Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 495, 2020 г.

Д. И. Блинова, М. А. Лифшиц

ЭНЕРГИЯ НАТЯНУТЫХ СТРУН, СОПРОВОЖДАЮЩИХ ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС И СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДАНИЕ В ПОЛОСЕ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ

§1. Введение

Пусть на некотором интервале времени $[0,T]$ заданы непрерывные функциональные границы $g_1(t)\leqslant g_2(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$. *Натянутой струной* называется функция h_*, которая обладает следующим свойством универсальности: для любой неотрицательной выпуклой функции $\phi(\,\cdot\,)$ функция h_* минимизирует функционал вида:

$$\int_0^T \phi(h'(s))\,ds$$

среди всех абсолютно непрерывных функций, имеющих заданное начальное и конечное значение и удовлетворяющих неравенствам:

$$g_1(t)\leqslant h(t)\leqslant g_2(t), \qquad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Решение задачи минимизации для каждой отдельной функции $\phi(\,\cdot\,)$ существует, причём для строго выпуклых функций ϕ оно единственно. В дальнейшем нас будет интересовать только случай $\phi(x) = x^2$, где единственность заведомо имеется. Проблемы существования и единственности натянутых струн, а также их дискретных аналогов, рассматривались в работах [1,5,6,11,12]. О приложениях натянутых струн, см. например, [1, 12].

В данной работе мы будем рассматривать границы вида:

$$g_1(t) = W(t) + r_t,\ g_2(t) = W(t) - r_t,$$

где W – винеровский процесс, а r_t – половина ширины полосы в момент времени t, а также аналогичные границы для случайного блуждания.

Ключевые слова: кинетическая энергия, натянутая струна, винеровский процесс, случайное блуждание, КМТ-аппроксимация.

Работа М. А. Лифшица поддержана грантом РФФИ–ННИО 20-51-12004.

В работе [8] М. А. Лифшиц и Э. Сеттерквист исследовали энергию натянутых струн, сопровождающих винеровский процесс при постоянной ширине полосы. Далее, в работе [9] М. А. Лифшиц и А. А. Сюняев исследовали натянутые струны, также сопровождающие винеровский процесс при постоянной ширине полосы, но ширина полосы менялась в зависимости от длины временного промежутка, на котором рассматривается струна. В этой же работе авторами получены аналогичные результаты для натянутых струн, сопровождающих случайное блуждание. Цель данной статьи – обобщить упомянутые результаты на случай натянутых струн, сопровождающих винеровский процесс и случайное блуждание в полосе *переменной* ширины.

§2. Основные результаты

2.1. Винеровский процесс. Начнём с необходимых обозначений. Нам потребуются равномерная и соболевская нормы:

$$||h||_T := \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{|h(t)|\}, \qquad h\in\mathbb{C}[0,T],$$

$$|h|_T^2 := \int_0^T h'(t)^2dt, \qquad h\in AC[0,T],$$

где через $AC[0,T]$ обозначается множество абсолютно непрерывных функций на $[0,T]$. Значение $|h|_T^2$ называется *энергией* струны h.

Энергия натянутой струны (минимальная энергия функции, проходящей в заданной полосе), обозначается следующим образом.

Для полосы постоянной ширины:

$$I_W(T,r)^2 := \inf\{|h|_T^2; h\in AC[0,T], ||h-W||_T\leqslant r, h(0)=0\},$$
$$I_W^0(T,r)^2 := \inf\{|h|_T^2; h\in AC[0,T],$$
$$||h-W||_T\leqslant r, h(0)=0, h(T)=W(T)\}.$$

Для полосы переменной ширины:

$$I_W(T,r.)^2 := \inf\{|h|_T^2; h\in AC[0,T], |h(t)-W(t)|\leqslant r_t,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ h(0)=0\},$$
$$I_W^0(T,r.)^2 := \inf\{|h|_T^2; h\in AC[0,T], |h(t)-W(t)|\leqslant r_t,$$
$$0\leqslant t\leqslant T, h(0)=0, h(T)=W(T)\}.$$

Единственные функции, на которых достигаются эти инфимумы, называются, соответственно, натянутой струной (для I_W) и натянутой струной с закреплённым концом (для I_W^0). Значения I_W^2 и $(I_W^0)^2$

называются, соответственно, энергией натянутой струны и энергией натянутой струны с закреплённым концом.

В дальнейшем будем записывать $f(T) \sim g(T)$, если

$$\lim_{T\to\infty} \frac{f(T)}{g(T)} = 1.$$

Основной результат данной работы состоит в следующем.

Теорема 1. *Пусть функция* $t \mapsto r_t$ *удовлетворяют следующим условиям*

(1) r_t *не убывает*;
(2) $\frac{r_t\sqrt{\ln\ln t}}{\sqrt{t}}$ *не возрастает*;
(3) $\frac{r_t\sqrt{\ln\ln t}}{\sqrt{t}} \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Тогда при $T \to \infty$ *верно соотношение*

$$I_W(T, r.)^2 \sim \mathcal{C}^2 \int\limits_0^T \frac{dt}{r_t^2} \quad \text{п.н.}, \tag{1}$$

где $\mathcal{C}$ *– некоторая постоянная.*

Замечание 2. Постоянная $\mathcal{C}$ была введена в работе [8]. Точное значение $\mathcal{C}$ неизвестно, но компьютерное моделирование даёт приближённое значение $\mathcal{C} \approx 0.63$. В работе [11] дана интерпретация постоянной $\mathcal{C}$ в терминах структуры обновления, связанной с винеровским процессом.

Замечание 3. Условия, наложенные на ширину полосы, аналогичны условиям из [9].

Аналог теоремы 1 можно получить и для энергии струны с фиксированным концом, т.е. для величины $I_W^0(T, r.)$.

Теорема 4. *При выполнении условий теоремы* 1 *верно*

$$I_W^0(T, r.)^2 \sim \mathcal{C}^2 \int\limits_0^T \frac{dt}{r_t^2} \quad \text{п.н.}$$

Замечание 5. Утверждения теорем 1 и 4 остаются верными, если заменить ширину полосы r_t на $r_t(1 + o(1))$. Это позволяет уходить от предположения о монотонности.

Замечание 6. Как видно из доказательства теоремы 4, в ней можно заменить условие прихода в точку $W(T)$ на условие прихода в точку $W(T)+x_T$, где $x_T=o(r_T)$.

