1 \geqslant \tau_1/K$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_z^{(l)}(x)\,dz \leqslant \mathbf{E}_x\exp\Big(-\int_0^{\varkappa_1}(\lambda + f(l, X_l(s)))\,ds\Big) \leqslant \mathbf{E}e^{-\lambda\tau_1/K} = \frac{K}{\lambda + K}$$

для всех x.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} |\widetilde{M}_l(x)| &\leqslant |M_l(x)| + \sup_{x\in\mathbf{R}}|M_{-l}(x)|\int_{-\infty}^{\infty} G_z^{(l)}(x)\,dz \\ &\leqslant \sup_{x\in\mathbf{R}}|M_l(x)| + \frac{K}{\lambda + K}\sup_{x\in\mathbf{R}}|M_{-l}(x)| \end{aligned} \quad (2.10)$$

и что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{G}_y^{(l)}(x)\,dy \leqslant \frac{K}{\lambda + K}\int_{-\infty}^{\infty} G_z^{(l)}(x)\,dz \leqslant \Big(\frac{K}{\lambda + K}\Big)^2. \quad (2.11)$$

Уравнение (2.2) имеет единственное ограниченное решение. В силу (2.11), это доказывается аналогично доказательству соответствующего утверждения в [1]. Из этого доказательства также следует, что для неотрицательных $\widetilde{M}_l$ и $\widetilde{G}_z^{(l)}$ решение уравнения (2.2) неотрицательно.

Для доказательства того, что Q_l является решением уравнения (2.2), достаточно доказать, что функция Q_l удовлетворяет соотношению

$$Q_l(x) = M_l(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G_z^{(l)}(x)\, Q_{-l}(z)\, dz. \tag{2.12}$$

Подставляя в правую часть (2.12) аналогичное выражение для Q_{-l}, получаем

$$Q_l(x) = M_l(x) + \int_{-\infty}^{\infty} G_z^{(l)}(x)\, M_{-l}(z)\, dz + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G_z^{(l)}(x)\, G_y^{(-l)}(z)\, dz\, Q_l(y)\, dy.$$

Это и есть уравнение (2.2). Докажем (2.12). Имеем

$$\begin{aligned} Q_l(x) &= \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(l, X_l(\tau)) \exp\Big(-\int_0^\tau f(l, X_l(s))\, ds\Big); \tau < \varkappa_1\Big\} \\ &+ \mathbf{E}_x\Big\{\Phi\big(l(-1)^{C_l(\tau)}, S_l(\tau)\big) \exp\Big(-\int_0^{\varkappa_1} f(l, X_l(s))\, ds\Big) \\ &\times \exp\Big(-\int_{\varkappa_1}^{\tau} f\big(l(-1)^{C_l(s)}, S_l(s)\big)\, ds\Big); \varkappa_1 \leqslant \tau\Big\} =: V_1(x) + V_2(x), \end{aligned} \tag{2.13}$$

где $V_1(x)$ и $V_2(x)$ – соответственно первое и второе слагаемые. Так как событие $\{\tau < \varkappa_1\}$ эквивалентно событию $\Big\{\int_0^\tau h_l(X_l(s))\, ds < \tau_1\Big\}$, а τ_1 не зависит от τ и процесса X_l, то справедлива формула

$$\mathbf{P}\big(\tau < \varkappa_1 \big| \sigma(X_l, \tau)\big) = \exp\Big(-\int_0^\tau h_l(X_l(s))\, ds\Big),$$

где $\sigma(X_l, \tau)$ – σ-алгебра событий, порожденная процессом X_l и моментом τ. Тогда, применяя теорему Фубини, и сначала вычисляя математическое ожидание по τ_1, а затем по процессу X_l и моменту τ, получим, что

$$V_1(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(l, X_l(\tau)) \exp\Big(-\int\limits_0^\tau (h_l(X_l(s)) + f(l, X_l(s)))\,ds\Big)\Big\} = M_l(x). \tag{2.14}$$

Для того чтобы преобразовать второе слагаемое $V_2(x)$, воспользуемся независимостью момента τ от процессов S_l и X_l, и, в частности, от момента $\varkappa_1$.