2.2. Случайное блуждание. Пусть $X_1, X_2, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределённых вещественных случайных величин. Определим частичные суммы (случайное блуждание) $S_0 := 0$ и

$$S_k := \sum_{j=1}^{k} X_j, \quad k \geqslant 1.$$

Определим на $[0,\infty)$ случайную ломаную $S(\cdot)$ следующим образом:

$$S(t) := \begin{cases} S_k, & t=k,\ k=0,1,\dots \\ (k+1-t)S_k+(t-k)S_{k+1}, & t\in(k,k+1),\ k=0,1,\dots \end{cases}$$

Введём аппроксимационные характеристики для S, аналогичные определённым ранее для винеровского процесса W:

$$I_S(T,r.)^2 := \inf\{|h|_T^2 \colon h\in AC[0,T], |h(t)-S(t)|\leqslant r_t, h(0)=0\},$$
$$I_S^0(T,r.)^2 := \inf\{|h|_T^2 \colon h\in AC[0,T], |h(t)-S(t)|\leqslant r_t, h(0)=0, h(T)=S(T)\}.$$

Теорема 7. *Пусть S – случайная ломаная, построенная по частичным суммам независимых одинаково распределённых случайных величин X_j, имеющих нулевое среднее и единичную дисперсию. Пусть X_j имеют конечный момент порядка $p>2$, $r.$ удовлетворяет условиям теоремы 1, а также условию $T^{1/p}=o(r_T)$. Тогда*

$$I_S(T,r.)^2 \sim \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{r_t^2} \quad \text{п.н.},$$

$$I_S^0(T,r.)^2 \sim \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{r_t^2} \quad \text{п.н.}$$

Если же величины X_j имеют конечный экспоненциальный момент, то указанные результаты верны в предположениях теоремы 1 и условия $\ln T=o(r_T)$.

§3. Доказательство теоремы 1

3.1. Оценка сверху. Зафиксируем $a>1$. Рассмотрим последовательность моментов времени $t_k := a^k$. Поскольку функция $t\mapsto r_t$ не убывает, $r_{t_{k+1}} \geqslant r_{t_k}$. С другой стороны, $\frac{r_t\sqrt{\ln\ln t}}{\sqrt{t}}$ не возрастает, значит функция

$$t \mapsto \frac{r_t}{\sqrt{t}} = \frac{r_t\sqrt{\ln\ln t}}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln\ln t}}$$

является невозрастающей. Следовательно,

$$\frac{r_{t_{k+1}}}{\sqrt{t_{k+1}}} \leqslant \frac{r_{t_k}}{\sqrt{t_k}}. \tag{2}$$

Подставляя $t_k = a^k$ в (2), получим $r_{t_{k+1}} \leqslant r_{t_k}\sqrt{\frac{t_{k+1}}{t_k}} = r_{t_k}\sqrt{a}$. В частности, в силу того, что r_t не убывает, при $t \in (t_k, t_{k+1})$ верно

$$r_{t_k} \leqslant r_t \leqslant r_{t_{k+1}} \leqslant r_{t_k}\sqrt{a}. \tag{3}$$

Уменьшим ширину полосы на интервале $[t_k, t_{k+1}]$ с r_t до r_{t_k} и обозначим $T_k := t_{k+1}$. Тогда получим следующую оценку

$$I_W(T_m, r.)^2 \leqslant I_W^0(T_m, r.)^2 \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} I_{W_k}^0(t_{k+1} - t_k, r_{t_k})^2, \tag{4}$$

где $W_k(s) = W(t_k + s) - W(t_k), 0 \leqslant s \leqslant t_{k+1} - t_k$, – независимые винеровские процессы.

Нам достаточно показать, что

$$I_{W_k}^0(t_{k+1} - t_k, r_{t_k})^2 \quad \leqslant \quad \frac{\mathcal{C}^2 \cdot (t_{k+1} - t_k)}{r_{t_k}^2} \cdot (1 + o(1)) \ \text{ п.н.}, \tag{5}$$

$$\frac{t_{k+1} - t_k}{r_{t_k}^2} \quad \leqslant \quad a\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dt}{r_t^2}. \tag{6}$$

Заметим, что (6) следует из (3), поскольку

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{a}{r_t^2}dt \geqslant \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{r_{t_k}^2}dt = \frac{t_{k+1} - t_k}{r_{t_k}^2}.$$

Теперь покажем (5). Заметим, что эта оценка касается только полос постоянной ширины, изученных в [8] и [9]. Воспользуемся следующим неравенством, доказанным в [9]. Пусть $T > 0, \delta \in (0, \frac{1}{3}), L_T \in (0, T)$. Обозначим $T_* = T - L_T$, $W'(s) = W(T_* + s) - W(T_*)$ для $s \in [0, T - T_*]$. Тогда верно неравенство

$$I_W^0(T, r_T)^2 \leqslant I_W(T, (1 - 3\delta)r_T)^2 + 2I_{W'}(L_T, \delta r_T)^2 + \frac{2r_T^2}{L_T}.$$

Перепишем это соотношение для нашего случая. Для любых $L_k > 0$, таких что $L_k \ll t_k$, и для любого $\delta \in (0, \frac{1}{3})$ при достаточно больших k верно:

$$I^0_{W_k}(t_{k+1}-t_k, r_{t_k})^2 \leqslant I_{W_k}(t_{k+1}-t_k, (1-3\delta)r_{t_k})^2 + 2I_{W'_k}(L_k, \delta r_{t_k})^2 + \frac{2r^2_{t_k}}{L_k}, \quad (7)$$

где $W'_k(s) := W_k(s+T_*) - W(T_*), 0 \leqslant s \leqslant t_{k+1} - t_k - T_* = L_k$.

Выберем теперь $L_k := r^2_{t_k}$. Мы хотим показать, что

$$\begin{aligned} &\frac{r^2_{t_k}}{\mathcal{C}^2 \cdot (t_{k+1}-t_k)} \Big(I_{W_k}(t_{k+1}-t_k, (1-3\delta)r_{t_k})^2 + 2I_{W'_k}(L_k, \delta r_{t_k})^2 + \frac{2r^2_{t_k}}{L_k} \Big) \\ = \;& 1 + o(1) \quad \text{п.н.} \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим каждое из этих слагаемых. Заметим сначала, что $\frac{2r^2_{t_k}}{L_k} = 2$. Поскольку по условию теоремы

$$\frac{r^2_{t_k}}{t_{k+1}-t_k} \asymp \frac{r^2_{t_k}}{t_k} \to 0, \qquad k \to \infty,$$

последнее слагаемое в (8) даёт пренебрежимо малый вклад.

Теперь рассмотрим второе слагаемое. Необходимо показать, что

$$\frac{r^2_{t_k}}{t_{k+1}-t_k} \cdot I_{W'_k}(r^2_{t_k}, \delta r_{t_k})^2 \to 0, \qquad k \to \infty, \quad \text{п.н.},$$

что эквивалентно соотношению

$$\frac{r^2_{t_k}}{t_k} \cdot I_{W'_k}(r^2_{t_k}, \delta r_{t_k})^2 \to 0, \qquad k \to \infty, \quad \text{п.н.}$$

Следующие шаги аналогичны выкладкам из [9], но мы повторим их для полноты изложения. Сначала заметим, что случайная величина $I_{W'_k}(r^2_{t_k}, \delta r_{t_k})$ в силу самоподобия винеровского процесса равнораспределена с $I_W(1,\delta)$. По лемме Бореля–Кантелли нам достаточно проверить, что для любого $\varepsilon > 0$ верно:

$$\sum_k \mathbb{P}\Big(I_W(1,\delta) \geqslant \frac{\varepsilon\sqrt{t_k}}{r_{t_k}} \Big) < \infty. \quad (9)$$