По теореме Фубини имеем

$$\begin{aligned} V_2(x) = \lambda\mathbf{E}_x \int\limits_{\varkappa_1}^\infty e^{-\lambda t} \exp\Big(-\int\limits_0^{\varkappa_1} f(l, X_l(s))\,ds\Big) \\ \times \varPhi\big(l(-1)^{C_l(t)}, S_l(t)\big) \exp\Big(-\int\limits_{\varkappa_1}^t f\big(l(-1)^{C_l(s)}, S_l(s)\big)\,ds\Big) dt. \end{aligned}$$

Воспользуемся представлением (1.14) и в выражении для $V_2(x)$ сделаем замену переменной $t = u + \varkappa_1$. Положим

$$\widetilde{C}_l(u) := C_l(u+\varkappa_1) - C_l(\varkappa_1), \quad \widetilde{N}(u) := N(u+\tau_1) - N(\tau_1).$$

Процесс $\widetilde{N}(u)$ не зависит от τ_1 и снова является пуассоновским.

Тогда, в силу (1.7),

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_l(u) &= N\Big(\int\limits_0^{u+\varkappa_1} h_{l(-1)^{C_l(s)}}(S_l(s))ds\Big) - N(\tau_1) \\ &= N\Big(\tau_1 + \int\limits_{\varkappa_1}^{u+\varkappa_1} h_{l(-1)^{C_l(s)}}(S_l(s))ds\Big) - N(\tau_1) \\ &= \widetilde{N}\Big(\int\limits_0^u h_{l(-1)^{C_l(s+\varkappa_1)}}(S_l(s+\varkappa_1))ds\Big) = \widetilde{N}\Big(\int\limits_0^u h_{-l(-1)^{\widetilde{C}_l(s)}}(\widetilde{S}_{-l,X_l(\varkappa_1)}(s))ds\Big). \end{aligned}$$

В силу (1.8) и (1.14), процесс $\widetilde{C}_l(u)$, $u \geqslant 0$, при условии $X_l(\varkappa_1) = x$ совпадает по распределению с процессом $C_{-l}(u)$ и не зависит от σ-алгебры $\mathcal{G}_l^{\varkappa_1}$. Поскольку $(-1)^{C_l(\varkappa_1)} = -1$, то

$$V_2(x) = \mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big(- \int_0^{\varkappa_1} (\lambda + f(l, X_l(s)))\, ds\Big) \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} \varPhi\big(- l(-1)^{\widetilde{C}_l(u)},$$

$$\widetilde{S}_{-l,X_1(\varkappa_1)}(u)\big) \exp\Big(- \int_0^{u} f\big(- l(-1)^{\widetilde{C}_l(v)}, \widetilde{S}_{-l,X_1(\varkappa_1)}(v)\big)\, dv\Big) du\Big\}.$$

По теореме Фубини, интеграл по параметру u с весом $\lambda e^{-\lambda u}$ можно заменить на подынтегральное выражение с $\widetilde{\tau}$ вместо u, где $\widetilde{\tau}$ – экспоненциально распределенная с параметром λ случайная величина, не зависящая от других процессов и величин. Тем самым, для $V_2(x)$ получим следующее выражение:

$$V_2(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(- \int_0^{\varkappa_1} (\lambda + f(l, X_l(s)))\, ds\Big) \mathbf{E}\Big\{\varPhi\big(- l(-1)^{\widetilde{C}_l(\widetilde{\tau})}, \widetilde{S}_{-l,X_l(\varkappa_1)}(\widetilde{\tau})\big)$$

$$\times \exp\Big(- \int_0^{\widetilde{\tau}} f\big(- l(-1)^{\widetilde{C}_l(s)}, \widetilde{S}_{-l,X_l(\varkappa_1)}(s)\big) ds\Big) \Big| \mathcal{G}_l^{\varkappa_1} \Big\}\Big\}.$$