Обозначим через $m(T, r)$ медиану случайной величины $I_W(T, r)$. Поскольку $m(1,\delta)$ – константа, то для достаточно больших k верно, что

$$m(1,\delta) < \frac{\varepsilon}{2} \frac{\sqrt{t_k}}{r_{t_k}}.$$

Воспользуемся следующей оценкой концентрации [8, с. 408]: для произвольных фиксированных T и r и для любого $\rho > 0$:

$$\mathbb{P}(|I_W(T,r) - m(T,r)|\geqslant\rho)\leqslant\mathbb{P}(|\xi|\geqslant\rho)\leqslant \exp\{-\rho^2/2\}, \tag{10}$$

где ξ – стандартная нормальная случайная величина. При помощи этих двух неравенств построим следующую цепочку:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(I_W(1,\delta)\geqslant\frac{\varepsilon\sqrt{t_k}}{r_{t_k}}\Big) &= \mathbb{P}\Big(I_W(1,\delta) - m(1,\delta)\geqslant\frac{\varepsilon\sqrt{t_k}}{r_{t_k}} - m(1,\delta)\Big)\\ &\leqslant\mathbb{P}\Big(I_W(1,\delta) - m(1,\delta)\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\frac{\sqrt{t_k}}{r_{t_k}}\Big)\\ &\leqslant\mathbb{P}\Big(|I_W(1,\delta) - m(1,\delta)|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\frac{\sqrt{t_k}}{r_{t_k}}\Big)\\ &\leqslant \exp\Big(-\frac{\varepsilon^2}{8}\frac{t_k}{r_{t_k}^2}\Big).\end{aligned}$$

Таким образом, нам достаточно показать, что для любого $h > 0$ верно

$$\sum_k \exp\Big(-h\cdot\frac{t_k}{r_{t_k}^2}\Big) < \infty.$$

Функция $f(t) := t/r_t^2$, как было отмечено, является возрастающей, Поэтому для достаточно больших t $f(t)\geqslant C$ для некоторой константы $C > 1$. С другой стороны, функция $g(t) := \exp(-ht/r_t^2)r_t^{-2}$ является убывающей. Оценим интеграл функции g. Разобьём ось времени на отрезки $[t_{k-1}, t_k]$ и на каждом из них сделаем следующую оценку:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \exp\Big(-h\frac{t}{r_t^2}\Big)\frac{1}{r_t^2}dt = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} g(t)dt\geqslant g(t_k)\cdot(t_k - t_{k-1})\\ &\quad= \exp\Big(-h\frac{t_k}{r_{t_k}^2}\Big)\frac{t_k - t_{k-1}}{r_{t_k}^2} = \exp\Big(-h\frac{t_k}{r_{t_k}^2}\Big)f(t_k)\frac{t_k - t_{k-1}}{t_k}\\ &\quad\geqslant C\cdot\Big(1 - \frac{1}{a}\Big)\exp\Big(-h\frac{t_k}{r_{t_k}^2}\Big) := C'\exp\Big(-h\frac{t_k}{r_{t_k}^2}\Big).\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{C'}\sum_{k>N}\exp\Big(-h\cdot\frac{t_k}{r_{t_k}^2}\Big)\leqslant\sum_{k>N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\exp\Big(-h\frac{t}{r_t^2}\Big)\frac{1}{r_t^2}dt$$
$$\leqslant\int\limits_{t>t_N}\exp\Big\{-h\frac{t}{r_t^2}\Big\}r_t^{-2}\,dt.$$

Значит, достаточно показать, что

$$\int\limits_{t>t_N}\exp\Big\{-h\frac{t}{r_t^2}\Big\}r_t^{-2}dt<\infty. \tag{11}$$

Перепишем подынтегральное выражение

$$\exp\Big\{-h\frac{t}{r_t^2}\Big\}r_t^{-2}=\exp\Big\{-h\frac{t}{r_t^2}\Big\}h\frac{t}{r_t^2}\cdot h^{-1}t^{-1}=\exp\{-u\}u\cdot h^{-1}t^{-1},$$

где $u:=\frac{ht}{r_t^2}$. Согласно условию 3 нашей теоремы, u при достаточно больших t удовлетворяет оценке $u>2\ln\ln t$. Значит, в силу монотонности функции $u\mapsto\exp(-u)\,u$ (при $u\geqslant 1$)

$$\exp\{-u\}\cdot u\leqslant 2\exp\{-2\ln\ln t\}\ln\ln t=(2\ln t)^{-2}\ln\ln t.$$

Таким образом, мы можем оценить "хвост" интеграла (11) хвостом сходящегося интеграла

$$\int^{\infty}\frac{\ln\ln t}{t(\ln t)^2}\,dt<\infty.$$

Следовательно, второе слагаемое в равенстве (8) тоже даёт пренебрежимо малый вклад.

Осталось оценить первое слагаемое в (8). Как уже говорилось выше, можно применять результаты, полученные для полос постоянной ширины. По теореме 1.2 из [8] имеем

$$\frac{(1-3\delta)r_{t_k}^2}{t_{k+1}-t_k}\cdot I_{W_k}(t_{k+1}-t_k,(1-3\delta)r_{t_k})^2\to\mathcal{C}^2,\qquad k\to\infty,\quad\text{п.н.}$$

Этого достаточно, поскольку теперь δ можно выбрать сколь угодно малым.

Таким образом, оценка (5) получена. Объединяя неравенства (4)–(6), получим верхнюю оценку теоремы 1 для дискретной последовательности времён T_m. Дополнительно отметим, что при этом был доказан более сильный результат:

$$I_W(T_m, r.)^2 \leqslant I_W^0(T_m, r.)^2 \leqslant \mathcal{C}^2 \int\limits_0^{T_m} \frac{dt}{r_t^2}(1+o(1)) \quad \text{п.н.} \tag{12}$$

Мы показали эту оценку пока что только для дискретного времени.

Перейдём к непрерывному времени. Пусть $T \in [T_{m-1}, T_m]$. Тогда, поскольку $I_W(\cdot, r)$ – неубывающая функция, верна оценка

$$I_W(T, r.) \leqslant I_W(T_m, r.).$$

Теперь оценим интегралы. Поскольку $t \mapsto r_t$ не убывает, то

$$\int\limits_0^T \frac{dt}{r_t^2} \geqslant \int\limits_0^{T_{m-1}} \frac{dt}{r_t^2} = \int\limits_0^{T_m} \frac{d\tau}{a r_{\frac{\tau}{a}}^2} \geqslant \int\limits_0^{T_m} \frac{d\tau}{a r_\tau^2}.$$

Поэтому верно следующее неравенство

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{I_W(T, r.)^2}{\int_0^T \frac{dt}{r_t^2}} \leqslant \limsup_{m\to\infty} \frac{I_W(T_m, r.)^2}{\int_0^{T_m} \frac{dt}{a r_t^2}} \leqslant a\, \mathcal{C}^2 \quad \text{п.н.}$$

Устремим a к единице и получим нужное неравенство для непрерывного времени. Оценка сверху полностью доказана.

3.2. Оценка снизу. Рассмотрим натянутую струну ϕ_m, реализующую $I_W(t_m, r.)$, где снова $t_m := a^m$ для некоторой константы $a > 1$. Тогда

$$I_W(t_m, r.)^2 = \int\limits_0^{t_m} \phi_m'(s)^2\, ds \geqslant \sum_{k=1}^m \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \phi_m'(s)^2\, ds,$$

и при $s \in [t_{k-1}, t_k]$ верно

$$|\phi_m(s) - W(s)| \leqslant r_s \leqslant r_{t_k}.$$

Добавим и вычтем $W(t_{k-1})$ в левой части. Получим эквивалентное неравенство

$$|\phi_m(s) - W(t_{k-1}) - (W(s) - W(t_{k-1}))| \leqslant r_{t_k}.$$

Обозначим $W_k(b) := W(b + t_{k-1}) - W(t_{k-1})$, где $b \in [0, t_k - t_{k-1}]$. Заметим, что W_k является винеровским процессом.

Рассмотрим энергию натянутой струны с незакреплёнными концом и началом $\widetilde{I}_W(T,r)^2$, полагая

$$\widetilde{I}_W(T,r)^2 := \inf\{|h|_T^2; h \in AC[0,T], ||h-W||_T \leqslant r\}.$$

С её помощью можно оценить величину $I_W(T,r)$, а именно

$$\widetilde{I}_{W_k}(t_k - t_{k-1}, r_{t_k})^2 \leqslant \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (\phi_m(s) - W(t_{k-1}))'^2 ds = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \phi_m'(s)^2 ds.$$

Следовательно,

$$I_W(t_m, r.)^2 \geqslant \sum_{k=1}^{m} \widetilde{I}_{W_k}(t_k - t_{k-1}, r_{t_k})^2. \tag{13}$$

Для того, чтобы доказать оценку снизу для дискретного времени, достаточно показать, что

$$\widetilde{I}_{W_k}(t_k - t_{k-1}, r_{t_k})^2 \geqslant \mathcal{C}^2 \cdot \frac{t_k - t_{k-1}}{r_{t_k}^2}(1 + o(1)) \quad \text{п.н.} \tag{14}$$

Поясним, почему неравенства (14) будет достаточно. Заметим сначала, что, поскольку r_t – неубывающая функция, то

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{dt}{r_t^2} \leqslant \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{dt}{r_{t_{k-1}}^2} = \frac{t_k - t_{k-1}}{r_{t_{k-1}}^2} = \frac{t_k - t_{k-1}}{r_{t_k}^2} \cdot \frac{r_{t_k}^2}{r_{t_{k-1}}^2}.$$

Из (3) следует

$$\frac{r_{t_k}^2}{r_{t_{k-1}}^2} \leqslant a.$$

Отсюда находим

$$\frac{t_k - t_{k-1}}{r_{t_k}^2} \geqslant \frac{1}{a} \cdot \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{dt}{r_t^2}. \tag{15}$$

Скомбинируем оценки (13)–(15) и получим

$$I_W(t_m, r.)^2 \geqslant \mathcal{C}^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{a} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{dt}{r_t^2}(1 + o(1)) = \frac{\mathcal{C}^2}{a} \cdot \int\limits_0^{t_m} \frac{dt}{r_t^2}(1 + o(1)) \quad \text{п.н.}$$

Устремляя a к единице, получим нужную оценку для дискретного времени.

Вместо неравенства (14) будем доказывать эквивалентное ему неравенство:

$$\widetilde{I}_{W_k}(t_k - t_{k-1}, r_{t_k}) \geqslant \mathcal{C} \cdot \frac{\sqrt{t_k - t_{k-1}}}{r_{t_k}}(1 + o(1)) \quad \text{п.н.,} \tag{16}$$

для проверки которого достаточно показать следующие соотношения:

$$\widetilde{m}(t_k - t_{k-1}, r_{t_k}) \geqslant \mathcal{C} \cdot \frac{\sqrt{t_k - t_{k-1}}}{r_{t_k}}(1 + o(1)), \tag{17}$$

$$(\widetilde{I}_{W_k} - \widetilde{m})(t_k - t_{k-1}, r_{t_k}) = o\Big(\frac{\sqrt{t_k - t_{k-1}}}{r_{t_k}}\Big) = o\Big(\frac{\sqrt{t_k}}{r_{t_k}}\Big) \quad \text{п.н.} \tag{18}$$

где $\widetilde{m}$ – медиана случайной величины $\widetilde{I}_W$.

Докажем сначала оценку (18). По условию теоремы для любого $M > 1$ при достаточно больших t выполняется неравенство

$$M\sqrt{\ln \ln t} < \frac{\sqrt{t}}{r_t}.$$

Следовательно, для доказательства равенства (18) достаточно применить лемму Бореля–Кантелли и доказать следующее:

$$\sum_k \mathbb{P}((|\widetilde{I}_{W_k} - \widetilde{m}|(t_k - t_{k-1}, r_{t_k}) > M\sqrt{\ln \ln t_k}) < \infty. \tag{19}$$

Заметим, что $\sqrt{\ln \ln t_k} = \sqrt{\ln(\ln a \cdot k)} \sim \sqrt{\ln k}$. Поэтому, используя оценку концентрации (10), можно сумму из (19) оценить через

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-M^2 \ln k/3\} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-M^2/3}.$$

Эта сумма будет конечна, если выбрать $M = 2$. Таким образом, неравенство (18) доказано.

Наша следующая цель – доказать (17). Переформулируем задачу следующим образом. Для $T \to \infty$ и $\frac{\sqrt{T}}{r} \to \infty$ нужно показать, что

$$\widetilde{m}(T, r) \geqslant \mathcal{C} \cdot \frac{\sqrt{T}}{r}(1 + o(1)). \tag{20}$$

В силу самоподобия винеровского процесса имеем $\widetilde{I}_W(T, r) = \widetilde{I}_W(\frac{T}{r^2}, 1)$ по распределению, откуда следует равенство:

$$\widetilde{m}(T, r) = \widetilde{m}\Big(\frac{T}{r^2}, 1\Big).$$

Тогда неравенство (20) можно переписать в другом виде

$$\widetilde{m}(T,1) \geqslant \mathcal{C}\sqrt{T}(1+o(1)), \quad T\to\infty. \tag{21}$$

Для доказательства этой оценки нам понадобится вспомогательное утверждение, похожее на неравенство (7).