Применяя лемму 2.1 гл. I из [4], получим

$$V_2(x) = \mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big(- \int_0^{\varkappa_1} (\lambda + f(l, X_l(s)))\, ds\Big) Q_{-l}(X_l(\varkappa_1))\Big\}.$$

Это выражение преобразуется к следующему виду:

$$V_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big(- \int_0^{\varkappa_1} (\lambda + f(l, X_l(s)))\, ds\Big); X_l(\varkappa_1) \in dz\Big\}\, Q_{-l}(z)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G_z^{(l)}(x)\, Q_{-l}(z)\, dz.$$

Теперь из (2.13) и (2.14) следует (2.12). Теорема доказана. □

Сформулируем результат, позволяющий вычислять совместное распределение интегрального функционала от диффузии с переключениями и функционалов инфимума и супремума. Доказательство этого результата аналогично приведенному при доказательстве теоремы 2.1, нужно только воспользоваться теоремами 4.2 и 6.2 гл. IV из [4] при $a \neq -\infty$ либо $b \neq \infty$.

Теорема 2.2. *Пусть $\varPhi(l,x)$ и $f(l,x)$, $x \in [a,b]$, $l = 1,-1$, – кусочно непрерывные функции по $x \in [a,b]$. Предположим, что $f \geqslant 0$ и $\varPhi$ ограничена, когда либо $a = -\infty$, либо $b = \infty$. Тогда функция*

$$Q_l(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(l(-1)^{C_l(\tau)}, S_l(\tau)) \exp\Big(-\int\limits_0^\tau f(l(-1)^{C_l(s)}, S_l(s))\,ds\Big);$$

$$a \leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} S_l(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} S_l(s) \leqslant b\Big\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения (2.2)*, для которого выполняются* (2.3), (2.4)*, и при каждом $l = -1, 1$ функция $M_l(x)$, $x \in [a,b]$, является единственным решением уравнения* (2.5) *с граничными условиями*

$$M(a) = 0, \qquad\qquad M(b) = 0, \tag{2.15}$$

а при $z \in [a,b]$ функция $G_z^{(l)}(x)$, $x \in [a,b]$, является единственным непрерывным решением задачи (2.6), (2.7)*, дополненной граничными условиями*

$$G(a) = 0, \quad G(b) = 0. \tag{2.16}$$

Полагаем $M_l(x) = 0$, $G_z^{(l)}(x) = 0$ при $x, z \notin (a,b)$.

Пример 2.1. Вычислим характеристическую функцию броуновского движения с переключающимися математическим ожиданием и дисперсией через показательно распределенные моменты времени с циклически меняющейся интенсивностью. В рассматриваемом случае цикл равен двум. Используем явное выражение для вычисления математического ожидания такого процесса.

Предположим, что $h_l(x) = h_l$, $x \in \mathbf{R}$, $l = -1, 1$, т.е., согласно (1.6),

$$\varkappa_{m+1} := \varkappa_m + \tau_{m+1}/h_{l(-1)^m}, \qquad m = 1, 2, \dots,$$

или, что то же самое

$$\varkappa_m := \sum_{k=1}^m \frac{\tau_k}{h_{l(-1)^{k-1}}}.$$

Процесс $S_l(t)$, $t \geqslant 0$, имеет следующий вид:

$$S_l(t) := x + \int_0^t \mu_{l(-1)^{C_l(s)}}\, ds + \int_0^t \sigma_{l(-1)^{C_l(s)}}\, dW(s), \tag{2.17}$$

где μ_1, μ_{-1} и σ_1, σ_{-1} – два произвольных набора коэффициентов и $C_l(s)$, $s \geqslant 0$, – считающая функция моментов $\varkappa_m$, определенная в (1.7).