Лемма 8. *Пусть W_1 – винеровский процесс. Тогда для любых $T>0, \varepsilon>0$ и некоторого винеровского процесса W_2 верно неравенство*

$$I_{W_1}(T+1,1+\varepsilon)^2 \leqslant \widetilde{I}_{W_2}(T,1)^2 + 2I_{W_1}(1,\varepsilon/2)^2 + 2\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)^2. \tag{22}$$

Доказательство леммы 8 будет приведено в разделе 3.3. Воспользуемся неравенством (22), переписав его в следующем виде:

$$\widetilde{I}_{W_2}(T,1)^2 \geqslant I_{W_1}(T+1,1+\varepsilon)^2 - 2I_{W_1}\Big(1,\frac{\varepsilon}{2}\Big)^2 - 2\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)^2. \tag{23}$$

Пусть $q_1=q_1(T,\varepsilon), q_2=q_2(\varepsilon)$ – две такие квартили, что выполнены неравенства:

$$\mathbb{P}\Big(I_{W_1}(T+1,1+\varepsilon)\geqslant q_1\Big) = \mathbb{P}\Big(I_{W_1}(T+1,1+\varepsilon)^2\geqslant q_1^2\Big)\geqslant\frac{3}{4}, \tag{24}$$

$$\mathbb{P}\Big(2I_{W_1}\Big(1,\frac{\varepsilon}{2}\Big)^2\leqslant q_2\Big)\geqslant\frac{3}{4}. \tag{25}$$

Тогда

$$\mathbb{P}\Big(\widetilde{I}_{W_2}(T,1)^2\geqslant q_1^2-q_2-2\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)^2\Big)=1-\mathbb{P}\Big(\widetilde{I}_{W_2}(T,1)^2<q_1^2-q_2-2\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)^2\Big),$$

и

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big(\widetilde{I}_{W_2}(T,1)^2 < q_1^2-q_2-2\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)^2\Big)\\ &\quad\leqslant\mathbb{P}\Big(I_{W_1}(T+1,1+\varepsilon)^2<q_1^2\Big)+\mathbb{P}\Big(2I_{W_1}\Big(1,\frac{\varepsilon}{2}\Big)^2>q_2\Big)<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что

$$\mathbb{P}\Big(\widetilde{I}_{W_2}(T,1)^2\geqslant q_1^2-q_2-2\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)^2\Big)\geqslant\frac{1}{2}.$$

По определению медианы отсюда следует, что

$$\widetilde{m}(T,1)^2\geqslant q_1^2-q_2-2\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)^2.$$

Из (24) следует, что

$$q_1\geqslant m(T+1,1+\varepsilon)-c,$$

где c – некоторая абсолютная константа. Применяя результат статьи [8, следствие 3.2], получаем, что:

$$\begin{aligned}\widetilde{m}(T,1)^2 &\geqslant (m(T+1,1+\varepsilon)-c)^2 - q_2 - 2\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)^2\\ &= \Big(\mathcal{C}\frac{\sqrt{T+1}}{1+\varepsilon}(1+o(1))-c\Big)^2 - q_2 - 2\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)^2\\ &= \mathcal{C}^2\frac{T}{(1+\varepsilon)^2}(1+o(1)), \qquad T\to\infty.\end{aligned}$$

Другими словами, для любого $\varepsilon > 0$ верно

$$\widetilde{m}(T,1)\geqslant\mathcal{C}\frac{\sqrt{T}}{1+\varepsilon}(1+o(1)).$$

В силу произвольности ε получаем (21), а вместе с ним и полностью доказана оценка снизу для дискретного времени. Аналогично тому, как мы делали переход к непрерывному времени в оценке сверху, осуществим переход от дискретного времени в оценке снизу. Пусть $T \in [T_{m-1}, T_m]$, $T_m = a^m$, тогда

$$I_W(T,r.)\geqslant I_W(T_{m-1},r.).$$

$$\int_0^T \frac{dt}{r_t^2}\leqslant\int_0^{T_m}\frac{dt}{r_t^2}=\int_0^{T_{m-1}}\frac{a\,d\tau}{r_{a\tau}^2}\leqslant\int_0^{T_{m-1}}\frac{a\,d\tau}{r_\tau^2}.$$

Отсюда получаем, что

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{I_W(T,r.)^2}{\int_0^T\frac{dt}{r_t^2}}\geqslant\liminf_{m\to\infty}\frac{I_W(T_{m-1},r.)^2}{\int_0^{T_{m-1}}\frac{a\,dt}{r_t^2}}\geqslant a^{-1}\mathcal{C}^2 \qquad \text{п.н.}$$

Устремим a к единице и получим требуемое неравенство. Таким образом, оценка снизу полностью доказана.

3.3. Доказательство леммы 8. Разобьём временной интервал на два: $[0,T+1]=[0,1]\cup[1,T+1]$ и рассмотрим на этом интервале винеровский процесс W_1. Определим

$$W_2(s) := W_1(1+s) - W_1(1), \quad 0\leqslant s\leqslant T.$$

Пусть $\phi(s)$, $0\leqslant s\leqslant T$, – натянутая струна, реализующая $\widetilde{I}_{W_2}(T,1)$. Будем строить струну $\psi(t)$, $0\leqslant t\leqslant T+1$, отдельно на $[0,1]$ и $[1,T+1]$ так, чтобы $||\psi - W_1||_{T+1}\leqslant 1+\varepsilon$ и $\psi(0)=0$. Тогда будет верно, что

$$I_{W_1}(T+1,1+\varepsilon)^2\leqslant|\psi|_{T+1}^2,$$

а значит, будет достаточно оценивать только энергию струны ψ.

Для $0\leqslant s\leqslant T$ положим

$$\psi(1+s) = \phi(s) + W_1(1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\psi(1+s) - W_1(1+s)| &= |\phi(s) + W_1(1) - W_1(1+s)| \\ &= |\phi(s) - W_2(s)|\leqslant 1 < 1+\varepsilon; \\ \int\limits_1^{T+1} \psi'(t)^2 dt &= \int\limits_0^T \phi'(s)^2\, ds = \widetilde{I}_{W_2}(T,1)^2. \end{aligned}$$

Заметим, что $\theta := \psi(1) - W_1(1) = \phi(0) + W_1(1) - W_1(1) = \phi(0) \in [-1,1]$. Построим $\psi(s), 0\leqslant s\leqslant 1$, так, чтобы $\psi(0) = 0, \psi(1) = W_1(1) + \theta$. Пусть $g(s), 0\leqslant s\leqslant 1$, – натянутая струна, реализующая $I_{W_1}(1,\varepsilon/2)$. Положим

$$\psi(s) = g(s) + s(\theta + W_1(1) - g(1)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi(0) &= 0, \\ \psi(1) &= g(1) + \theta + W_1(1) - g(1) = \theta + W_1(1), \\ |\psi(s) - W_1(s)|&\leqslant |g(s) - W_1(s)| + |\theta| + |W_1(1) - g(1)| \\ &\leqslant 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} + |\theta|\leqslant 1+\varepsilon. \end{aligned}$$

Осталось оценить энергию струны ψ на интервале $[0,1]$. Имеем

$$\begin{aligned} \psi'(s) &= g'(s) + \theta + W_1(1) - g(1), \\ \psi'(s)^2&\leqslant 2g'(s)^2 + 2\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int\limits_0^1 \psi'(s)^2\, ds\leqslant 2\int\limits_0^1 g'(s)^2\, ds + 2\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)^2 = 2I_{W_1}(1,\varepsilon/2)^2 + 2\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)^2.$$

Окончательно, запишем все полученные неравенства вместе

$$I_{W_1}(T+1,1+\varepsilon)^2 \leqslant \int_0^{T+1} \psi'(t)^2 dt = \int_0^1 \psi'(t)^2 dt + \int_1^{T+1} \psi'(t)^2 dt$$
$$\leqslant 2 I_{W_1}(1,\varepsilon/2)^2 + 2\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)^2 + \widetilde{I}_{W_2}(T,1)^2,$$

что и требовалось доказать.

§4. Доказательство теоремы 4

Поскольку $I_W(T,r.) \leqslant I_W^0(T,r.)$, то при $T\to\infty$ верно

$$I_W^0(T,r.)^2 \geqslant \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{r_t^2}(1+o(1)),$$

так что оценка в одну сторону автоматически следует из теоремы 1. Необходимо проверить оценку в другую сторону. Для этого докажем следующее утверждение.

Лемма 9. *Пусть $L_T < T$.*

Тогда для любого $\delta \in (0,\frac{1}{3})$ верно

$$I_W^0(T,r.)^2 \leqslant I_W(T,(1-3\delta)r.)^2 + 2 I_{W_1}(L_T,\delta r_{T-L_T})^2 + 2\frac{r_T^2}{L_T},$$

где вспомогательный винеровский процесс W_1 определен соотношением $W_1(s) = W(T_*+s) - W(T_*)$, $T_* := T - L_T$.

Доказательство. Пусть h – натянутая струна, реализующая величину $I_W(T,(1-3\delta)r.)$. Тогда для h выполнены следующие условия

$$h(0)=0,$$
$$|h(t)-W(t)| \leqslant (1-3\delta) r_t, \qquad 0\leqslant t\leqslant T,$$
$$|h|_T = I_W(T,(1-3\delta)r.).$$

Пусть h_1 – натянутая струна, реализующая $I_{W_1}(L_T,\delta r_{T_*})$. Тогда для h_1 выполнены следующие условия:

$$h_1(0)=0,$$
$$|h_1(s)-W_1(s)| \leqslant \delta r_{T_*}, 0\leqslant s\leqslant L_T,$$
$$|h_1|_{L_T} = I_{W_1}(L_T,\delta r_{T_*}).$$

Теперь всё готово для того, чтобы построить функцию $\bar{h}$, энергия которой будет аппроксимировать $I_W^0(T, r.)^2$. Определим

$$\bar{h}(t) := \begin{cases} h(t), & 0\leqslant t\leqslant T_*, \\ h(T_*) + h_1(t - T_*) + \nu(t - T_*), & T_*\leqslant t\leqslant T, \end{cases}$$

где значение постоянной ν находится из уравнения

$$\bar{h}(T) = h(T_*) + h_1(L_T) + \nu\, L_T = W(T),$$

то есть

$$\nu = \frac{W(T) - h(T_*) - h_1(L_T)}{L_T}.$$

Заметим, что функция $\bar{h}(\,\cdot\,)$ абсолютно непрерывна. Оценим ν для $t\geqslant T_*$:

$$\begin{aligned} |\nu| &= \frac{|((W(T_*) - h(T_*)) + (W(T) - W(T_*) - h_1(L_T))|}{L_T} \\ &\leqslant \frac{|(W(T_*) - h(T_*)| + |W_1(L_T) - h_1(L_T)|}{L_T} \\ &\leqslant \frac{(1-3\delta)r_{T_*} + \delta r_{T_*}}{L_T} = \frac{(1-2\delta)r_{T_*}}{L_T}. \end{aligned}$$

Оценим равномерное расстояние между $\bar{h}$ и W. Для $0\leqslant t\leqslant T_*$

$$|\bar{h}(t) - W(t)| = |h(t) - W(t)|\leqslant(1-3\delta)r_t.$$

Для $T_*\leqslant t\leqslant T$ воспользуемся тождеством

$$\bar{h}(t) - W(t) = h_1(t-T_*) - W_1(t-T_*) - \nu(L_T - (t-T_*)) + W_1(L_T) - h_1(L_T).$$

Видим, что для рассматриваемого интервала верно

$$\begin{aligned} |\bar{h}(t) - W(t)| &\leqslant |h_1(t-T_*) - W_1(t-T_*)| + |W_1(L_T) - h_1(L_T)| + |\nu| L_T \\ &\leqslant 2\delta r_{T_*} + (1-2\delta)r_{T_*} = r_{T_*}\leqslant r_T. \end{aligned}$$

Осталось оценить энергию, для которой мы имеем

$$
\begin{aligned}
|\bar{h}|_T^2 &= \int_0^{T_*} \bar{h}'(t)^2 dt + \int_{T_*}^{T} \bar{h}'(t)^2 dt \\
&= \int_0^{T_*} h'(t)^2 dt + \int_{T_*}^{T} (h_1'(t-T_*)+\nu)^2 dt \\
&\leqslant \int_0^{T_*} h'(t)^2 dt + 2\int_{T_*}^{T} h_1'(t-T_*)^2 dt + 2\nu^2 L_T \\
&\leqslant I_W(T,(1-3\delta)r.)^2 + 2I_{W_1}(L_T,\delta r_{T_*})^2 + \frac{2r_T^2}{L_T}.
\end{aligned}
$$

Поскольку $I_W^0(T,r.)^2 \leqslant |\bar{h}|_T^2$, утверждение леммы доказано. □

Теперь воспользуемся леммой. Покажем, что при подходящем выборе L_T верно

$$
I_W(T,(1-3\delta)r.)^2 + 2I_{W_1}(L_T,\delta r_{T-L_T})^2 + 2\frac{r_T^2}{L_T} \leqslant \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{r_t^2}(1+o(1)). \quad (26)
$$

Этого достаточно для доказательства теоремы 4. Первое слагаемое никак не зависит от L_T, поэтому можно воспользоваться теоремой 1:

$$
I_W(T,(1-3\delta)r.)^2 = \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{(1-3\delta)^2 r_t^2}(1+o(1)) \qquad \text{п.н.},
$$

а затем устремить δ к нулю.

Покажем, что остальные слагаемые пренебрежимо малы в сравнении с первым. Построим следующую последовательность моментов времени:

$$
T_0 := 1,\ T_{k+1} := T_k + r_{T_k}^2.
$$

Для удобства обозначим $r_k := r_{T_k}$. Из условий теоремы следует, что

$$
\lim_{k\to\infty} T_k = \infty,\ \lim_{k\to\infty} \frac{T_{k+1}}{T_k} = 1,\ \lim_{k\to\infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} = 1.
$$

Теперь определим L_T. Для $T \in [T_{k+1}, T_{k+2})$ положим

$$
T_* := T_k,\ L_T := T - T_k.
$$

Тогда при достаточно больших k будет верно неравенство

$$\frac{r_{k+2}}{\sqrt{T_{k+2}}} \leqslant \frac{r_T}{\sqrt{T}} \leqslant \frac{2r_k}{\sqrt{T_k}},$$

после чего можно оценить L_T:

$$\begin{aligned} L_T &\geqslant T_{k+1} - T_k = r_k^2 > \frac{r_{k+2}^2}{2} \geqslant \frac{r_T^2}{2}, \\ L_T &\leqslant T_{k+2} - T_k = r_k^2 + r_{k+1}^2 < 3r_k^2. \end{aligned}$$

Перейдём к оставшимся слагаемым в (26). Для начала оценим второе слагаемое

$$I_{W_1}(L_T, \delta r_{T-L_T})^2 = I_{W_1}(L_T, \delta r_k)^2 \leqslant I_{W_1}(3r_k^2, \delta r_k)^2.$$