Вычислим характеристическую функцию

$$Q_l(x) = \mathbf{E}_x e^{i\beta S_l(\tau)}$$

в момент τ, распределенный по показательному закону с параметром $\lambda > 0$ и не зависящий от последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ и от процесса броуновского движения W. Здесь $\beta \in \mathbf{R}$, $t \geqslant 0$, и $x \in \mathbf{R}$ обозначает начальное состояние процесса S_l.

В силу (2.17),

$$\mathbf{E}_x\, e^{i\beta S_l(t)} = e^{i\beta x}\, \mathbf{E}_0\, e^{i\beta S_l(t)}. \tag{2.18}$$

Для вычисления $Q_l(x)$ применим теорему 2.1 при $\varPhi(l,x) = e^{i\beta x}$, $f(x) \equiv 0$ и $\mu(l,x) = \mu_l$ $\sigma(l,x) = \sigma_l$. В данном случае ограниченное решение уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma_l^2 M_l''(x) + \mu_l M_l'(x) - (\lambda + h_l) M_l(x) = -\lambda e^{i\beta x}$$

имеет вид

$$M_l(x) = \frac{\lambda e^{i\beta x}}{\lambda + h_l - i\beta\mu_l + \sigma_l^2\beta^2/2}.$$

Ограниченное непрерывное решение задачи (2.6), (2.7) имеет вид

$$G_z^{(l)}(x) = \frac{h_l}{\sigma_l\sqrt{2\lambda + 2h_l + \mu_l^2/\sigma_l^2}} e^{(z-x)\mu_l/\sigma_l^2 - |x-z|\sqrt{2\lambda + 2h_l + \mu_l^2/\sigma_l^2}/\sigma_l}.$$

Ясно, что $G_z^{(l)}(x) = G_0^{(l)}(x-z)$. Нам понадобится следующее легко проверяемое равенство: при $\delta > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta z}}{\delta} e^{\mu(z-x) - |x-z|\delta}\, dz = \frac{2e^{i\beta x}}{\delta^2 + \beta^2 - 2i\beta\mu - \mu^2}. \tag{2.19}$$

Нетрудно убедиться, что, согласно (2.3),

$$\widetilde{M}_l(x) = \frac{\lambda e^{i\beta x}}{\lambda + h_l - i\mu_l\beta + \sigma_l^2\beta^2/2} + \frac{\lambda h_l e^{i\beta x}}{(\lambda + h_l - i\mu_l\beta + \sigma_l^2\beta^2/2)(\lambda + h_{-l} - i\mu_{-l}\beta + \sigma_{-l}^2\beta^2/2)}.$$

Поскольку преобразование Фурье свертки функций равно произведению преобразований Фурье, то, с учетом (2.4) и (2.19), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta y}\widetilde{G}_y^{(l)}(x)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta y}\int_{-\infty}^{\infty} G_0^{(-l)}(z-y)G_0^{(l)}(x-z)\,dz\,dy = \frac{h_{-l}h_l e^{i\beta x}}{(\lambda + h_{-l} - i\mu_{-l}\beta + \sigma_{-l}^2\beta^2/2)(\lambda + h_l - i\mu_l\beta + \sigma_l^2\beta^2/2)}.$$