Применив неравенства, рассмотренные выше, получим утверждение, аналогичное доказанному ранее:

$$\begin{aligned} &\limsup_{T\to\infty} I_{W_1}(L_T, \delta r_{T-L_T})^2 \Big(\int_0^T \frac{dt}{r_t^2} \Big)^{-1} \\ &\leqslant \limsup_{T\to\infty} I_{W_1}(L_T, \delta r_{T-L_T})^2 \cdot \frac{r_T^2}{T} \\ &\leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{4r_k^2}{T_k} \cdot I_{W_1}(3r_k^2, \delta r_k)^2 = 0 \quad \text{п.н.} \end{aligned}$$

Третье слагаемое оценим следующим образом:

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{r_T^2}{L_T} \Big(\int_0^T \frac{dt}{r_t^2} \Big)^{-1} \leqslant \limsup_{T\to\infty} \frac{r_T^2}{L_T} \cdot \frac{r_T^2}{T} \leqslant \lim_{T\to\infty} \frac{r_T^2}{r_T^2/2} \cdot \frac{r_T^2}{T} = 0 \quad \text{п.н.}$$

Таким образом, теорема 4 доказана.

§5. Доказательство теоремы 7

Для решения нашей задачи понадобится КМТ-аппроксимация (см. [3, 4, 10]).

Теорема 10. *Пусть* $X = \{X_1, \dots, X_j, \dots\}$ – *последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечный момент порядка* $p > 2$. *Тогда можно построить на некотором вероятностном пространстве последовательность*

$$\bar{X} = \{\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_j, \dots\},$$

равнораспределённую с X*, и последовательность независимых гауссовских величин* $\bar{Y} = \{\bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_j, \ldots\}$*, имеющих те же математические ожидания и дисперсии так, чтобы было выполнено*

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{X}_j - \sum_{j=1}^{n} \bar{Y}_j = o(n^{1/p}) \qquad \text{п.н.}$$

Если же величины X_j *имеют конечный экспоненциальный момент, то можно добиться выполнения*

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{X}_j - \sum_{j=1}^{n} \bar{Y}_j = O(\ln n) \qquad \text{п.н.}$$

О различных обобщениях этой теоремы см., например, [13, 14].

Напомним, что в теореме 7 рассматриваются S_k – частичные суммы независимых одинаково распределённых случайных величин X_j, с нулевыми средними, единичными дисперсиями и имеющих конечный момент порядка $p > 2$. Приблизим их частичными суммами W_k таких независимых гауссовских величин $\bar{Y}_j$, о которых говорится в теореме 10. Случайная ломаная $S(t)$ строится по узлам (k, S_k). Случайную ломаную $W(t)$ определим аналогично по узлам (k, W_k). По теореме 10 имеем $S_k - W_k = o(k^{1/p})$ п.н.

Построим по случайной ломаной $W(t)$ винеровский процесс $\widetilde{W}(t)$, добавив к каждому отрезку ломаной (от (k, W_k) до $(k+1, W_{k+1})$) соответствующие броуновские мосты $W_k^0(t)$, независимые между собой и от последовательности W_k.

Оценка энергии снизу.

Примем во внимание, что

$$\sup_{t \in [0,T]} |\widetilde{W}(t) - W(t)| = \max_{0 \leqslant k \leqslant T} \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} |W_k(s)| = O(\sqrt{\ln T}) \qquad \text{п.н.} \tag{27}$$

Это следует из оценки максимумов гауссовских процессов [7, гл. 12]:

$$\mathbb{P}\Big(\max_{0 \leqslant s \leqslant 1} |W_k(s)| \geqslant x \Big) = \exp\{-2x^2(1 + o(1))\}, \qquad x \to \infty,$$

и леммы Бореля–Кантелли. В частности, в условиях теоремы будет верно:

$$\sup_{t \in [0,T]} |\widetilde{W}(t) - W(t)| = O(\sqrt{\ln T}) = o(T^{1/p}) = o(r_T) \qquad \text{п.н.}$$

Положим

$$\rho_t := r_t + \sup_{s\in[0,t]} |S(s) - W(s)| + \sup_{s\in[0,t]} |\widetilde{W}(s) - W(s)|.$$

Третье слагаемое есть $o(r_t)$ в силу (27). Оценим второе слагаемое. Заметим, что

$$S_k - W_k = o(k^{1/p}) = o(r_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим $t \in [k, k+1]$. Имеем

$$\sup_{s\in[0,t]} |S(s) - W(s)| \leqslant \max_{0\leqslant\ell\leqslant k+1} |S_\ell - W_\ell| = o((k+1)^{1/p}) = o(r_t) \quad \text{п.н.}$$

Таким образом,

$$\rho_t = r_t(1 + o(1)), \qquad t \to \infty.$$

Поэтому ρ попадает под условия замечания 5.

Рассмотрим натянутую струну h, сопровождающую случайную ломаную S так, чтобы:

$$|S(t) - h(t)| \leqslant r_t \text{ и } |h|_T = I_S(T, r.).$$

Тогда

$$|h(t) - \widetilde{W}(t)| \leqslant |h(t) - S(t)| + |S(t) - W(t)| + |W(t) - \widetilde{W}(t)| \leqslant \rho_t.$$

Поэтому теорема 1 гарантирует:

$$I_S(T, r.)^2 = |h|_T^2 \geqslant I_{\widetilde{W}}(T, \rho.)^2 = \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{\rho_t^2}(1+o(1)) = \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{r_t^2}(1+o(1)) \text{ п.н.}$$

Оценка энергии сверху.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Положим $\rho_t := (1-\varepsilon)r_t$. Пусть $T \in \mathbb{N}$. Выберем струну h, сопровождающую винеровский процесс $\widetilde{W}$ так, чтобы:

$$|h(t) - \widetilde{W}(t)| \leqslant \rho_t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \text{ и } \quad |h|_T = I_{\widetilde{W}}(T, \rho.).$$

Построим случайную ломаную $\bar{h}$ по узлам $(k, h(k))_{k\in\{0,1,\ldots,T\}}$. В целых точках имеем

$$|\bar{h}(k) - W(k)| = |h(k) - \widetilde{W}(k)| \leqslant \rho_k, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, T\},$$

откуда

$$|\bar{h}(k) - S(k)| \leqslant |\bar{h}(k) - W(k)| + |W(k) - S(k)| \leqslant \rho_k + o(k^{1/p}), \quad k \in \{0, 1, \ldots, T\}.$$

Отсюда следует, что при достаточно больших целых k верно

$$|\bar{h}(k) - S(k)| \leqslant (1 - \varepsilon/2) r_k.$$

Для произвольных достаточно больших t получим

$$\begin{aligned} |\bar{h}(t) - S(t)| &\leqslant \max\left\{|\bar{h}(\lfloor t \rfloor) - S(\lfloor t \rfloor)|, |\bar{h}(\lceil t \rceil) - S(\lceil t \rceil)|\right\} \\ &\leqslant (1 - \varepsilon/2) r_{\lceil t \rceil} \leqslant (1 - \varepsilon/3) r_t, \end{aligned} \tag{28}$$

так как по условию теоремы $r_{\lceil t \rceil} \leqslant r_{t+1} \leqslant r_t(1 + o(1))$.

Оценим энергию ломаной $\bar{h}$. По построению имеем

$$\begin{aligned} |\bar{h}|_T^2 &= \sum_{k=0}^{T-1} \int_k^{k+1} \bar{h}'(s)^2 \, ds = \sum_{k=0}^{T-1} \big(\bar{h}(k+1) - \bar{h}(k)\big)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{T-1} \big(h(k+1) - h(k)\big)^2 = \sum_{k=0}^{T-1} \Big(\int_k^{k+1} h'(s)\, ds\Big)^2 \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{T-1} \int_k^{k+1} h'(s)^2 \, ds = \int_0^T h'(s)^2 \, ds = |h|_T^2. \end{aligned} \tag{29}$$

Далее нужно переопределить начальную часть узлов ломаной, полагая

$$\bar{g}(k) := \begin{cases} S(k), & k \leqslant k_0(\omega), \\ \bar{h}(k), & k \geqslant k_0(\omega) + 1, \end{cases}$$

так, чтобы *при всех* $t \leqslant T$ выполнялось $|\bar{g}(t) - S(t)| \leqslant r_t$. Тогда

$$|\bar{g}|_T^2 \leqslant c_0(\omega) + |\bar{h}|_T^2,$$

где $c_0(\omega)$ – случайная константа, не зависящая от T.

Используя теорему 1, получаем при целых $T \to \infty$

$$\begin{aligned} I_S(T, r.)^2 \leqslant |\bar{g}|_T^2 \leqslant c_0(\omega) + |\bar{h}|_T^2 &= c_0(\omega) + I_{\widetilde{W}}(T, \rho.) \\ &= \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{\rho_t^2}(1 + o(1)) = \mathcal{C}^2 \int_0^T \frac{dt}{r_t^2}(1 + o(1)) \quad \text{п.н.} \end{aligned}$$

Переход к произвольным T тривиален, так как $I_S(T, r.) \leqslant I_S(\lceil T \rceil, r.)$ и

$$\int_0^{\lceil T \rceil} \frac{dt}{r_t^2} \leqslant \int_0^T \frac{dt}{r_t^2} + O(1) = \int_0^T \frac{dt}{r_t^2}\,(1 + o(1)).$$

Оценка энергии I_S^0.

Оценка снизу следует из имеющейся оценки для $I_S(T, r.)$:

$$I_S^0(T, r.)^2 \geqslant I_S(T, r.)^2 = \mathcal{C}^2 \int\limits_0^T \frac{dt}{r_t^2}(1 + o(1)) \qquad \text{п.н.}$$

Чтобы доказать оценку сверху, необходимо повторить действия для оценки сверху $I_S(T, r.)$, взяв в качестве h струну, сопровождающую винеровский процесс $\widetilde{W}$ так, чтобы: $|h(t) - \widetilde{W}(t)| \leqslant \rho_t, 0 \leqslant t \leqslant T$, $|h|_T = I_{\widetilde{W}}^0(T, \rho.)$ и $h(T) = S(T)$. Заметим, что закреплённый конец струны h удовлетворяет условию, указанному в замечании 6:

$$h(T) = S(T) = \widetilde{W}(T) + (S(T) - \widetilde{W}(T)) = \widetilde{W}(T) + o(r_T).$$

Аналогично определим ломаную $\bar{h}$. Тогда неравенства (28) и (29) останутся верными. Получаем при $T \to \infty$

$$\begin{aligned} I_S^0(T, r.)^2 &\leqslant |\bar{h}|_T^2 \leqslant |h|_T^2 = I_{\widetilde{W}}^0(T, \rho.) \\ &= \mathcal{C}^2 \int\limits_0^T \frac{dt}{\rho_t^2}(1 + o(1)) = \mathcal{C}^2 \int\limits_0^T \frac{dt}{r_t^2}(1 + o(1)) \qquad \text{п.н.} \end{aligned}$$

Когда величины X_j имеют экспоненциальный момент, необходимо применить соответствующую версию КМТ-аппроксимации и воспользоваться условием $\ln T = o(r_T)$.

Таким образом, теорема 7 полностью доказана.

Список литературы

1. M. Grasmair, *The equivalence of the taut string algorithm and BV-regularization.* — J. Math. Imaging Vis. **27** (2007), 59–66.
2. Z. Kabluchko, M. Lifshits, *Least energy approximation for processes with stationary increments.* — J. Theoret. Probab. **30**, No. 1 (2017), 268–296.
3. J. Komlos, P. Major, G. Tusnady, *An approximation of partial sums of independent RV'-s and the sample DF.I.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **32** (1975), 111–131.
4. J. Komlos, P. Major, G. Tusnady, *An approximation of partial sums of independent RV'-s and the sample DF.II.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **34** (1976), 34–58.
5. N. Kruglyak, E. Setterqvist, *Discrete taut strings and real interpolation.* — J. Func. Anal. **270** (2016), 671–704.
6. N. Kruglyak, E. Setterqvist, *Invariant K-minimal sets in the discrete and continuous setting.* — J. Fourier Anal. Appl. **23** (2017), 572–611.
7. M. Lifshits, *Gaussian Random Functions*, Dordrecht, Kluwer, 1995.

8. M. Lifshits, E. Setterqvist, *Energy of taut string accompanying Wiener process.* — Stoch. Process. Appl. **125** (2015), 401–427.
9. M. Lifshits, A. Siuniaev, *Energy of taut strings accompanying random walk, to appear in Probab. Math. Statist.* 2019+. URL: `https://math.uni.wroc.pl/~pms/forthcoming_list/f.1761.pdf`.
10. P. Major, *The approximation of partial sums of independent r.v.'s.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **35** (1976), 213–220.
11. E. Schertzer, *Renewal structure of the Brownian taut string.* — Stoch. Process. Appl. **128**, No. 2 (2018), 487–504.
12. O. Scherzer et al., *Variational Methods in Imaging*, Ser.: Applied Mathematical Sciences, vol. 167, New York: Springer, 2009.
13. А. И. Саханенко, *Скорость сходимости в принципе инвариантности для разнораспределённых случайных величин с экспоненциальными моментами.* — Труды Инстит. Матем. СО АН СССР **3** (1984), 4–49.
14. А. Ю. Зайцев, *Точность сильной гауссовской аппроксимации для сумм независимых случайных векторов.* — Успехи матем. наук **68**, No. 4, (412) (2013), 129–172.

Blinova D. I., Lifshits M. A. Energy of taut strings accompanying Wiener process and random walk in a band of variable width.

In the article, kinetic energy of taut strings accompanying trajectory of a Wiener process or the one of random walk in a band of growing width is considered. It is shown that under certain assumptions on the band width the energy obeys the same strong law of large numbers as in the previously studied case of constant width.

С.-Петербургский Государственный Университет
факультет математики и компьютерных наук
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9
E-mail: daridablinova98@gmail.com
E-mail: mikhail@lifshits.org

Поступило 8 сентября 2020 г.