Обозначим

$$Q_l := \mathbf{E}_0 e^{i\beta S_l(\tau)}. \tag{2.20}$$

Тогда, в силу (2.17), $Q_l(x) = e^{i\beta x}Q_l$. В результате, уравнение (2.2) преобразуется к следующему виду:

$$Q_l = \frac{\lambda}{\lambda + h_l - i\mu_l\beta + \sigma_l^2\beta^2/2}\Big\{1 + \frac{h_l}{\lambda + h_{-l} - i\mu_{-l}\beta + \sigma_{-l}^2\beta^2/2}\Big\} + \frac{h_1h_{-1}Q_l}{(\lambda + h_1 - i\mu_1\beta + \sigma_1^2\beta^2/2)(\lambda + h_{-1} - i\mu_{-1}\beta + \sigma_{-1}^2\beta^2/2)}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\lambda}Q_l = \frac{\lambda + h_{-l} - i\mu_{-l}\beta + \sigma_{-l}^2\beta^2/2 + h_l}{(\lambda + h_1 - i\mu_1\beta + \sigma_1^2\beta^2/2)(\lambda + h_{-1} - i\mu_{-1}\beta + \sigma_{-1}^2\beta^2/2) - h_1h_{-1}}. \tag{2.21}$$

Вычислим математическое ожидание процесса $S_l(t)$, $t \geqslant 0$. Сначала вычислим математическое ожидание величины $S_l(\tau)$. Имеем

$$\frac{i}{\lambda}\mathbf{E}_0 S_l(\tau) = \frac{d}{d\beta}\Big(\frac{1}{\lambda}Q_l\Big)\Big|_{\beta=0} = \frac{-i\mu_{-l}}{\lambda(\lambda + h_1 + h_{-1})} + \frac{i(\mu_1(\lambda + h_{-1}) + \mu_{-1}(\lambda + h_1))}{\lambda^2(\lambda + h_1 + h_{-1})} = i\frac{\lambda\mu_l + \mu_1 h_{-1} + \mu_{-1}h_1}{\lambda^2(\lambda + h_1 + h_{-1})}.$$

Обратим в этой формуле преобразование Лапласа по λ. Для этого воспользуемся формулой 5.2.(5) из [6]. Обозначим $\mathcal{L}_\lambda^{-1}$ оператор обратного преобразования Лапласа по λ. Имеем

$$\mathbf{E}_0 S_l(t) = \int_0^t \mathcal{L}_\lambda^{-1}\Big(\frac{\lambda\mu_l + \mu_1 h_{-1} + \mu_{-1}h_1}{\lambda(\lambda + h_1 + h_{-1})}\Big)\Big|_s ds$$
$$= \int_0^t \Big(\frac{\mu_1 h_{-1} + \mu_{-1}h_1}{h_1 + h_{-1}} + \frac{(\mu_l - \mu_{-l})h_l}{h_1 + h_{-1}} e^{-(h_1+h_{-1})s}\Big) ds$$
$$= \frac{\mu_1 h_{-1} + \mu_{-1}h_1}{h_1 + h_{-1}} t + \frac{(\mu_l - \mu_{-l})h_l}{(h_1 + h_{-1})^2}\big(1 - e^{-(h_1+h_{-1})t}\big). \qquad (2.22)$$

Список литературы

1. А. Н. Бородин, *Распределения функционалов от диффузий с переключениями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 52–81.
2. А. Н. Бородин, *Распределения функционалов от телеграфного процесса и диффузий с переключениями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 38–53.
3. M. Kac, *On distribution of certain Wiener functionals.* — Trans. Amer. Math. Soc. **65**, No. 1 (1949), 1–13.
4. A. N. Borodin, *Stochastic Processes*, Cham, Switzerland: Birkhäuser, 2017.
5. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы*, Ст.-Петербург: Лань, 2016.
6. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований*, т. I, М.: Наука, 1969.

Borodin A. N. Distributions of functionals of diffusions with non-standard switching.

The paper deals with the results that allow us to calculate the joint distributions of functionals of diffusions with switchings that occur at random time moments depending on the diffusion trajectory. Standard switching from one set of diffusion coefficients to another occur at random time moments corresponding to the jump moments of the Poisson process, independent of the initial diffusions. More general non-standard switching occur when the integral functional of the trajectory reaches the value equal to an exponentially distributed variable. With a unit integrand such switching become standard.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 24 августа 2020 г.